Biblioteca profesorului de matematică

38

Aplicații în trigonometrie

Constantin IONESCU-ȚIU

EDITURA ACADEMIEI ROMÂNE

APLICAȚII ÎN TRIGONOMETRIE

(PROBLEME REZOLVATE)

COLECTIVUL DE CONDUCERE AL COLECȚIEI

Acad. CAIUS IACOB, Președintele Secției de științe matematice a Academiei Române, coordonator.

Acad. NICOLAE TEODORESCU, Președintele Societății de științe matematice din România.

Prof. dr. doc. RADU MIRON, Universitatea „Al. I. Cuza" Iași.

Prof. dr. ION CUCULESCU, Universitatea din București.

Prof. DAN PAPUC, Universitatea din Timișoara.

Prof. dr. PETRU MOCANU, Universitatea din Cluj-Napoca.

Biblioteca
profesorului de matematică

CONSTANTIN IONESCU-ȚIU

APLICAȚII ÎN TRIGONOMETRIE

(PROBLEME REZOLVATE)

EDITURA ACADEMIEI ROMÂNE
BUCUREȘTI, 1992

APPLICATIONS IN TRIGONOMETRY

ПРИМЕНЕНИЯ В ТРИГОНОМЕТРИИ

ISBN 973-27-1000-5

EDITURA ACADEMIEI ROMÂNE
R 79 717, Bucureşti, Calea Victoriei nr. 125

În cadrul învățămîntului din școlile generale și din licee, matematicii i se acordă astăzi un loc deosebit de important. Considerată ca o disciplină de cultură generală, matematica educă în primul rînd gîndirea elevilor și în același timp le dezvoltă simțul de precizie, ordine, armonie, disciplină. Ea pune totodată la dispoziția elevilor un eficient instrument de lucru, pe care ei îl folosesc cu mult succes și la celelalte discipline în cadrul lecțiilor de mecanică, fizică, chimie. Predarea acestor științe devine categoric mai simplă dacă ea se bazează pe exprimarea matematică.

Aceste funcții formative ale matematicii au făcut pe un cunoscut matematician român, academicianul Grigore C. Moisil (1906—1973), să afirme chiar că „matematica este latina secolului XX" în sensul că în cadrul învățămîntului de cultură generală, matematica a luat locul pe care îl ocupa odinioară limba latină, care avea aceleași virtuți formative.

Una dintre noțiunile de bază ale matematicii este aceea de funcție, adică de corespondență între elementele a două mulțimi. Noțiunea de funcție întîlnită de elevi sub o formă mai mascată în clasele mici, apare în toată claritatea și generalitatea ei în clasele VIII și IX. Ea este ilustrată prin exemple simple, ca funcția polinom de gradul I sau II, dar în curînd cadrul acestor exemple se lărgește prin introducerea funcțiilor trigonometrice și atunci importanța ei devine și mai ușor sesizabilă de elevi. Astfel, apare acel capitol al disciplinelor matematice care poartă numele de trigonometrie și constituie un important aport al științei arabe și al celei europene medievale. Trigonometria a fost impulsionată de aplicațiile ei la astronomie, ca și de necesitatea evaluării distanțelor dintre puncte inaccesibile de pe Pămînt sau din spațiul cosmic, de necesitatea evaluării ariilor suprafețelor agricole, de diverse măsurători etc.

Sub această formă, trigonometria a pătruns în învățămînt alături de geometrie și de știința algebrei, care la rîndul ei s-a dezvoltat tot mai mult cu începere din secolul al XVII-lea. Tradiția predării trigonometriei în școală ca o disciplină aparte s-a oglindit și în învățămîntul nostru, începînd cu lecțiile de „Trigonometria cea dreaptă" ale lui Gheorghe Lazăr, care se ocupa de rezolvarea triunghiurilor plane, iar într-un timp se preda în învățămînt și trigonometria sferică, cu scopul rezolvării triunghiurilor sferice.

Reluată de Spiru Haret care a modernizat predarea lui Gheorghe Lazăr, trigonometria a făcut apoi obiectul unor manuale speciale pentru elevi. Printre acestea, se înscriu în primul rînd acelea ale profesorului Nicolae Avramescu, ca și a altor profesori de seamă pe care i-a dat în trecut învățămîntul nostru matematic. Unul dintre stîlpii Gazetei matematice, inginerul Vasile Cristescu, a realizat și o primă și foarte apreciată culegere de probleme de trionometrie.

Dezvoltarea ulterioară în învățămîntul liceal a calculului diferențial și integral, creație a secolelor XVIII și XIX, a restrîns mult poziția trigonometriei, reducîndu-i în special aplicațiile și însăși situația ei specială de disciplină aparte, pînă la a fi înglobată în analiza matematică, sau chiar în geometrie, ca un capitol de funcții speciale, așa-numitele funcții transcendente elementare

sin, cos, tg, ctg, precum și a funcțiilor lor inverse arcsin, arccos, arctg, arcctg, care au fost studiate în primul rînd de marele matematician Leonhard Euler (1707—1783). Dar această circumstanță nu a redus cu nimic rolul formativ al trigonometriei și învățămîntul nostru continuă, și pe drept cuvînt, să dezvolte capitolele rezervate definițiilor funcțiilor trigonometrice, a relațiilor dintre ele și a identităților trigonometrice, precum și a ecuațiilor și inecuațiilor trigonometrice. Acestea sînt de natură a consolida cunoștințele generale matematice predate elevilor. În arta formulării de probleme matematice, plecînd de la unele idei simple, profesorul C. Ionescu-Țiu, după ce ne-a oferit cunoscutele și apreciatele lucrări și culegeri de probleme de geometrie plană și în spațiu, aritmetică, algebră, calcul diferențial și integral, publicate în editurile Albatros, Didactică și Pedagogică, Tehnică din București și Editura Facla din Timișoara, prezintă astăzi publicului cititor această bogată colecție de probleme de trigonometrie pentru treapta I de liceu și pentru școlile tehnice. Culegerea sa cuprinde nu mai puțin de 867 de probleme împreună cu soluțiile lor și cu 180 de teste, la care elevii urmează să-și încerce singuri forțele. Majoritatea problemelor sînt accesibile masei largi a elevilor și autorul a căutat să le pună acestora la îndemînă metode de lucru, care să le permită abordarea și rezolvarea lor. Elevii vor găsi și probleme cu caracter recapitulativ, alese în special dintre acelea date la examenele de admitere în facultăți sau la olimpiade și concursuri. Cele mai multe probleme sînt datorate autorului, dar în volum s-au inclus și probleme propuse de alți autori, numele autorilor și referințele bibliografice corespunzătoare fiind date în introducerea volumului. Lucrarea este în primul rînd consacrată capitolelor trigonometriei cuprinse în programa școlară (funcții trigonometrice, proprietăți, relații dintre ele, grafice, ecuații trigonometrice, identități remarcabile, inecuații, rezolvarea triunghiurilor). Dar capitolul de aplicații în geometrie, algebră, mecanică și fizică nu este neglijat și în culegere se găsesc frumoase probleme cu caracter aplicativ, privind rezolvarea ecuațiilor binome, teoria numerelor complexe, determinări de distanțe etc.

Lucrarea a necesitat desigur o mare cantitate de muncă asociată unei bogate experiențe didactice și publicistice, autorul fiind timp de peste 40 de ani redactor al Gazetei Matematice. Ea denotă acel spirit de dăruire, care caracterizează pe profesorii fruntași. Se cade să exprimăm toată recunoștința noastră autorului pentru însemnatul serviciu adus cauzei predării matematicii în liceele noastre, iar Editurii Academiei Române, care a acceptat publicarea volumului, ce pune la dispoziție elevilor și profesorilor acest bogat material, i se cuvine de asemenea toată gratitudinea pentru această inițiativă.

Acad. CAIUS IACOB

Profesor la Facultatea
de Matematică-Mecanică
a Universității din București

INTRODUCERE

Pentru pregătirea temeinică a matematicilor predate în liceu, precum și în studiul multor discipline tehnice, are mare rol și însușirea temeinică a cunoștințelor de trigonometrie, verificate prin rezolvări de probleme variate.

Lucrarea de față cuprinde exerciții și probleme de trigonometrie, grupate pe capitole, conform programelor actuale ale liceului, adresîndu-se în egală măsură elevilor din liceele de orice specialitate, cît și cadrelor didactice și ca material de cercetare pentru cercurile de matematică ale elevilor. Problemele din această lucrare sînt rezolvate complet în cele mai multe cazuri, la unele probleme s-a considerat potrivit să se dea doar indicații de rezolvare. Soluțiile problemelor fiind independente, rezolvarea lor se poate face și în altă ordine decît cea propusă de autor.

Lucrarea mai cuprinde și un set de probleme recapitulative, date la examenele de admitere în facultăți sau la concursuri, constituind un instrument de lucru util candidaților care se pregătesc pentru aceste examene. Prin cercetarea cu atenție a lucrării, elevii vor înțelege frumusețea și eleganța aplicațiilor trigonometrice, iar prin modul de redactare a soluțiilor, elevii au șanse reale de înțelegere a diferitelor metode de rezolvare, lucrarea constituind totodată un instrument util în abordarea multor probleme aplicative cu caracter inter- și intradisciplinar. Profesorii pot folosi unele probleme în crearea altor probleme aplicative, fragmentare sau mai simple, lucrarea fiind astfel și un îndrumar de lucru, atît la clasă în cadrul cercurilor de elevi, cît și în pregătirea olimpiadelor.

Lucrarea este accesibilă și atrăgătoare, iar prezentarea metodică a soluțiilor poate duce și la stabilirea unor generalizări.

Pentru a nu le supraîncărca munca, majoritatea problemelor sînt destul de accesibile gamei largi de elevi, soluțiile lor fiind clare, dobîndirea metodelor de rezolvare se face într-un timp scurt. Unele dintre problemele propuse la sfîrșitul capitolului sînt mai grele și ele reclamă adevărată virtuozitate matematică, pe care volumul caută să o transmită cititorului. Pe lîngă problemele cu caracter interdisciplinar cu aplicații la geometrie, fizică sau mecanică, mai sînt și probleme cu caracter aplicativ practic, cum sînt, de exemplu, problemele: 1: 11, 12, 13, 14, 15, 20, 21; 2: 7; 3 : 4, 35; 4:7, 9, 26, 27, 30, 33, 115 și T: 129, 178. În lucrare, s-au folosit și probleme propuse de autori români în publicațiile din țară, indicînd prescurtat astfel: G.M. (Gazeta Matematică), S.G.M. (Suplimentul Gazetei Matematice, R.M.T. (Revista Matematică din Timișoara) și alte periodice, precum și Facultățile unde problemele au fost date la admitere.

Lista cu numele autorilor problemelor și revistelor unde s-au publicat: *Alger, P.* (5: 84); *Andreescu, T.* (T: 135). *Andrica, D.* (T: 139, 142), *Baltac, V.* (3: 151), *Bastius, E.* (2: 190), *Băluță, C.* (6: 39), *Chiriță, M.* (1: 108, 155), *Constantinescu, L.* (4: 44), *Doboșan, M.* (T: 164), *Drulea, M.* (5: 125), *Grecu, E.* (2: 96), *Haivas, M.* (T: 166), *Huschitt, M.* (T: 168), *Ionescu-Țiu, C.*

(1: 18—21, 23, 24, 30, 31, 35, 36, 39, 40, 42, 44, 47, 48, 50, 55, 57, 67, 70—73, 75, 77, 78, 85, 86, 96, 103, 109—112, 134, 135, 137, 140, 142, 145, 146, 156, 2: 6,12, 14, 15, 19, 28, 30, 31, 33, 38, 40, 43, 47, 52, 55, 58, 59, 61, 64, 66, 72, 74, 75, 78, 81, 84, 87, 93, 97, 99—104, 107, 109, 112, 116, 118, 120, 122, 124, 126, 128, 132, 133, 135, 137, 138, 140—143, 146, 148, 150, 152, 154, 156, 158, 160, 161, 163, 164, 169, 172, 174, 176, 178, 183, 184, 186, 188, 190, 191, 3: 2, 3, 25, 26, 33, 37, 40, 52, 53, 55, 57, 61, 63, 65, 66, 68, 71, 90, 103, 104, 106, 115, 118, 120, 122—124, 129, 131, 133, 135, 137, 139, 141, 145, 147—150, 152, 154, 156, 160, 162, 164, 166—170, 172, 174, 176, 178, 179, 180, 4: 28, 30, 32, 34, 38, 58, 60, 62, 68, 70, 72, 74, 76, 80, 86, 89, 105, 108, 109, 113, 114, 5: 6, 64, 75, 77, 83, 86, 93, 94, 104, 106, 108, 109, 110, 112, 113, 117, 6: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 15, 16, 20, 21, 23, 24, 41—43, 45—47, 52, 54, 63, 64, 66, 74, T: (2—47, 49—130, 132, 134, 136, 138, 141, 144, 146—155, 179, 180), *Liviu, P.* (T: 162), *Maghiar, Gh.* (3: 119), *Mănescu, L.* (4: 48), *Mihăileanu, N.* (4: 55), *Panaitopol, L.*: (6: 37, T: 131), *Popescu-Lugoj, Gh.* (1: 98), *Popescu, O.* (2: 155), *Rădulescu, M.* (T: 160), *Rotea, A.* (6: 55), *Solomon, J.* (T: 161), *Teodorescu, I.* (1: 12), *Toma, P.* (1: 33), *Tomescu, I.* (3: 7), *Tuţescu, L.* (2: 70), *Ţiţeica, Gh.* (4: 59), *Reviste*: *G.M.B.* (1: 12, 30, 31, 33, 35, 37, 39, 42—44, 47, 48, 50, 55, 55, 57, 70—72, 75, 77, 78, 86, 96, 98, 101, 103, 107—110, 133, 134, 137, 140, 146, 155, 156, 2: 6, 15, 19, 28, 30, 38, 40, 43, 47, 55, 58, 59, 61, 64, 69, 70, 75, 78, 93, 76, 97, 99—102, 104, 109, 112, 116, 118, 120, 126, 128, 133, 138, 140—143, 146, 148, 150, 152, 154—156, 158, 160, 161, 163, 164, 169, 172, 176, 178, 183, 186, 188, 190, 193, 3: 2, 3, 7 26, 33, 37, 40, 52, 53, 55, 61, 63, 65, 66, 68, 71, 77, 106, 115, 119, 120, 124, 126, 129, 131, 133, 135, 139, 141, 147, 150, 151, 152, 156, 160, 162, 164, 167, 168, 170, 172, 178, 179, 4: 28, 30, 38, 44, 48, 55, 58, 59, 62, 72, 74, 76, 89, 105, 108, 109, 113, 5: 6, 64, 75, 84, 86, 94, 95, 104, 110, 113, 117, 119, 6: 4, 6, 8, 13, 15, 16, 21, 23, 24, 37, 39, 41, 42, 43, 45—47, 52—54, 68, T: 113, 115, 116, 118—124, 126, 128—131, 152, 160, 161, 178), *S.G.M.* (1: 17, 136, 142, 2: 14, 33, 52, 58, 66, 81, 122, 135, 137, 3: 57, 145, 149, 154, 4: 60, 80, 114, 5: 83, 93, T: 125), *R.M.T.* (2: 180, 3: 148, 176, 4: 70, 6: 55, T: 134—139, 142), *Revista Numerus* (2: 12, 28, 31, 72), *Revista Pitagora* (1: 29, 40, 2: 103, 124, 132, 3: 131—143, 166, 169, 180, 4: 68, 86, 5: 77, 6: 10).

Unghiuri, arce. Relaţii între funcţiile trigonometrice ale arcelor în diferite cadrane. Relaţii între funcţiile trigonometrice ale aceluiaşi arc.

Operaţii cu vectori. Proiecţii. Identităţi trigonometrice. Eliminări. Inegalităţi între funcţiile trigonometrice ale aceluiaşi argument.

Arce care corespund unei funcţii trigonometrice date.

Funcţii periodice şi graficele lor.

Funcţii pare şi impare. Variaţia şi graficul funcţiilor trigonometrice. Inegalităţi trigonometrice simple.

Vectori în plan. Produsul scalar

PROBLEME

ENUNŢURI

1.1. Un unghi obtuz A are 1, 21 unghiuri drepte. Să se exprime mărimea acestui unghi în grade sexagesimale, în grade centesimale şi în radiani.

1.2. Să se calculeze mărimea în grade sexagesimale a unghiului de un radian.

1.3. Să se exprime unghiul de 57°17'44'' în grade centesimale.

1.4. Cîte grade sexagesimale are unghiul de 23/17 radiani?

1.5. Să se calculeze în grade sexagesimale: unghiul $\alpha = 5\pi/7$; $\beta = 0{,}73895$ radiani.

1.6. Să se calculeze unghiul la centru corespunzător arcului AB de 6,396 dm, raza cercului fiind de 8 dm.

1.7. Să se afle lungimea arcului $\widehat{AB}$ corespunzător unghiului la centru de 51°30'12'', raza cercului fiind de 6 dm.

1.8. Acele unui ceasornic care arată minutele şi care arată orele sînt la un moment dat suprapuse. Să se afle unghiul parcurs (măturat) de acul care arată orele pînă cînd minutarul se suprapune din nou peste acul care arată orele. *(C.I.P.)*.

1.9. Între ora 3 şi 4 acele unui ceasornic fac între ele un unghi de un radian. Să se exprime care este ora exactă arătată de ceasornic.

1.10. Un ceasornic arată ora $12^h\ 40^m$. Să se calculeze unghiul făcut de cele două ace, în grade sexagesimale, în grade centesimale și în radiani.

1.11. Două puncte A și B situate pe același meridian terestru sînt pe un cerc de 40 000 km lungime. Care este distanța între aceste puncte măsurate pe glob dacă latitudinile lor diferă cu 3°15'?

1.12. Latitudinea geografică a orașului București este de 44°25' nord. Care este distanța acestui oraș de ecuator, raportată la meridianul locului? Care este distanța orașului, față de tropicul de nord (lat. 23°27'20")?

Știind că lungimea meridianului terestru, după măsurătorile moderne, este $L = 40\,009{,}152$ km, să se exprime aceste distanțe. (G.M.B., 4500, *I. Teodorescu*)

1.13. Două roți angrenate au respectiv 90 dinți și 36 dinți. Dacă roata cu 90 dinți se rotește cu 200 rotații complete pe minut, să se calculeze viteza unghiulară ω în radiani pe secundă a roții cu 36 dinți precum și în grade sexagesimale pe secundă.

1.14. Cinci roți dințate sînt angrenate în serie și au numărul de dinți respectiv $Z_1 = 60$ dinți, $Z_2 = 75$ dinți, $Z_3 = 30$ dinți, $Z_4 = 45$ dinți și $Z_5 = 800$ dinți. Dacă roata cu $Z_3 = 30$ dinți face 100 ture pe minut, să se afle numărul de ture pe minut al roții cu $Z_1 = 75$ dinți și viteza unghiulară ω_5 în radiani pe secundă a roții cu $Z_5 = 300$ dinți.

1.15. Pe o hartă la scara 1 : 50 000 curbele de nivel sînt trasate echidistant, la o diferență de altitudine de 20 m. Care este în procente panta unui teren la care curbele de nivel sînt pe hartă depărtate cu 1 mm? Care va fi distanța între curbele de nivel de pe hartă la panta de $\alpha°$, știind că $\operatorname{tg}\alpha = 1/15$?

1.16. Să se arate că $\sin^3 x(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x(1 + \operatorname{tg} x) = \sin x + \cos x$.

1.17. Să se arate că dacă $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, atunci

a) $$E_1 = \frac{\dfrac{1}{(1-\sin x)^2} - \dfrac{1}{(1+\sin x)^2}}{\dfrac{1}{(1-\cos x)^2} - \dfrac{1}{(1+\cos x)^2}} = \operatorname{tg}^5 x.$$

b) $E_2 = \dfrac{\dfrac{\cos x}{1 \pm \sin x} - \dfrac{\sin x}{1 \pm \cos x}}{\dfrac{\cos x}{1 \pm \cos x} + \dfrac{\sin x}{1 \pm \cos x}} = \pm(\cos x - \sin x)$, semnele se corespund.

(S.G.M., VI: 989, *C.I.Ț*)

1.18. Să se arate că

$$(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b)(\operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{ctg} b - 1) = (\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b)(1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b) = \operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b - \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b.$$

(Revista Pitagora VI: 319 *C.I.Ț*)

1.19. Să se arate că dacă $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, atunci

$$\frac{(1-\cos x)^{-3} + (1+\cos x)^{-3}}{(1-\sin x)^{-3} - (1+\sin x)^{-3}} = \frac{(3+\cos^2 x)\cos^7 x}{(3+\sin^2 x)\sin^7 x}.$$ (G.M.B., 6243, *C.I.Ț*)

1.20. Un rulment este format din două inele concentrice avînd între ele un număr n de bile egale, tangente celor vecine şi tangente inelelor cilindrice. Notăm cu r raza cercului interior şi cu R raza cercului exterior. Să se arate că $\frac{r}{R} + \frac{1 - \sin(\pi/n)}{1 + \sin(\pi/n)}$.

1.21. Un cerc de rază r se roteşte în jurul unei axe din acelaşi plan, centrul cercului descriind un cerc de rază $R > r$. Aria acestui corp de rotaţie, numit tor, constituie canalul unui lagăr, în care sînt aşezate n bile una după alta, bilele vecine fiind tangente între ele şi tangente canalului.

Să se exprime raza unei bile în funcţie de R şi n.

Care este raza ρ a cercului pe care se află punctele de contact dintre bile. (G.M.B, 6186. *C. Ionescu-Ţiu*)

1.22. Să se afle raportul dintre ariile poligoanelor regulate cu cîte n laturi, respectiv circumscrise şi înscrise unui cerc de rază R şi raportul perimetrelor în funcţie de n.

1.23. Să se arate că dacă: $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = A$ şi $\frac{1 - \sin x}{\cos x} = B$, $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, atunci:

a) $\frac{A^2}{(1 + A^2)^2} + \frac{B^2}{(1 + B^2)^2} = \frac{1}{4}$.

b) $\frac{A^2}{(1 - A^2)^2} + \frac{B^2}{(1 - B^2)^2} + \frac{1}{2} = \left(\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}{2}\right)^2 > 1$. (G.M.B. 10 413, *C.I.Ţ*)

1.24. Să se arate că $\sqrt{\sin^2 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}$ nu depinde de x. (G.M.B., 14823, *L. Panaitopol*)

1.25. Să se calculeze cea mai mică determinare pozitivă a unghiurilor: 1978°, 1908°, 1999°, −5432°.

1.26. Să se arate că:

$E_1 = \sin(90° - a) + \sin(90° + a) + 2\cos(180° - a) = 0.$

$E_2 = \operatorname{tg}(\pi/2 + a) \cdot \operatorname{ctg}(\pi - a) + \operatorname{ctg}(\pi - a) \cdot \operatorname{tg}(\pi/2 - a) = 0.$

1.27. Să se verifice identitatea

$$(1 - \cos b \cos c)^2 - \sin^2 b \sin^2 c = (\cos b - \cos c)^2.$$

(Admitere în treapta a II-a, Sălaj, 1976)

1.28. Să se arate că

$(\operatorname{tg}^2 x + \sec^2 x)(1 + 16\operatorname{tg}^2 x \cdot \sec^2 x) = 15(\operatorname{tg}^4 x - \sec^4 x) + 16(\operatorname{tg}^6 x + \sec^6 x)$.

1.29. Să se stabilească identitatea

$E = (\operatorname{tg}^4 a - 6\operatorname{tg}^2 a + 1)\cos^4 a = 1 - 8\sin^2 a \cos^2 a.$

(Rev. Pitagora, VI, 72, *C.I.Ţ*).

1.30. Să se verifice că dacă numitorii sînt diferiţi de zero, atunci

$$E_1 = \frac{\cos^2 a + x\operatorname{ctg}^2 a}{x + \sin a} = \operatorname{ctg}^2 a,$$

$$E_2 = \frac{1 - \sin^2 a + x(1 + \sin a)}{1 + x - \sin a} = 1 + \sin a.$$

$$E_3 = \frac{2\sin^2 a \cos a + x\cos^2 a}{x + 2\sin^2 a} = \cos^2 a.$$ (G.M.B., 13 580, *C.I.Ţ.*)

1.31. Să se rezolve și să se discute natura rădăcinilor ecuației în x: $x^4 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot x^2 + 2 - 2\operatorname{tg}^2 a = 0$, unde $a \in \mathbf{R}$. (G.M.B., 14090, *C.I.Ț.*)

1.32. Să se arate că: $2(\sin^6 a + \cos^6 a) - 3(\sin^4 a + \cos^4 a) + 1 = 0$.

1.33. Se dă $\sin x \cdot \cos x = 2/5$, $x \in (0, \pi/4)$. Să se calculeze a) $\sin x + \cos x$ și $\cos x - \sin x$. b) $\sin^{2m} x + \cos^{2m} x$; $m \in \mathbf{N}$. (G.M.B., 15 713, *P.Toma*)

1.34. Să se arate că $\dfrac{\sin^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x - 2\sin^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{tg} x^2 - 1} = \sin^2 x - \cos^2 x$ unde $\operatorname{tg}^2 x \neq 1$.

1.35. Pentru care valori ale lui x din intervalul $[0,360°]$, există separat fiecare din egalitățile

$$\frac{1}{1-\operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{1-\operatorname{ctg}^2 x} = 1; \quad \frac{1}{1+\cos^2 x} + \frac{1}{1-\sec^2 x} = 1;$$

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg} 3x} + \frac{1}{1+\operatorname{ctg} 3x} = 1; \quad \frac{1}{1+\sin 5x} + \frac{1}{1+\operatorname{cos\,ec}\, 5x} = 1.$$

(G.M.B., 6021, *C.I.Ț.*)

1.36. Să se arate că dacă $a \neq k\pi/2$, $k \neq \mathbf{Z}$, atunci
$\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{cotg}^2 a + 2 = 1/\sin^2 a \cdot \cos^2 a$.

1.37. Să se arate că: $(\operatorname{tg}^2 a + 1/\operatorname{tg}^2 a + 2)\cdot\cos^2 a = 1 + 1/\operatorname{tg}^2 a$, $\operatorname{tg} a \neq 0$. (G.M.B., E: 5197, *C.I.Ț.*)

1.38. Să se arate că dacă $x \neq k\pi/2$, atunci

$$E = \frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{(1-\sin x)(1-\cos x)}{\sin x \cdot \cos x}$$ nu depinde de x.

1.39. Să se arate că dacă a și b diferă de $k\pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$, atunci

$$\frac{(1+\sin^2 a)(1+\sin^2 b)}{\cos^2 a \cos^2 b} = (1+2\operatorname{tg}^2 a)(1+2\operatorname{tg}^2 b).$$

$$\frac{3-2\sin^2 a}{1+\sin^2 a} = \frac{3+\operatorname{tg}^2 a}{1+2\operatorname{tg}^2 a} = \frac{1+2\cos^2 a}{2-\cos^2 a}.$$ (G.M.B., E: 3166, *C.I.Ț.*)

1.40. Să se arate că dacă $a \neq (2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$, atunci

$$E = \frac{\operatorname{tg} a + \sec a - (\operatorname{tg} a + \sec a)^{-1}}{\operatorname{tg} a + \sec a + (\operatorname{tg} a + \sec a)^{-1}} = \sin a.$$ (Revista Pitagora, 1938, *C.I.Ț.*)

1.41. Să se arate că dacă $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, atunci expresia $\dfrac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x}$ are totdeauna o valoare pozitivă.

1.42. Într-un triunghi echilateral ABC se iau pe laturi punctele A_1, A_2, B_1, B_2 astfel ca $\sphericalangle CBA_1 = \sphericalangle ABA_2 = \sphericalangle BAA_2 = 45°$. Să se arate că:

a) $|\overline{A_1B_1}| \sin 15° = |\overline{A_2B_2}| \sin 45° = |\overline{AB}| \operatorname{tg} 15 \sin 45°$.

b) $|\overline{A_1B_1}| = (\sqrt{3}+1)|\overline{A_2B_2}| = (\sqrt{3}-1)|\overline{AB}|$.

(G.M.B., 13072, *C.I.Ț.*)

1.43. Să se arate că pentru $x \in 0, \pi/2)$ avem
$\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \sec x + \operatorname{cosec} x > 6$. (Concurs elevi, 1975)

1.44. Să se arate că dacă $a, b \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, atunci:

$$\frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\sin^2 b} + \frac{1}{\sin^2 (a+b)} = 3 + \operatorname{ctg}^2 a + \operatorname{ctg}^2 b + \operatorname{ctg}^2 (a+b).$$

(G.M.B., 8731, *C.I.-T.*)

1.45. Să se arate că dacă $x \neq k\pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$, atunci:

$$\frac{\operatorname{tg} x - \sec x + 1}{\operatorname{tg} x - \sec x - 1} + \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{cosec} x + 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{cosec} x - 1} = 0.$$

$$\frac{\operatorname{tg} x + \sec x - 1}{\operatorname{tg} x - \sec x - 1} \cdot \frac{\operatorname{ctg} x + \operatorname{cosec} x - 1}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{cosec} x - 1} = 1.$$

1.46. Să se arate că dacă $x \neq k\pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$, atunci $\dfrac{1 + \operatorname{tg}^4 x}{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x} = \operatorname{tg}^2 x$.

1.47. Să se arate că $E = (x \sin a + \cos a + 1)(x \sin a + \cos a - 1)(x \sin a - \cos a - 1)(x \sin a - \cos a - 1) = x^4 \sin^4 a - 2(1 + \cos^2 a) \sin^2 a x^2 + \sin^4 a$. (G.M.B., E: 4067, *C.I.-T.*)

1.48. Să se arate că dacă $0 < a < \pi/2$, atunci

$$\sqrt{\sec a + \operatorname{tg} a} + \sqrt{\sec a - \operatorname{tg} a} = \sqrt{2(\sec a + 1)}.$$

$$\sqrt{\sec a + \operatorname{tg} a} - \sqrt{\sec a - \operatorname{tg} a} = \sqrt{2(\sec a - 1)}.$$ (G.M.B., E: 3652, *C.I.-T.*)

1.49. Să se arate că dacă $0 < x < \pi/2$, atunci

$$\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{1 + \operatorname{ctg} x}; \quad \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{1 - \operatorname{tg} x} + \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{1 - \operatorname{ctg} x} = 0.$$

1.50. Să se arate că dacă $x \in (0, \pi/2)$, atunci

$$\sqrt{\frac{1}{\sin x} + 1} + \sqrt{\frac{1}{\sin x} - 1} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x}};$$

$$\sqrt{\frac{1}{\cos x} + 1} + \sqrt{\frac{1}{\cos x} - 1} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\operatorname{ctg} x}}.$$ (G.M.B. E: 5141. *C.I.-T.*)

1.51. Să se elimine x din ecuațiile: $2 \sin x \cos x = m^2 - 1$; $\sin^3 x + \cos^3 x = n$.

1.52. Să se elimine x din sistemul $\sin x + \cos x = m$; $\sin^3 x + \cos^3 x = n$.

1.53. Să se elimine x între relațiile

$$\frac{\sin x}{a} + \frac{b}{\cos x} = \frac{\operatorname{tg} x}{c} + \frac{d}{\operatorname{ctg} x} = \frac{\sec x}{e} + \frac{f}{\operatorname{cosec} x},$$ unde $a, c, e \neq 0$, $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

1.54. Să se arate că dacă $x \in [0, 1]$, atunci $0 \leqslant \sqrt{1 - x^2} \cdot (1 - \sqrt{1 - x^2}) \leqslant 1/4$.

1.55. Să se arate că rădăcinile reale ale ecuației $2x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$, $m \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ sînt de forma $x_1 = \sin a$ și $x_2 = \pm \cos a$.
(G.M.B., 14071, *C.I.-Ț.*)

1.56. Să se arate că $E = \frac{a^3 + b^3}{a + b} \cdot \sin \frac{\pi}{2} - ab \cos \pi + 2ab \sin \frac{5\pi}{2} = (a + b)^2$, unde $a + b \neq 0$.

1.57. Să se arate că dacă $0° \leqslant x \leqslant 10°$, atunci
$1/4 \leqslant \sin(3x + 30°) \cos(3x - 60°) \leqslant 3/4 \leqslant \sin(3x + 60°) \cdot \cos(3x - 30°) \leqslant 1$.
(G.M.B., 11293, *C.I.-Ț.*)

1.58. Să se calculeze, fără tabele, valoarea expresiei:

$$E = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{14} + \sin^2 \frac{3\pi}{7}}{\cos^2 \frac{\pi}{14} + \cos^2 \frac{3\pi}{7}}.$$

1.59. Să se calculeze: $E = \operatorname{tg}^7 3° + \operatorname{ctg}^7 23° + \operatorname{tg}^7 177° + \operatorname{ctg}^7 157°$.

1.60. Să se rezolve ecuația în x:
$x^2 \sin^2 b - 2x(1 - \cos b \cdot \cos c) + \sin^2 c = 0$.
Caz particular $b = 2\pi/3$, $c = \pi/3$. (Admitere în treapta a II-a, Sălaj, 1976)

1.61. Să se afle valorile lui x pentru care: $\sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} + \operatorname{cosec} x + \operatorname{ctg} x = 0$.

1.62. Să se arate că dacă $0 < a < \pi/2$, atunci:

$$\sin a + \cos a > 1; \quad \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\cos a} \geqslant 2\sqrt{2}.$$

$$\cos \frac{a}{2} - \sin \frac{a}{2} > 0; \quad \operatorname{ctg} \frac{a}{2} - \operatorname{tg} \frac{a}{2} > 0.$$

1.63. Să se arate geometric că avem egalitatea:

$$\cos \frac{\pi}{11} - \cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} - \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} = \frac{1}{2}.$$

Generalizare.

1.64. Să se arate că dacă $x \neq k\pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$, atunci:

$$\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x} = \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x} \cdot \operatorname{tg}^2 x.$$

1.65. Să se afle valorile lui x din intervalul $(0, 2\pi)$ pentru care $\sqrt{1 - \cos^2 x} + \cos x \sqrt{\sec x \, x - 1} = 0$.

1.66. Dacă într-un triunghi ABC avem: $\frac{\operatorname{tg} A}{1} = \frac{\operatorname{tg} B}{2} = \frac{\operatorname{tg} C}{3}$, atunci:

$$a\sqrt{2} = b\frac{\sqrt{5}}{2} = c\frac{\sqrt{10}}{3}.$$

1.67. Să se arate că:

a) $\sqrt{(1+\operatorname{tg} x)^2 + (1-\operatorname{tg} x)^2} = \sqrt{2}\,|\sec x|$, unde $x \in \mathbf{R}$.

b) $\sqrt{(1+\operatorname{tg} x)^2 - (1-\operatorname{tg} x)^2} = 2\sqrt{\operatorname{tg} x}$, unde $x \in (0, \pi/2)$

c) $\sqrt{(1+\sin x)^2 + (1+\cos x)^2} = \sqrt{3 + 2\sqrt{1 + 2\sin x \cos x}}$, $x \in (0, \pi/2)$

d) $\sqrt{(1-\sin x)^2 + (1-\cos x)^2} = \sqrt{3 + 2\sqrt{1 + 2\sin x \cos x}}$, $x \in (0, \pi/2)$ *(C. Ionescu-Ţiu)*

1.68. Cîte valori distincte ia $\sin \frac{7k\pi}{180}$, adică $\sin (7k)°$, cînd $k \in \mathbf{Z}$.

1.69. Pornind de la relaţia $\sin x + \operatorname{tg} x = m$, unde $x \in (0, \pi/2)$, să se arate că: $\sin x + \cos x = \sqrt{2m\cos x - 2\sin x + 1}$. Să se calculeze în funcţie de m expresia:

$$E(x) = \operatorname{tg} x \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2}{\cos x} - 2\cos x.$$

1.70. a) Să se arate că $(\sin x + \cos x)^4 \geqslant 8 \sin x \cos x$.

b). În ce caz avem egalitate? Se va verifica egalitatea pentru valorile lui x cuprinse între 0 şi 2π. (G.M.F.B. 6 118, *C. Ionescu-Ţiu*)

1.71. a) Să se arate că dacă $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$, atunci:

$$\sqrt{1-\sin x} + \sqrt{1+\sin x} = \sqrt{2-2\cos x}.$$

b) Dacă $x \in [0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi]$, atunci:

$$\sqrt{1-\sin x} + \sqrt{1+\sin x} = \sqrt{2+2\cos x}.$$ (G.M.B., 14 797, *C.I.T.*)

1.72. Să se arate că oricare ar fi x real şi diferit de $k\pi/2$, (k întreg):

$$(1-\sin a)x^2 - 2x\cos a + 1 + \sin a \geqslant 0.$$

$$(1+\cos a)x^2 - 2x\sin a + 1 - \cos a \geqslant 0.$$

$$(3 + 2\cos a - 2\sin a)x^2 - 2x(\cos a + \sin a) + 1 > 0.$$

(G.M.B., 5 809, *C.I.T.*)

1.73. Să se arate că:

$$(\sqrt{1+\sin a} + \sqrt{1-\sin a})^2 + (\sqrt{1+\sin a} - \sqrt{1-\sin a})^2 = 4.$$

$$(\sqrt{1-\cos a} + \sqrt{1+\cos a})^2 + (\sqrt{1-\cos a} - \sqrt{1+\cos a})^2 = 4.$$

$$(\sqrt{1+\operatorname{tg} a} + \sqrt{1-\operatorname{tg} a})^2 + (\sqrt{1-\operatorname{tg} a} - \sqrt{1+\operatorname{tg} a})^2 = 4,\ a \in [0°, 45°)].$$

(*C.I.T.*)

1.74. Dacă $x, y \neq k\pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$, să se arate că:

$$(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y) \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 y}\right) \geqslant (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \frac{1}{\operatorname{tg} y}\right).$$

(Concurs elevi, 1975)

1.75. Să se arate că dacă A și B sînt unghiurile unui triunghi oarecare atunci: $\sin A(2 - \cos^2 B) + \sin B(2 - \cos^2 A) = (\sin A + \sin B)(1 - \sqrt{\sin^2 A + \sin^2 B + \cos^2 A \cos^2 B - 1})$. (G.M.B., 14070, Concurs elevi, 1974).

1.76. Să se arate că dacă $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, atunci:

$$E = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} = |\sec x - \operatorname{tg} x|.$$

1.77. Să se arate că dacă $x \in [0, \pi/2] \cup [\pi, 3\pi/2]$, atunci:

$$\sqrt{(1 + \cos x)(1 - \sin x)} + \sqrt{(1 + \sin x)(1 - \cos x)} = \sqrt{2}.$$

(G.M.B., 14902, *C.I.T.*)

1.78. Se dau relațiile: $a = \operatorname{tg} x \sec^2 y$; $b = \operatorname{tg} y \sec^2 x$; $c = (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y)$, unde $x, y \in (0, \pi/2)$. Să se arate că:

$$(a + b + c)\sqrt{a + b - c}\,(-a + b + c)\,(a - b + c) = 4c\sqrt{a + b + c}.$$

(R.M.F., 189, 1951, *C.I.T.*)

1.79. Să se afle valorile pozitive ale lui x mai mici ca 4π pentru care avem $\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{2(1 + \sec x)} = \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}$. De asemenea, pentru care avem: $\sqrt{1 - \operatorname{tg} x} + \sqrt{2(1 + \sec x)} = \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}$, radicalii fiind considerați cantități reale și pozitive. (G.M.F.B., 1539, *C.I.T.*)

1.80. În planul xOy sînt punctele $A(4, 3)$, $B(-1, 2)$, $C(-2, 1)$. Să se calculeze funcțiile trigonometrice sinus, cosinus și tangentă ale unghiurilor pe care razele vectoare **OA**, **OB**, **OC** le face cu Ox.

1.81. Fie P punctul de intersecție al coardelor perpendiculare între ele AB și CD duse într-un cerc de centru O. Să se arate că:

$$\mathbf{OA} + \mathbf{OB} + \mathbf{OC} + \mathbf{OD} = 2\mathbf{OP}.$$

$$\mathbf{PA} + \mathbf{PB} + \mathbf{PC} + \mathbf{PD} = \mathbf{OA} + \mathbf{CB} + \mathbf{CC} + \mathbf{CD} + 4\mathbf{IO} = 2\mathbf{PO}.$$

1.82. Se dă patrulaterul $ABCD$ și notăm cu A_1, B_1, C_1, D_1, mijloacele segmentelor $|AB|$, $|EC|$, $|CD|$, $|DA|$, iar $M = A_1C_1 \cap B_1C_1$. Să se arate că:

$$\mathbf{OA} + \mathbf{OB} + \mathbf{CC} + \mathbf{CD} = \mathbf{CA}_1 + \mathbf{CB}_1 + \mathbf{OC}_1 + \mathbf{CD}_1 = 4\mathbf{OM}.$$

$$\mathbf{MA} + \mathbf{MB} + \mathbf{MC} + \mathbf{MD} = 0;\ \mathbf{MA}_1 + \mathbf{MB}_1 = \mathbf{MC}_1\,\mathbf{MD}_1,$$

unde O este un punct carecare.

1.83. Fie A_1, B_1, C_1, mijloacele laturilor unui triunghi AEC și G centrul de greutate al triunghiului, iar O un punct carecare. Să se arate că $\mathbf{OA} + \mathbf{OB} + \mathbf{OC} = \mathbf{CA}_1 + \mathbf{CB}_1 + \mathbf{CC}_1 = 3\mathbf{CG}$; $\mathbf{GA}_1 + \mathbf{GB}_1 + \mathbf{GC}_1 = 0$.

1.84. Dacă $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ și $\mathbf{c}$ sînt trei vectori unitate (versori) care satisfac relația: $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$, să se calculeze suma $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$.

1.85. Notăm cu V un punct oarecare, iar cu G centrul de greutate al triunghiului ABC. Fie A_1, B_1, C_1 proiecțiile punctelor A, B, C respectiv pe planul dus prin V perpendicular pe VG. Să se arate că $\mathbf{VA_1} + \mathbf{VB_1} + \mathbf{VC_1} = 0$. *(C.I.T.)*

1.86. Considerăm în sistemul de axe dreptunghiulare xOy punctele $A(-4, 1)$, $B(-2, -3)$, $C(6, 1)$, $D(4, 5)$, $E(1, 1)$ și $F(5, 3)$, coordonatele lor fiind date în centimetri. Să se arate că:

a) Patrulaterul $ABCD$ este un dreptunghi a cărui arie se cere.

b) $\mathbf{AC} + \mathbf{BD} = 4\mathbf{EF}$.

c) $\mathbf{MA} - \mathbf{MB} = \mathbf{MD} - \mathbf{MC}$, unde M este un punct oarecare din plan.

d) $3 \operatorname{tg} (\sphericalangle CED) = 2 \operatorname{tg} (\sphericalangle BAC)$. (G.M., 16157, *C.I.T.*)

1.87, Fie trei vectori $\mathbf{AB} = \mathbf{c}$, $\mathbf{BC} = \mathbf{a}$ și $\mathbf{CA} = \mathbf{b}$. să se exprime cu ajutorul lui $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, și $\mathbf{c}$ vectorii $\mathbf{AM}$, $\mathbf{BN}$ și $\mathbf{CP}$, unde $|AM|$, $|BN|$ și $|CP|$ sînt medianele triunghiului ABC.

1.88. Să se determine proiecțiile pe axele de coordonate Ox, Oy, Oz ale unui vector $\mathbf{OM}$ de mărime 3, unități care se găsesc în planul format de axa Oz și bisectoarea unghiului xOy, și face cu Oz un unghi de 60°.

b) Să se determine cosinii directori ai vectorului $\mathbf{OM}$.

1.89. În triunghiul dreptunghic ABC în care $\|AB\| = 16$ dm și $\|AC\| = 12$ cm, pe ipotenuza $|BC|$ se iau punctele D, E, F și G astfe încît:

$$\|BD\| = \|DE\| = \|EF\| = \|FG\| = \|GC\|.$$

Să se calculeze $|\mathbf{AB} + \mathbf{AD} + \mathbf{AE} + \mathbf{AF} + \mathbf{AG} + \mathbf{AC}|$.

1.90. Un pentagon $ABCDE$ are ca vîrfuri punctele $A(0, 4)$, $B(1, 3)$, $C(2, -3)$, $D(-5, -1)$, $E(7, 0)$. Să se calculeze mărimea vectorului rezultant $\mathbf{OR}$:

$$\mathbf{OA} + \mathbf{OB} + \mathbf{OC} + \mathbf{OD} + \mathbf{OE} = \mathbf{OR} \text{ și } \operatorname{tg} (ROx).$$

1.91. Se dau vectorii $\mathbf{OA} = \mathbf{a}$, $\mathbf{CB} = \mathbf{b}$, $\mathbf{OC} = \frac{1}{4}(\mathbf{a} + 3\mathbf{b})$, $\mathbf{OD} = \frac{1}{4}(3\mathbf{a} + \mathbf{b})$. Să se arate că: $\mathbf{OA} + \mathbf{OB} = \mathbf{OC} + \mathbf{OD}$.

1.92. Se dă punctul $A(-3, 6)$ și vectorii $\mathbf{AB} = 5\mathbf{i}$, $\mathbf{BC} = 2\mathbf{j}$, $\mathbf{CD} = -4\mathbf{i} + \mathbf{j}$ și $\mathbf{DE} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Să se exprime vectorii de poziție $\mathbf{OA}$, $\mathbf{OB}$, $\mathbf{OC}$, $\mathbf{OD}$ și $\mathbf{OE}$ și apoi să se deducă coordonatele punctelor B, C, D și E.

1.93. Un patrulater $ABCD$ este dat prin vectorii de poziție $\mathbf{OA} = \mathbf{a}$, $\mathbf{OB} = \mathbf{b}$, $\mathbf{OC} = \mathbf{c}$, $\mathbf{OD} = \mathbf{d}$. Să se scrie vectorul $\mathbf{MN}$ care unește mijloacele laturilor $|AB|$ și $|CD|$, vectorul $\mathbf{RS}$ care unește mijloacele laturilor $|BC|$ și $|DA|$, apoi vectorul de poziție $\mathbf{OP}$, unde P este intersecția dreptelor MN și RS.

1.94. Se dă punctul $A(5, 0)$ și vectorul $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$. Să se exprime cu ajutorul lui $\mathbf{i}$ și $\mathbf{j}$ vectorii $\mathbf{OB}$, $\mathbf{OC}$, $\mathbf{OD}$ și $\mathbf{OE}$ știind că $\mathbf{AB} = \mathbf{v}$, $\mathbf{AC} = -\mathbf{v}$, $\mathbf{AD} = 2\mathbf{v}$, $\mathbf{AE} = \frac{-3}{2}\mathbf{v}$ și să se deducă coordonatele punctelor B, C, D și E.

1.95. O dreaptă d trece prin punctele $A(1, -2)$ și $B(3, 1)$. Să se calculeze punctele C, D, E de pe dreapta d definite de vectorii $\mathbf{AC} = 2\mathbf{AB}$, $\mathbf{AD} = -\mathbf{AB}$ și $\mathbf{AE} = \frac{3}{2}\mathbf{AB}$; $(\mathbf{AD} + \mathbf{AC})$; $(\mathbf{AD} -)\mathbf{AC}$.

1.96. Fie $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ mijloacele laturilor unui hexagon convex. Să se arate că triunghiurile $A_1A_3A_5$ și $A_2A_4A_6$ au același centru de greutate G. (G.M.B., 15 251, *C.I.Ț.*)

1.97. a) Într-un sistem de coordonate xOy cu vectori unitari $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ se dau punctele $A(1, 6)$, $B(-1, 9)$, $C(2, -1)$. Să se determine analitic vectorii $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BC}$, $\mathbf{CA}$; $\mathbf{AB} + \mathbf{BC} + \mathbf{CA}$.

b) Să se determine coordonatele punctului D știind că $\mathbf{CD} = \mathbf{AB}$.

1.98. Fie $|AM|$ și $|AN|$ mediana și respectiv înălțimea duse din vîrful unghiului drept A al triunghiului dreptunghi ABC ($\|AB\| > \|AC\|$).

a) Să se exprime vectorii $\mathbf{AM}$, $\mathbf{AN}$ și $\mathbf{MN}$ în funcție de vectorii $\mathbf{AC} = \mathbf{b}$ și $\mathbf{AB} = \mathbf{c}$.

b) Să se arate că dacă $4\|\mathbf{MN}\| = \sqrt{3} \cdot \|\mathbf{BC}\|$, atunci $\|BC\|^2 = 4\|AB\| \cdot \|AC\|$. (G.M.B.; 16 158, *Gh. Popescu — Lugoj*)

1.99. Să se stabilească expresia unui vector $\mathbf{OM}$, unde $M \in AB$, iar $A(x_1, y_1)$ și $B(x_2, y_2)$, iar $\|OA\| = a$ și $\|OB\| = b$, iar $n \cdot \|\mathbf{MA}\| = m \cdot \|\mathbf{MB}\|$

1.100. Fie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Să se calculeze rezultanta $\mathbf{OA} + \mathbf{OB} + \mathbf{OC} = \mathbf{OR}$.

1.101. a) Suma a trei vectori de modul egal, avînd același punct de aplicație este 0 .Precizați natura poligonului determinat de extremitățile acestor vectori.

b) Suma a patru vectori de modul egal avînd același punct de aplicație este 0 .Precizați natura poligonului determinat de extremitățile acestor vectori. (G.M., 14 385, Concurs elevi)

1.102. Se dau punctele $A(1-1, 6)$, $B(11, 1)$, $C(-18, -1)$. Să se calculeze $\cos(BAC)$ și $\sphericalangle BAC$.

1.103. Fie octogonul convex $A_1A_2 \ldots A_8$ și I_{ij} mijlocul laturii A_iA_j. Să se arate că dreptele care unesc mijloacele laturilor opuse ale patrulaterului $I_{12}I_{34}I_{56}I_{78}$ și dreptele care unesc mijloacele laturilor opuse ale patrulaterului $I_{23}I_{45}I_{67}I_{81}$ trec prin același punct G. (G.M., 15 248, *C.I.Ț.*)

1.104. Pe laturile unui triunghi oarecare ABC se iau punctele A_1, B_1, C_1, astfel încît $\frac{\|A_1B\|}{\|A_1C\|} = \frac{\|B_1C\|}{\|B_1A\|} = \frac{\|C_1A\|}{\|C_1B\|} = k$. Să se arate că segmentele $\|AA_1\|$, $\|BB_1\|$, $\|CC_1\|$, pot fi laturile unui triunghi.

1.105. Fie paralelipipedul $ABCD_1A_1B_1C_1D_1$. Se consideră vectorii $\mathbf{AB} = \mathbf{a}$, $\mathbf{AD} = \mathbf{b}$, $\mathbf{AA_1} = \mathbf{c}$. Să se exprime în funcție de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, vectorii: $\mathbf{BC}$, $\mathbf{CD}$, $\mathbf{AB_1}$, $\mathbf{AD_1}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{AC_1}$, $\mathbf{CA_1}$, $\mathbf{D_1A}$, $\mathbf{A_1B_1}$, $\mathbf{BB_1}$, $\mathbf{B_1A}$, $\mathbf{DA_1}$, $\mathbf{BD}$, $\mathbf{BD_1}$ și $\mathbf{DB_1}$.

1.106. Fie triunghiul echilateral ABC. Să se afle locul punctului M astfel încît $\mathbf{MA} \cdot \mathbf{CA} = \mathbf{MB} \cdot \mathbf{CB}$.

1.107. Notăm cu O intersecția diagonalelor unui paralelogram $ABCD$ și cu M un punct oarecare. Să se arate că $\mathbf{MA} + \mathbf{MB} + \mathbf{MC} + \mathbf{MD} = 4\mathbf{MO}$ și $\mathbf{AB} + \mathbf{AC} + \mathbf{AD} = 4\mathbf{AO}$. (G.M.B., 15 466, *C.I.Ț.*)

1.108. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Notăm cu O_1 mijlocul diagonalei $|AC|$ și cu O_2 mijlocul diagonalei $|BD|$. Dacă $4\mathbf{O_1O_2} = \mathbf{AD} - \mathbf{BC}$, atunci patrulaterul este un paralelogram. (G.M.B., 15 715, *M. Chiriță*)

1.109. În triunghiul ABC ducem mediana $|AM|$. Pe laturile $|AB|$ și $|AC|$ fie respectiv punctele D și E astfel că $\|AB\| = m \cdot \|AD\|$ și $\|AC\| = n \cdot \|AE\|$, iar $F = AM \cap DE$. Să se arate că:

$$(m+n)\mathbf{AF} = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \text{ și } m \cdot \mathbf{DF} = n \cdot \mathbf{FE}.$$ (G.M., 15 885, *C.I.Ț.*)

1.110. Pe ipotenuza $|AB|$ a triunghiului dreptunghic OAB se consideră punctele D și E astfel încît $\|AD\| < \|AE\|$. Fie F și G proiecțiile punctelor D și E pe catetele $\|OA\|$ și $\|OB\|$. Notăm L, M, N, P, R mijloacele segmentelor $|OF|$, $|FD|$, $|DE|$, $|EG|$ și $|GO|$. Să se arate că vectorii $\mathbf{ON}$, $\mathbf{PL}$, $\mathbf{MR}$ pot forma un triunghi. (G.M.B., 15 832, Concurs elevi)

1.111. Fie un patrulater convex $ABCD$. Notăm cu E, F, G, H mijloacele segmentelor $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|GE|$, iar $I = AF \cap CE$, $L = BI \cap EF$; $M = BI \cap AC$. Să se arate că: *a)* $6\,|IL| = \|MB\|$ și b) $\|DI\| = 4\|HI\|$. (*C.I.-Ț.*)

1.112. Să se arate geometric, că

$$1 + \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \cos\frac{6\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{4n\pi}{2n+1} = 0.$$ (*C.I.-Ț.*)

1.113. Fie un poligon regulat $A_1A_2 \ldots A_n$ înscris într-un cerc de centru O. Să se arate că

$$\sin(A_1OA_2) + \sin(A_1OA_2) + \ldots + \sin(A_1OA) = 0,$$

$$\operatorname{tg}(A_1OA_2) + \operatorname{tg}(A_1OA_3) + \ldots + \operatorname{tg}(A_1OA_n) = 0.$$

$$\cos(A_1OA_2) + \cos(A_1OA_n) + \ldots + \cos(A_nOA_n) = \frac{(-1)^n - 1}{2}.$$

1.114. Să se arate că perioada funcției $f(x) = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3\operatorname{tg}\frac{x}{3}$ este $T = 6\pi$.

1.115. Să se afle perioada funcției $f(x) = 3\operatorname{tg} 2x + 5\operatorname{ctg} 3x$.

1.116. Să se afle perioada funcției $f(x) = \cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{3}$.

1.117. Să se afle perioada funcției $f(x) = 3\sin x + \sin 2x$.

1.118. Să se determine perioadele funcțiilor:

a) $f(x) = \sin\frac{3x}{4}$. c) $f(x) = \cos\frac{2x}{5}$.

b) $g(x) = \operatorname{ctg}(4x + \pi/6)$. d) $g(x) = \operatorname{tg}(3x + \pi/4)$.

1.119. Să se afle perioada funcției $f(x) = |\sin x|$.

1.120. Să se afle perioada funcției: $f(x) = \sin\frac{\pi x}{3} + \sin\frac{\pi x}{4}$.

1.121. Să se afle perioada funcției $f(x) = \sin(2\pi x) + \pi/3) + 2\sin(3\pi x + \pi/4) + 3\sin 5\pi x$.

1.122. Să se afle perioada funcției: $f(x) = |\sin|x||$.

1.123. Să se arate că funcția reală $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$ are perioada π.

1.124. Să se arate că funcția $f(x) = \sin\sqrt{x}$ nu este periodică. (Idem, pentru $g(x) = \cos\sqrt{x}$).

1.125. Să se afle perioada funcției $f(x) = m\sin(ax + b) - n\cos(2ax + c)$, $m, n, a, b, c \in \mathbf{R}$.

1.126. Să se arate că funcția $f(x) = -3x\sin 2x + 2x^2\sin|x| + x\operatorname{tg} 3x$ este o funcție pară.

1.127. Să se arate că funcția $f(x) = 2\operatorname{tg} x - 3\sin(-x) - \operatorname{ctg} 2x + \cos\left(90° - \frac{x}{2}\right)$ este o funcție impară.

1.128. Să se arate că funcția: $f(x) = \sin x + \cos x$ nu este nici pară, nici impară.

1.129. Să se arate că funcțiile $f(x) = 1 + \sin x$ și $g(x) = 1 - \cos(30° + x)$ nu sînt pare, nici impare.

1.130. Să se arate că funcția

$$f(x) = 1 - 2\sin(\pi/6 + |x|) + 3\cos|x| - |\operatorname{tg}|2x|| + \arccos\left|-\frac{x}{2}\right|$$

este o funcție pară.

1.131. Să se reprezinte grafic funcția $x = \frac{1}{2}\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$.

1.132. Să se reprezinte graficul funcției $f(x) = 3\sin 2x - 1$.

1.133. Să se arate că dacă $\sqrt{\sin^2 x} + \sqrt{\cos^2 x} = 1$, atunci

a) $(\cos x|\cos x| + \sin x|\sin x| - 1)^2 \subset \{0, 4\}$.

b) $(\cos x|\sin x| + \sin x|\cos x| - 1)^2 = 1$. (G.M.B., 11099, *C.I.T.*)

1.134. Să se afle valorile lui x pentru care

$E_1 = \operatorname{tg} x + |\operatorname{tg} x| = 0$; $E_2 = \operatorname{tg} x - |\operatorname{tg} x| = 0$;

(G.M.F.B., 3 988, 1960, *C.I.T.*)

1.135. a) Să se arate că dacă $x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$, atunci

$$\frac{1 - \sin x}{1 - \operatorname{tg} x} = \frac{1 - \cos x}{1 - \operatorname{ctg} x} = 1$$

b) dacă $x \neq \frac{k\pi}{2}$; $k \in \mathbf{Z}$ atunci

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{(1 - \sin x)(1 - \cos x)}{\sin x \cos x} = 1.$$

1.136. Să se arate că dacă $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, atunci

$$\frac{\frac{1 \pm \sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 \pm \sin x}}{\frac{1 \pm \cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 \pm \cos x}} = \operatorname{tg} x. \qquad \text{(S.G.M., 1, 1947, } C.I.Ț.\text{)}$$

1.137. Să se arate că

$$\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}\right)}{\cos\left(\frac{k\pi}{4} + \frac{5\pi}{16}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{3k\pi}{4} + \frac{7\pi}{16}\right)}{\sin\left(\frac{3k\pi}{4} + \frac{3\pi}{16}\right)}; \; k \in \mathbf{Z} \text{ (G.M.B., 12 993, } C.I.Ț.\text{)}$$

1.138. Să se arate că dacă $x \neq k\pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$, atunci

$$\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} = \frac{1 + \cos x}{\cos x + \operatorname{ctg} x}.$$

1.139. Fie funcțiile

f: $\{k\pi, 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \; k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$.

g: $\{k\pi, 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \; k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \sin 2x$

Să se arate că funcțiile f și g sînt egale.

1.140. Să se arate că dacă $n \geqslant 21/4$, atunci $\cos\frac{\pi}{n} > 1 - \frac{1}{1+n}$.

1.141. Să se arate că ecuația $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$, admite rădăcinile $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$, $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8}$ și $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}$. (G.M.B., 9 008, $C.I.Ț.$)

1.142. Fie A_1, B_1, C_1, picioarele bisectoarelor unui triunghi ABC dreptunghic în A, iar D punctul de intersecție al dreptelor B_1C_1 și BC. Să se arate că:

$$\| AB_1 \| = \| B_1C \| \cdot \cos B \text{ și } \| BD \| = \| DC \| \cdot \operatorname{tg} C.$$

(S.G.M., 7, 1948, $C.I.Ț.$)

1.143. Fără a utiliza tabele să se arate că avem $\cos\frac{\pi}{5} > \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$.

1.144. Să se afle mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $\operatorname{tg} a = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$, unde $a \in (0, \pi/4)$.

1.145. a) Să se arate că ecuația $4x^3 - 12x^2 + 9x - 2 = 0$, are rădăcinile: $x = 2\cos^2\frac{k\pi}{3}$, unde $k = 1, 2, 3$.

b) Ecuația $4x^3 - 12x + 9x = 0$, are rădăcinile $x = \cos^2\frac{(2k-1)\pi}{6}$, unde $k = 1, 2, 3$. (*C.I.Ț.*)

1.146. a) Să se arate că dacă $x \in [0, \pi/2]$, atunci $0 \leqslant \cos x(1 - \cos x) \leqslant 1/4$.

b) Să se arate că dacă $x \in [0, 1]$, atunci $0 \leqslant \sqrt{1-x^2}\,(1 - \sqrt{1-x^2} \leqslant 1/4$. (G.M.B., 13665, *C.I.Ț.*)

1.147. Se dau vectorii $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ și $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, unde $\mathbf{i}$ și $\mathbf{j}$ sînt vectorii unitate dirijați respectiv pe axele de coordonate Ox și Oy. Să se calculeze: $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$; $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{e} = 3\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$.

1.148. Se dau vectorii: $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 4j$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$; $\mathbf{c} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$. Să se calculeze $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$, $\|\mathbf{c}\|$ și $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$.

1.149. Într-un cerc se duce diametrul $|AB|$ și două coarde egale $|CC_1|$ și $|DD_1|$ perpendiculare pe AC. Să se afle suma vectorilor $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{AC_1}$, $\mathbf{AD}$, $\mathbf{AD_1}$.

1.150. Se dau punctele $A(-2, 3)$ și $B(3, 5)$. Să se calculeze unghiurile formate pe vectorul $\mathbf{AB}$ și vectorii de poziție ai punctelor A și B.

1.151. Se consideră punctele A, B, C, D. Să se arate că $\mathbf{DA} \cdot \mathbf{BC} + \mathbf{DB} \cdot \mathbf{CA} + \mathbf{DC} \cdot \mathbf{AB} = 0$ și analoagele.

1.152. Într-un triunghi oarecare ABC ducem mediana AD. Să se arate vectorial că $\|AB\|^2 + \|AC\|^2 - \frac{\|BC\|^2}{2} = 2\,\|AD\|^2$.

1.153. Să se verifice cu ajutorul produsului scalar că vectorii $\mathbf{r}_1 = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ și $\mathbf{r}_2 = b\mathbf{i} - a\mathbf{j}$ sînt perpendiculari.

1.154. Fie punctele $A(-3, 4)$, $B(-9, -4)$, $C(3, -4)$. Să se calculeze lungimile laturilor triunghiului ABC, lungimile $\|OA\|$, $\|OB\|$, $\|OC\|$ și $\cos(AOx)$, $\cos(BOx)$, $\cos(COx)$.

1.155. Se dau vectorii $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ precum și vectorii $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ definiți astfel $\mathbf{u} = \mathbf{a}(\mathbf{bc}) - \mathbf{b}(\mathbf{ca})$; $\mathbf{v} = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab})$; $\mathbf{w} = \mathbf{c}(\mathbf{ba}) - \mathbf{a}(\mathbf{bc})$. Să se arate că dacă $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ formează un triunghi, atunci și vectorii $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{v}$ formează un triunghi asemenea cu primul. (G.M., 16185, *M. Chiriță*)

1.156. În patrulaterul $A_1A_2A_3A_4$ notăm cu B_1, B_2, B_3 B_4 respectiv mijloacele segmentelor $|A_1A_2|$, $|A_2A_3|$, $|A_3A_4|$, $|A_4A_1|$, iar $I = |B_1B_3| \cup |B_2B_4|$ și fie M un punct din plan, exterior patrulaterului. Să se arate că

$$\sum_{i=1}^{4} \mathbf{MA}_i = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{MB}_i = 4\mathbf{MI}.$$ (G.M.B., 15 205, *C.I.Ț.*)

1.1. $A = 1{,}21 \text{ dr} = 1{,}21 \times 90° = (108{,}90)° = 108° + \left(\frac{9}{10} \cdot 60\right) =$

$= 108°, 54'$, grade sexagesimale.

$A = 1{,}21\text{dr} = 1{,}21 \times 100 = 121^g$ grade centesimale.

$A = 1{,}21 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1{,}21 \cdot 3{,}1416}{2} = 1{,}9$ radiani.

1.2. Avem $n^0 = \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi} = \frac{180°}{3{,}1416} = 57°17'44''$. Operația se face astfel:

$$\begin{array}{l|l} 1800000° & 31416 \\ 157080 & \overline{57°} \\ 229200 & \\ 219912 & \\ 9288 & \end{array}$$

$9228 \times 60 = 557\,280.$

. . . . . .

$$\begin{array}{l|l} 557280' & 31416 \\ 31416 & \overline{17'} \\ 243120 & \\ 219912 & \\ 23208 & \end{array}$$

$$\frac{23208 \times 60}{31416} \approx 44.$$

1.3. $\frac{57°17'44'' \times 100}{90} = 63^g, 66172.$

1.4. Avem $\sphericalangle x = \frac{23}{17} \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{23 \cdot 180°}{17 \cdot 3{,}1416} = \frac{41\,400}{43{,}407}$ $95°22'34''$.

1.5. $\alpha = \frac{180° \times 5\pi/7}{\pi} = \frac{900°}{7} = 128°34'17''.$

$\beta = \frac{0{,}73895 \times 180}{\pi} = \frac{133{,}011}{3{,}1416} \approx 42°20'18'',4.$

1.6. Fie n unghiul în radiani. Avem $n = \frac{\text{arc } AB}{r} = \frac{6{,}396}{8} = 0{,}7995$ radiani.

Fie $n°$ unghiul în grade sexagesimale. Avem

$n° = \frac{\text{arc } AB}{r} \cdot \frac{180°}{3{,}1416} = 0{,}7995 \times 57°17'44'' = 45°48'28''.$

1.7. Arc $\widehat{AB} = \frac{\pi r n°}{180°} = \frac{3{,}14 \times 6 \times 54°30'12''}{180°}$.

Dar $50°30'12'' = [(54 \times 60 + 30) \times 60 + 12]'' = 196\,212''$.

$180° = 180 \times 60 \times 60 = 648\,000''$.

Deci $l = \frac{3{,}14 \times 6 \times 196\,212}{648\,000} = \frac{3{,}14 \times 32{,}702}{18} = 5{,}704$ dm.

1.8. Din momentul în care ambele ace arată ora 12 și pînă ce amîndouă acele se vor suprapune iar la ora 12, se fac 11 întîlniri, adică suprapuneri. Rezultă că unghiul cerut este: $\frac{360^\circ}{11} = 32^\circ 43' 38'' \text{ și } \left(\frac{2}{4}\right)''$.

De asemenea, unghiul parcurs de minutar este

$$360^\circ + 32^\circ 43' \left(38\frac{2}{11}\right)'' = 392^\circ 43' \left(38\frac{2}{11}\right)''.$$

Timpul respectiv, dacă ceasul merge precis, este:

$$\frac{12\text{ h}}{11} = 1^\text{h}\ 5^\text{m}\left(27\frac{3}{11}\right)\text{ s}.$$

1.9. De la ora 3, cînd orarul arăta ora 3, el a mai parcurs unghiul x măsurat în radiani, iar minutarul care era la cifra 12, a parcurs un unghi $y = x + 1$. Relația între x și y mai este $y = 12x$, Rezultă $12x = x + 1$ sau $11x = 1$. Orarul parcurge într-o oră $2\pi/12$ radiani, iar pentru $x = 1/11$, timpul t este $t = \frac{1}{11} : \frac{2\pi}{12} = \frac{6}{11\pi}$ ore. Luînd pentru $1/\pi = 0{,}3183098$ obținem

$$t = \frac{6 \times 0{,}3183098}{11} = \frac{1{,}9098588}{11} = 0^\text{h}10^\text{m}24^\text{s},\ 90.$$

1.10. De la ora 12 minutarul a parcurs un unghi de $\frac{360^\circ}{60} \cdot 40 = 240^\circ$, iar orarul a parcurs $\frac{240^\circ}{12} = 20^\circ$ deoarece merge de 12 ori mai încet. Rezultă că unghiul cerut este de $240^\circ - 20^\circ = 220^\circ$. Fie x unghiul măsurat în grade centesimale. Atunci

$$x = \frac{220^\circ}{360} \cdot 400 = \frac{2200}{9} = 244^\circ, 444 \ldots$$

Fie y măsura uhghiului în radiani. Atunci

$$y = \frac{2\pi}{360} \cdot 220 = \frac{11}{9} \text{ radiani}.$$

1.11. Lungimea $\widehat{AB} = \frac{40\,000}{360^\circ} \cdot 3^\circ 15' = 361{,}111111$ (km).

1.12. Meridianul terestru este considerat ca un cerc; dacă L este lungimea lui, lungimile arcelor de 1°, de 1′ și 1″ sînt:

$$1^\circ = \ldots \frac{L}{360};\ 1' = \ldots \frac{L}{360 \cdot 60'};\ 1'' = \ldots \frac{L}{360 \cdot 60 \cdot 60}.$$

Lungimea arcului de latitudine 44°25′ este și distanța de ecuator:

$$d_1 = 44 \cdot \frac{L}{360} + 25 \cdot \frac{L}{360 \cdot 60} = \frac{L}{360}\left(44 + \frac{25}{60}\right) = \frac{533}{4\,320} \cdot L = 4\,936{,}314 \text{ km}.$$

Distanța orașului București de tropicul de nord care are latitudinea 23°27'29'', în grade, este 44°25'—23°27'20'' = 20°57'40'', iar raportată la lungimea meridianului este

$$20 \cdot \frac{L}{360} + 57\,\frac{L}{360 \cdot 60} + 40 \cdot \frac{L}{360 \cdot 60 \cdot 60} \cdot$$

$$d_2 = \frac{L}{360}\left(20 + \frac{57}{60} + \frac{40}{3\,600}\right) = \frac{3\,773}{64\,800} \cdot L = 2\,329{,}545 \text{ km}.$$

1.13. Roata cu 36 dinți va face mai multe rotații pe minut decît roata cu 90 dinți, adică va face $\frac{90}{36} \cdot 200 = 500$ rotații pe minut. Într-o secundă va face $\frac{500}{60} = \frac{25}{3}$ rotații (ture) pe secundă adică $\frac{25 \times 2\pi}{3} = \frac{50}{3}\pi$ rad/s.

Viteza, în grade sexagesimale pe secundă, este: $v = \frac{50 \times 360}{3 \times 60} = 100°$ (grade sexagesimale) pe secundă

În grade centesimale viteza este $\frac{100 \times 100}{90} = 111\frac{1}{9}$ grade centesimale pe secundă.

1.14. Fie n_1, n_2, n_3, n_4 și n_5 numărul de ture pe minut al celor cinci roți dințate. Avem $\frac{Z_1}{\frac{1}{n_1}} = \frac{Z_2}{\frac{1}{n_2}} = \frac{Z_3}{\frac{1}{n_3}} = \frac{Z_4}{\frac{1}{n_4}} = \frac{Z_5}{\frac{1}{n_5}}$ sau $Z_1 n_1 = Z_2 n_2 = Z_3 n_3 = 30 \cdot 100 = Z_4 n_4 = Z_4 Z_5$.

Deci $n_1 = \frac{3\,000}{60} = 50$ ture/minut; $n_5 = \frac{3\,000}{300} = 10$ ture/minut

Viteza $\omega_5 = \frac{10 \cdot 2\pi}{60} = \frac{\pi}{3}$ rad/s.

1.15. Pe hartă 1 mm reprezintă 50 000 mm = 50 m. Panta cerută este deci 20/50 = 2/5 = 0,4 = tg α sau în procente este 40%, deoarece 20/50 = 40/100. Dacă tg α = 1/15, atunci 1/15 = 20/x, unde x este distanța reală în metri între două curbe de nivel, dar pe hartă distanța între cele două curbe de nivel este $\frac{1\,000\,x}{50\,000} = \frac{x}{50}$ mm însă $x = 20 \times 15 = 300$, deci $d = \frac{300}{50} = 6$ mm.

1.16. $\sin^3 x\left(1 + \frac{\cos x}{\sin x}\right) + \cos^3 x\left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right) = \sin^3 x + \sin^2 x \cdot \cos x + \cos^3 x + \cos^2 x + \cos^2 x \cdot \sin x = \sin^2 x\ (\sin x + \cos x) + \cos^2 x(\cos x + \sin x) = (\sin x + \cos x) \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin x + \cos x$.

1.17. Avem $\frac{1}{(1-a)^2} - \frac{1}{(1+a)^2} = \frac{4a}{(1-a^2)^2}$; $E_1 = \frac{4 \sin x}{\cos^4 x} \cdot \frac{\sin^4 x}{4 \cos x} = \text{tg}^5 x$.

1.18. Se înlocuiește totul în funcție de $\sin a$ și $\cos a$.

1.19. Folosim relația $\frac{1}{(1-a)^3} - \frac{1}{(1+a)^3} = \frac{6a+2a^3}{(1-a^2)^3}$, de unde

$$\frac{6\cos x + 2\cos^3 x}{\sin^6 x} \cdot \frac{\cos^6 x}{6\sin x + 2\sin^3 x} = \frac{(3+\cos^2 x)\cos^7 x}{(3+\sin^2 x)\sin^7 x}.$$

1.20. Fie A și B centrele a două sfere vecine și O centrul inelelor. Avem $\sphericalangle AOB = 2\pi/n$. Notăm cu ρ raza unei bile. Atunci

$$\frac{\rho}{r+\rho} = \sin\frac{\pi}{n}, \quad \rho = \frac{r\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}, R = \frac{\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)r}{1-\sin\frac{\pi}{n}},$$

1.21. O bilă tangentă la suprafața interioară a torului are punct de tangență, pe un cerc mare al ei. Planul cercului descris de centrul cercului de rază r, pe care-l numim plan ecuatorial, taie torul după două cercur concentrice ecuatoriale, iar bilele după cercuri mari. Să considerăm două bile vecine de centre O_1 și O_2 și fie T punctul lor de tangență. Planul tangent comun acestor două bile este tăiat de planul ecuatorial după o tangentă, care fiind perpendiculară pe mijilcul segmentului $|O_1O_2|$, trece prin O.

Raza unei bile este r; $\sphericalangle O_1OO_2 = 2\pi/n$; $\sphericalangle O_1OT = \pi/n$; $r = O_1T = R = \sin\frac{\pi}{n}$, iar $\rho = OT = R\cos\frac{\pi}{n}$.

1.22. Unghiul la centru sub care se vede latura unui poligon este $2\pi/n$. Pentru poligonul înscris $\frac{l_n}{2} = R\sin\frac{\pi}{n}$, $a_n = R\cos\frac{\pi}{n}$, iar aria $A_n = \frac{nl_n a_n}{2} = nR^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$.

Pentru poligonul circumscris avem

$$\frac{l'_n}{2} = R\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{n};\ a'_n = R;\ \text{aria } A'_n = \frac{nl'_n a'_n}{2} = nR^2\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}.$$

$A'_n > A_n$, deci $\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} > \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$ sau $1 > \cos^2\frac{\pi}{n}$.

$$\frac{A'_n}{A_n} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{n}}.$$

Raportul perimetrelor este $\frac{nl'_n}{nl_n} = \frac{l'_n}{l_n} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}$.

1.23. Avem a) $1 + A^2 = 1 + \dfrac{1-2\cos x+\cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{2(1-\cos x)}{\sin^2 x} =$

$= \dfrac{2}{1+\cos x}$. Analog $1 + B^2 = \dfrac{2}{1+\sin x}$. Înlocuind obținem $\dfrac{A^2}{(1+A^2)^2} +$

$+ \dfrac{B^2}{(1+B^2)^2} = \dfrac{\sin^2 x}{4} + \dfrac{\cos^2 x}{4} = \dfrac{1}{4}$.

b) Obținem $1-A^2 = \dfrac{2\cos x}{1+\cos x}$; $1-B^2 = \dfrac{2\sin x}{1+\sin^2}$.

Prima parte a egalității devine $\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{4} + \dfrac{\operatorname{ctg}^2 x}{4} + \dfrac{1}{2}$ sau $\left(\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}{2}\right)^2$

care este mai mare ca 1 deoarece $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} \geqslant 2$;

$(1 - \operatorname{tg} x)^2 \geqslant 0$, evident.

1.24. $\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x} = \sqrt{(1-\cos^2 x)^2 + 4\cos^2 x} +$

$+ \sqrt{(1-\sin^2 x)^2 + 4\sin^2 x} = \sqrt{1 + 2\cos^2 x + \cos^4 x} + \sqrt{1 + 2\sin^2 x +}$

$+ \sin^4 x) = \sqrt{1+\cos^2 x)^2} + \sqrt{(1+\sin^2 x)^2} = 1 + \cos^2 x + 1 + \sin^2 x = 3.$

1.25. $1978° = 5 \cdot 360° + 178°$; $1908° = 5 \cdot 360° + 108°$;

$1999° = 5 \cdot 360° + 199°$; $-5432° = -360+° \cdot 15 - 32 \Rightarrow 360° - 32° = 378°$

1.26. $E_1 = \cos a + \sin(90° - a) - 2\cos a = \cos a + \cos a - 2\cos a = 0$,

$E_2 = -\operatorname{tg}(\pi/2 - a) \cdot (-\operatorname{ctg} a) - \operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{ctg} a = \operatorname{ctg}^2 a - \operatorname{ctg}^2 a = 0.$

1.27. Avem $\sin^2 b \cdot \sin^2 c = (1 - \cos^2 b) \cdot (1 - \cos^2 c) = 1 - \cos^2 b -$

$- \cos^2 c + \cos^2 b \cdot \cos^2 c$. Relația din enunț devine

$1 + \cos^2 b \cdot \cos^2 c - 2\cos b \cos c - 1 + \cos^2 b + \cos^2 c - \cos^2 b \cdot \cos^2 c =$

$= \cos^2 b + \cos^2 c - 2\cos b \cdot \cos c$, care este identitate.

1.28. Notăm $\operatorname{tg}^2 x = a$ și deci $\sec^2 x = 1 + a$. Relația devine succesiv

$(1 + 2a) \cdot [1 + 16a(a1 + a)] = 15[a^2 - (1 + a)^2] + 16[a^3 + (1 + a)^3]$; sau

$1 + 16a + 16a^2 + 2a + 32a^2 = -15 + 30a - 32a^3 + 48a + 6$, care este evidentă.

1.29. Folosim relațiile $\operatorname{tg} a = \dfrac{\sin a}{\cos a}$ și $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$.

$$E = \frac{\sin^4 a \cos^4 a}{\cos^4 a} - \frac{\sin^2 a \cdot \cos^2 a}{\cos^2 a} + \cos^4 a = \sin^4 a + \cos^4 a - 6\cos^2 a \cdot$$

$\cdot \sin^2 a = \sin^4 a + \cos^4 a + 2\sin^2 a \cos^2 a - 8\sin^2 a \cos^2 a = (\sin^2 a + \cos^2 a) -$

$- 8\sin^2 a \cdot \cos^2 a = 1 - 8\sin^2 a \cdot \cos^2 a.$

1.30. Avem $E_1 = \dfrac{\cos^2 a(x + x\sin^2 a)}{\sin^2 a(x + \sin^2 a)} = \operatorname{ctg}^2 a;$

$$= \frac{1 - \sin^2 a + x(1 + \sin a)}{1 + x - \sin a} \quad \frac{(1 + \sin a) \cdot (1 - \sin a + x)}{1 - \sin a + x} = 1 + \sin x.$$

$$E_3 = \frac{\cos^2 a(2\sin^2 a + x)}{x + 2\sin^2 a} = \cos^2 a.$$

1.31. Avem $x^2 = \sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 2 + 2\operatorname{tg}^2 a} = \sqrt{2} \pm \sqrt{2}\operatorname{tg}^2 a = \sqrt{2}\,(1 \pm \pm |\operatorname{tg} a|)$.

Discuție. $\operatorname{tg}^2 a > 1$ ecuația dată are numai două rădăcini reale, (două complexe). Dacă $\operatorname{tg}^2 a \leqslant 1$, ecuația are toate cele patru rădăcini reale.

Dacă $\operatorname{tg}^2 a > 1 = a \in (45°, 90°) \cup (90°, 135°) \cup (225°, 270°) \cup (270°, 315°)$.

Dacă $\operatorname{tg}^2 a \leqslant 1 \Rightarrow a \in [0, 45°] \cup (45°, 90°) \infty [135°, 225] \cup [375°, 360°]$.

1.32. $(\sin^2 a + \cos^2 a)^3 = \sin^6 a + \cos^6 a + 3\sin^2 a \cos^2 a(\sin^2 a + \cos^2 a)$.

$\sin^6 a + \cos^6 a = 1 - 3\sin^2 a \cos^2 a$.

$\sin^4 a + \cos^4 a = 1 - 2\sin^2 a \cos^2 a$.

$2 - 6\sin^2 a \cos^2 a - 3 + 6\sin^2 a \cos^2 a = -1$.

1.33. Avem $\sin x \cdot \cos = 2/5$ cu $x \in (0, \pi/4)$.

La relația din enunț înmulțită cu 2 atașăm relația cunoscută $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Aceste două relații se adună și apoi se scad și se obține $(\sin x + \cos x)^2 = 9/5$, $(\cos x - \sin x)^2 = 1/5$, de unde rezultă $\sin x + \cos x = 3/\sqrt{5}$ (1) și $\cos x - \sin x = 1/5$ (2), (s-a ținut cont de faptul $x \in (0, \pi/4)$ și că pe acest interval $\cos x > \sin x$). b) Din relațiile (1) și (2) putem determina pe $\sin x$ și pe $\cos x$; $\sin x + \cos x = 3/\sqrt{5}$; $\cos x - \sin x = 1/\sqrt{5}$, care prin adunare și scădere ne dau $\sin x = 1/\sqrt{5}$ și $\cos x = 2/\sqrt{5}$. Introducînd valorile lui $\sin x$ și $\cos x$ în relația cerută obținem

$$E = (2/\sqrt{5})^{2m} + (1/\sqrt{5})^{2m} = (4^m + 1)/5^m.$$

1.34. În ipoteza că $\operatorname{tg}^2 x - 1 \neq 0$ avem

$$\frac{\sin^2 x \operatorname{tg} x^2 - \sin^2 x - \sin^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \frac{\sin^2 x(\operatorname{tg}^2 x - 1)}{\operatorname{tg}^2 x - 1} -$$

$$- \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \sin^2 x - \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \sin^2 x - \cos^2 x.$$

1.35. Avem $\dfrac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 1$ cu condiția $\operatorname{tg}^2 x \neq 1$, deci $x \neq 45°, 135°, 225°, 315°$.

Pentru a doua egalitate, $\cos 2x \neq 1$, deci $x \neq 0°, 90°, 180°, 270°$.

Pentru a treia ecuație avem $\operatorname{tg} 3x \neq -1$ și deci pentru $k \in \mathbf{Z}$, $3x \neq 180°k + 135°$, $x \neq 60°k = 45°$ sau $x \neq 45°, 105°, 165°, 225°, 285°, 345°$.

Pentru a patra egalitate, $\sin 5x \neq -1$ de unde $5x \neq 360°k + 270°$ deci $x \neq 54°, 128°, 190°, 262°, 334°$.

1.36. Avem $\operatorname{tg}^2 a + \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 a} + 2 = \left(\operatorname{tg} a + \dfrac{1}{\operatorname{tg} a}\right)^2 = \left(\dfrac{\sin a}{\cos a} + \dfrac{\cos a}{\sin a}\right)^2 =$

$$= \left(\frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\cos a \cdot \sin a}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 a \cdot \cos^2 a}.$$

1.37. Ţinem seama de relaţiile $\cos^2 a = 1/\sec^2 a = 1/(1 + \operatorname{tg}^2 a)$; $\operatorname{tg}^2 a + 1/\operatorname{tg}^2 a + 2 = (\operatorname{tg} a + 1/\operatorname{tg} a)^2$. Prima parte a egalităţii devine

$$\left(\operatorname{tg} a + \frac{1}{\operatorname{tg} a}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 a} = \frac{(\operatorname{tg}^2 a + 1)^2}{\operatorname{tg}^2 a} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 a} = \frac{\operatorname{tg}^2 a + 1}{\operatorname{tg}^2 a} = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}_2 a} \cdot$$

1.38. Avem

$$E = \frac{\sin x \cdot \cos a(\cos a + \cos^2 x + \sin x + \sin^2 x) + (1 - \sin^2 x)(1 - \cos^2 x)}{(1 + \sin x)(1 + \cos x) \cdot \sin x \cdot \cos x} =$$

$$= \frac{\sin x \cdot \cos x(\cos x + \sin x + 1 + \sin x \cdot \cos x)}{(1 + \sin x)(1 + \cos x) \cdot \sin x \cdot \cos x} = 1.$$

1.39. 1°. Avem $\dfrac{1 + \sin^2 a}{\cos^2 a} = \dfrac{\cos^2 a + \sin^2 a + \sin^2 a}{\cos^2 a} = \dfrac{\cos^2 a + 2 \sin a}{\cos^2 a} =$

$= 1 + 2 \operatorname{tg}^2 a$. Deci şi $\dfrac{1 + \sin^2 b}{\cos^2 b} = 1 + 2 \operatorname{tg}^2 b$. Înmulţind parte cu parte aceste două egalităţi obţinem egalitatea din enunţ.

2°. $\dfrac{3 - 2 \sin^2 a}{1 + \sin^2 a} + \dfrac{1 + 2 \sin^2 a + 2 \cos^2 a - 2 \sin^2 a}{1 + 1 - \cos^2 a} = \dfrac{1 + 2 \cos^2 a}{2 - \cos^2 a}$.

1.40. Avem succesiv

$$E = \frac{\dfrac{\sin a + 1}{\cos a} - \dfrac{\cos a}{1 + \sin a}}{\dfrac{\sin a + 1}{\cos a} + \dfrac{\cos a}{1 + \sin a}} = \frac{\sin^2 a + 2 \sin a + 1 - \cos^2 a}{\sin^2 a + 2 \sin a + 1 + \cos^2 a} =$$

$$= \frac{\sin^2 a + 2 \sin a + 1 - 1 + \sin^2 a}{2(1 + \sin a)} = \frac{2 \sin a(1 + \sin a)}{2(1 + \sin a)} = \sin a.$$

1.41. Expresia din enunţ, se poate scrie succesiv

$$E = \frac{\sin x + \sin x/\cos x}{\cos x + \cos x/\sin x} = \frac{\sin x \cdot (1 + 1/\cos x)}{\cos x \cdot (1 + 1/\sin x)} = \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x} > 0.$$

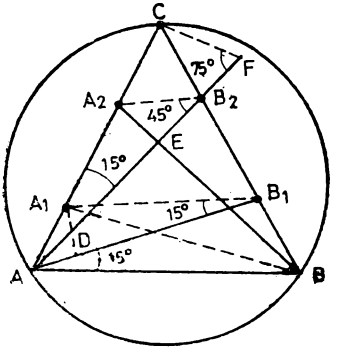

Fig. 1.42

1.42. Avem $\|AA_1\| = \|A_2C\| = \|A_2B_2\| = \|CB_2\|$; Ducem $|A_1D| \perp AB_1$, $|A_2E| \perp AB_2$ şi $|CF| \perp AC$. Avem $\|A_1D\| = \|A_1B_1\| \cdot \sin 15°$; $\|A_2E\| = \|A_2B_2\| \cdot \sin 45°$; $\|A_2B_2\| = \|CF\| = \|AC\| \cdot \operatorname{tg} 15° = \|AB\| \cdot \operatorname{tg} 15°$; $\|A_2B_2\| \cdot \sin 45° = \|AC\| \cdot \operatorname{tg} 15° \cdot \sin 45° = \|AB\| \cdot \operatorname{tg} 15° \cdot \sin 45°$.

1.43. Avem $\sin x + \operatorname{cosec} x = \sin x + 1/\sin x \geqslant 2$, egalitate pentru $x = \pi/2$. $\cos x + \sec x = \cos x + 1/\cos x \geqslant 2$, egalitate pentru $x = 0$. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} x + 1/\operatorname{tg} x \geqslant 2$, egalitate numai pentru $x = \pi/4$, dar $0 \neq \pi/4 \neq \pi/2$, deci nu putem avea în toate cazurile egalitate.

1.44. $1/\sin^2 x = \operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$. Deci

$$\frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\sin^2 b} + \frac{1}{\sin^2 (a+b)} = 1 + \operatorname{ctg}^2 a + 1 + \operatorname{ctg}^2 b + 1 + \operatorname{ctg}^2 b +$$

$$+ \operatorname{ctg}^2 (a+b) = 3 + \operatorname{ctg}^2 b + \operatorname{ctg}^2 b + \operatorname{ctg}^2 (a+b).$$

1.45. $\dfrac{\operatorname{tg} x - \sec x + 1}{\operatorname{tg} x - \sec x - 1} = \dfrac{\dfrac{\sin x - 1 + \cos x}{\cos x}}{\dfrac{\sin x - 1 - \cos x}{\cos x}} = \dfrac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x - 1}.$

$$\cdot \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{cosec} x + 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{cosec} x - 1} = \frac{\dfrac{\cos x - 1 + \sin x}{\sin x}}{\dfrac{\cos x + 1 - \sin x}{\sin x}} = -\frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x - 1}.$$

Analog, pentru a doua egalitate, avem

$$\frac{\sin x + 1 - \cos x}{\sin x - 1 - \cos x} \cdot \frac{\cos x + 1 - \sin x}{\cos x - 1 - \sin x} = 1.$$

1.46. Avem $1 + \operatorname{tg}^4 x = (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x)\operatorname{tg}^2 x$.

1.47. $E = [(x \sin a + \cos a)^2 - 1] \cdot [(x \sin a - \cos a)^2 - 1] = (x^2 \sin^2 a + \cos^2 a - 1)^2 - (2x \sin a \cos a)^2 = (x^2 \sin^2 a - \sin^2 a)^2 - 4x^2 \cdot \sin^2 a \cdot \cos^2 a = x^4 \sin^4 a + \sin^4 a - 2x^2 \sin^2 a(\sin^2 a + 2\cos^2 a) = x^4 \sin^4 a - 2(1 + \cos^2 a)\sin^2 a \cdot x^2 + \sin^4 a$.

1.48. Avem $\sec a > \operatorname{tg} a > 0$, deci radicalii exprimă numere reale și pozitive. Ridicăm la pătrat și obținem $2 \sec a \pm 2\sqrt{\sec^2 a - \operatorname{tg}^2 a} = 2(\sec a \pm 1)$ care este adevărată deoarece $\sec^2 a - \operatorname{tg}^2 a = 1$.

1.49. Condiția $0 < x < \pi/2$ arată că radicalii au sens. Avem

$$\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{\sqrt{1/\operatorname{ctg} x}}{1 + 1/\operatorname{ctg} x} = \frac{\operatorname{ctg} x \sqrt{1/\operatorname{ctg} x}}{1 + \operatorname{ctg} x} = \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{1 + \operatorname{ctg} x}. \text{ Analog}$$

$$\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{1 - \operatorname{tg} x} = \frac{\sqrt{1/\operatorname{ctg} x}}{1 - 1/\operatorname{ctg} x} = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \sqrt{1/\operatorname{ctg} x}}{\operatorname{ctg} x - 1} = -\frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{1 - \operatorname{ctg} x}.$$

1.50. Deoarece $x \in (0, \pi/2)$ toți radicalii au sens:

$$\sqrt{\left(\sqrt{\frac{1}{\sin x} + 1} + \sqrt{\frac{1}{\sin x} - 1}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{\sin x} + 2\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} - 1}} =$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x}}; \quad \sqrt{\left(\sqrt{\frac{1}{\cos x} + 1} + \sqrt{\frac{1}{\cos x} - 1}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\cos x} + \sqrt{\frac{1}{\cos x} - 1}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\operatorname{ctg} x}}.$$

1.51. $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x = m^2$ deci $\sin x + \cos x = \pm m$. $(\sin x + \cos x)^3 = \sin^3 x + \cos^3 x + 3\sin x \cos x (\sin x + \cos x)$, unde $\pm m^3 = n + \frac{3}{2}(m^2 - 1)(\pm m)$ sau $\pm 2m^3 = 2n \pm 3m^3 \mp 3m$ deci $\pm m^3 \mp 3m + 2n = 0$.

1.52. $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos^2) \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x)$; $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Deducem $n = m(1 - \sin x \cos x)$. Din relația $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$ avem $m^2 = 1 + 2\sin x \cos x$, de unde $\sin x \cos x = (1/2)(m^2 - 1)$. Deci $n = (1 - (m^2 - 1)/2)$, sau $2n = 3m - m^3$.

1.53. $\frac{\sin x}{a} + \frac{b}{\cos x} = \operatorname{tg} x\left(\frac{1}{c} + d\right) = \frac{1}{e\cos x} + f\sin x$, sau $\frac{1}{a} \cdot \sin x \cdot \cos x + b = \left(\frac{1}{c} + d\right) \cdot \sin x = \frac{1}{c} + f\sin x \cdot \cos x$, de unde $\sin x \cdot \cos x = \frac{a(1-eb)}{e(1-af)}$; apoi $\sin x = \frac{c(1-abef)}{e(1-af)(1+cd)}$; $\cos x + \frac{a(1-cb)(1+cd)}{c(1-abef)}$.

Înlocuind în relația $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, obținem relația căutată independentă de x.

1.54. Cum $x \in [0, 1]$ putem nota $x = \sin a$, deci $0 \leqslant \sqrt{1-\sin^2 a}\ (1 - \sqrt{1-\sin^2 a}) \leqslant 1/4$ sau $0 \leqslant \cos a(1 - \cos a) \leqslant 1/4$ cînd $a \in (0, \pi/2)$.

1.55. Avem $x_1 + x_2 = -m$; $2x_1x_2 = m^2 - 1$; $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = m^2 - m^2 + 1 = 1$.

$\Delta = m^2 - 2m^2 + 2 = -m^2 + 2 \geqslant 0$, $m \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$; $2x_1x_2 = m^2 - 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow -1 < 2x_1x_2 < 1$. Deoarece $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $-x_1$ este maxim dacă $x_2 = 0$, deci $x_1 \leqslant 1$; x_1 este minim tot dacă $x_2 = 0$, $x_1 \geqslant -1 \Rightarrow x_1, x_2 \in [-1, 1]$.

Verificare: $2x_1x_2 = m^2 - 1 \in [-1, 1]$; $\pm 2\sin a \cos a = \pm\sin 2a \in [-1, 1]$

1.56. $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\pi = -1$, $\sin\frac{5\pi}{2} = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - 2\pi\right) = 1$, dar $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 + b^2 - ab)$, deci $E = a^2 - ab + b^2 + ab + 2ab = (a + b)^2$.

1.57. $\cos(3x - 60°) = \cos(60° - 3x) = \sin(30° + 3x)$; $\cos(3x - 30°) = \cos(30° - 3x) = \sin(60° + 3x)$. Să arătăm că $1/4 \leqslant \sin^2(3x + 30°) \leqslant 3/4 \leqslant \sin^2(3x + 60°)$. Dar $30° \leqslant 3x + 30° \leqslant 60°$. Aplicăm teorema sinusului avem $1/2^2 \leqslant \sin^2(3x + 30°) \leqslant 3/4$, apoi $60° \leqslant 3x + 60° \leqslant 90°$, de unde $3/4 \leqslant \sin^2(3x + 60°) \leqslant 1$. Semnele egal se obțin cînd x ia valori la capetele intervalului $(0°, 10°)$.

1.58. $\sin^2\frac{3\pi}{7} = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{7}\right) = \cos^2\frac{\pi}{14}$; $\cos^2\frac{3\pi}{7} = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{7}\right) = \sin^2\frac{\pi}{14}$,

deci $E = \dfrac{\sin^2\frac{\pi}{14} + \cos\frac{2\pi}{14}}{\cos^2\frac{2\pi}{14} + \sin^2\frac{\pi}{14}} = 1.$

1.59. $\operatorname{tg}^7 177^\circ = -\operatorname{tg}^7 3^\circ$ și $\operatorname{ctg}^7 157^\circ = \operatorname{ctg}^7 23^\circ$ deci $E = \operatorname{tg}^7 3^\circ + \operatorname{ctg}^7 23^\circ - \operatorname{tg}^7 3^\circ - \operatorname{ctg}^7 23^\circ = 0$.

1.60. $2 = 1 + \cos^2 b \cos^2 c - 2 \cos b \cos c - 1 + \cos^2 c - \cos b \cos^2 c \Rightarrow$ $\Rightarrow (\cos b - \cos c)^2$.

$$x_1 = \frac{1 - \cos b \cos c - \cos b + \cos c}{(1 - \cos b)(1 + \cos b)} = \frac{1 + \cos c}{1 + \cos b};\ x_2 = \frac{1 - \cos b}{1 + \cos c}.$$

Cazul particular:. $x_1 = \dfrac{1 + 1/2}{1 - 1/2} = 3,\ x_2 = \dfrac{1 + 1/2}{1 - 1/2} = 3.$

1.61. Avem: $\sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} \geqslant 0$, deci condiția $\operatorname{cosec} x + \operatorname{ctg} x \leqslant 0$.

În această condiție ridicăm la pătrat:

$$\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = \frac{(1 + \cos x)^2}{1 - \cos^2 x} = \left(\frac{1 + \cos}{\sin x}\right)^2 = (\operatorname{cosec} x + \operatorname{ctg} x)^2 \leqslant 0.$$

Să arătăm deci cînd $\operatorname{cosec} x + \operatorname{ctg} x \leqslant 0$. Avem deci: $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} = -\dfrac{1 + \cos x}{\sin x} \leqslant 0$. Pentru $\cos x = -1$ expresia ia forma fără sens $\dfrac{0}{0}$, iar pentru $x = \pi$, nu are sens. Rămîne să arătăm numai cînd $\dfrac{1 + \cos x}{\sin x} < 0$.

În cadranul I și II fracția nu poate fi negativă. Rezultă $x \in (\pi, 2\pi)$ adică în cadranele III și IV.

1.62. 1°) Să arătăm că $\sin a + \cos a > 1$. Avem: $\sin a > 0$, $\cos a > 0$; $\sin^2 a + \cos^2 a + 2 \sin a \cos a = 1 + 2 \sin a \cos a > 1$.

2°) Să arătăm că dacă $0 < a < \pi/2$, atunci $\dfrac{1}{\sin a} + \dfrac{1}{\cos a} \geqslant 2\sqrt{2}$. Avem $\dfrac{1}{\sin a} + \dfrac{1}{\cos a} = \dfrac{\sin a + \cos a}{\sin a \cos a}$; $\sin a > 0$, $\cos a > 0$, deci $(\sin a + \cos a)^2$ are valoarea cea mai mică atunci cînd și $(\sin a + \cos a)$ are valoarea ei cea mai mică, ori din relația de la punctul 1°) $(\sin a + \cos a)^2 = 1 + 2 \sin a \cos a$ sau $(\sin a + \cos a)^2 - 2 \sin a \cos a = 1$. Prin urmare valoarea cea mai mică pentru $(\sin a + \cos a)$ este cînd $2 \sin a \cos a \leqslant 1$ are valoarea cea mai mare, adică, atunci cînd $\sin a \cos a = 1/2$. În acest caz $(\sin a + \cos a)^2 \leqslant$ $\leqslant 1 + 1$ deci $\sin a + \cos a \sqrt{2}$.

Rezultă $\dfrac{1}{\sin a} + \dfrac{1}{\cos a} = \dfrac{\sin a + \cos a}{\sin a \cos a} \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{1/2} = 2 \cdot \sqrt{2}$.

3°) Avem $0 < a/2 < \pi/4$, dar în acest caz $\cos \dfrac{a}{2} > \sin \dfrac{a}{2}$ deci: $\cos \dfrac{a}{2} - \sin \dfrac{a}{2} > 0$;

4°) La fel $\operatorname{ctg} \dfrac{a}{2} - \operatorname{tg} \dfrac{a}{2} > 0$.

1.63. Arcul de măsură $\pi/11$ este subîntins de latura unui poligon regulat convex cu 22 de laturi. Coardele $|A_2A_{11}|$, $|A_3A_{10}|$, $|A_4A_9|$, $|A_5A_8|$, și $|A_6A_7|$ sînt paralele cu diametrul $|A_1A_{12}|$. Rezultă: $\cos\frac{\pi}{11}=\frac{\|A_2A_{11}\|}{2R}$; $\cos\frac{2\pi}{11}=\frac{\|A_3A_{10}\|}{2R}$; $\cos\frac{3\pi}{11}=\frac{\|A_4A_9\|}{2R}$; $\cos\frac{4\pi}{11}=\frac{\|A_5A_8\|}{2R}$ și $\cos\frac{5\pi}{11}=\frac{\|A_6A_7\|}{2R}$. Avem relația: $\|A_2A_{11}\|-\|A_3A_{10}\|+\|A_4A_9\|-\|A_5A_8\|+\|A_6A_7\|=R=1/2$.

Generalizare. Considerăm un cerc de rază $R=1/2$ în care se înscrie poligonul regulat cu $2(2n+1)$ laturi. Se ajunge la relația: $\|A_2A_{2k+1}\|-\|A_3A_{2k}\|+\|A_4A_{2k-1}\|-\ldots+(-1)^{k-1}\|A_{k+1}A_{k+2}\|=R=\frac{1}{2}$ echivalentă cu relația: $\cos\frac{\pi}{2n+1}-\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}-\ldots+(-1)^{k-1}\cos\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{1}{2}$.

1.64. $$\frac{\sin x\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)}{\cos x\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)}=\frac{\sin^2 x(1+\cos x)}{\cos^2 x(1+\operatorname{tg} x)}=\frac{1+\cos x}{1+\sin x}\cdot\operatorname{tg}^2 x.$$

1.65. Mai întîi este necesar să avem $\cos x<0$, deoarece suma a două cantități pozitive nu poate fi zero. În acest caz ridicăm la pătrat relația: $\sqrt{1-\cos^2 x}=-\cos x\cdot\sqrt{\sec^2 x-1}\Rightarrow 1-\cos^2 x=(\sec^2 x-1)\cdot\cos^2 x$ sau $1-\cos^2 x=1-\cos^2 x$. Deci $x\in(\pi/2,3\pi/2)$.

1.66. Din relația dată obținem:

$$\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}{1+2+3}=\operatorname{tg}A=\frac{\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C}{6},\quad \operatorname{tg}B\operatorname{tg}C=6,$$ însă $1{,}5\operatorname{tg}B=\operatorname{tg}C$ deci $\operatorname{tg}^2 B=4$; $\operatorname{tg}B=2$, $\operatorname{tg}A=1$, $\operatorname{tg}C=3$; $\sin A=\operatorname{tg}A/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 A}=1/\sqrt{2}$; $\sin B=2/\sqrt{5}$; $\sin C=2/\sqrt{10}$.

1.67. Ridicăm la pătrat și obținem:

a) $2+2\operatorname{tg}^2 x=2\sec^2 x$, dar $1+\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x$.

b) $4\operatorname{tg}x=4\operatorname{tg}x$, $\operatorname{tg}x>0$.

c) $2+\sin^2 x+\cos^2 x+2(\sin x+\cos x)=3+2\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}=3+2\sqrt{1+2\sin x\cos x}$; $\sin x>0$, $\cos x>0$.

d) $3-2(\sin x+\cos x)=3+2\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}$ deoarece $\sin x<0$, $\cos x<0$.

$\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}=|\sin x+\cos x|=-(\sin x+\cos x)$ pentru $\sin x$, $\cos x<0$.

1.68. Deoarece 180 și 7 sînt prime între ele, $(7k)°$ ia valoare întreagă de grad sexagesimal, deci 360 valori de grade corespund la 18 valori distincte deoarece două cîte două au același sinus. Deci $k=1,\pm 2,\pm 3,\ldots\pm 90$.

1.69. Transformăm relația $\sin x+\operatorname{tg}x=m$ în $\sin x+\sin x/\cos x=m\sin x\cos x+\sin x=m\cos x$. Înmulțind ambii membri cu 2 rezultă $2\sin x\cos x+2\sin x=2m\cos x$. Adunăm o unitate ambilor membri și

obținem: $1 + 2 \sin x \cos x + 2 \sin x = 2m \cos x + 1$ sau $1 + 2 \sin x \cos x = 2m \cos x - 2 \sin x + 1$. Știm că $1 + 2 \sin x \cos x = (\sin x + \cos x)^2$ și deci obținem: $(\sin x + \cos x)^2 = 2m \cos x - 2 \sin x + 1$ de unde $\sin x + \cos x = 2m \cos x - 2 \sin x + 1$ adică ceea ce trebuia demonstrat.

Pentru calculul expresiei $E(x)$ pornim tot de la relația $\sin x + \operatorname{tg} x = m$ din care obținem $m = \sin x + \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x(1 + \cos x)}{\cos x}$ dar $1 + \cos x = 2 \cos^2 \dfrac{x}{2}$ iar $\dfrac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ și deci $m = 2 \operatorname{tg} x \cos^2 \dfrac{x}{2}$. Revenim din nou la relația de condiție $\sin x + \operatorname{tg} x = m$ din care prin ridicare la pătrat rezultă $m^2 = \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x + 2 \sin x \operatorname{tg} x$, de unde prin adunarea unei unități în ambii membri obținem $1 + \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x + 2 \sin x \operatorname{tg} x = m^2 + 1$ dar $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ deci $\sin^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{2(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = m^2 + 1$ de unde $\sin^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{2}{\cos x} - 2 \cos x = m^2 + 1$ adică $E(x) = \dfrac{m}{2} + 1$.

1.70. a) Fie $\sin x + \cos x = m$. Ținînd seama că $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ avem $\sin x \cos x = \dfrac{m^2 - 1}{2}$, deci avem de demonstrat inegalitatea $m^4 \geqslant \sqrt{4m^2 - 4}$ sau $(m^2 - 2)^2 \geqslant 0$, ceea ce este evident.

b) Avem egalitate cînd $m = \pm\sqrt{2}$, sau: $\sin x + \cos y = \pm \sqrt{2}$. Aceasta are loc pentru $x = k\pi + \pi/4$. Valorile lui x cuprinse între 0 și 2π sînt: $x = \pi/4$; $x = 5\pi/4$. Pentru aceste valori ale lui x avem: $\sin \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ și $\sin \dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. În ambele cazuri egalitatea este verificată.

1.71. a) Ridicăm relațiile la pătrat și se ține seama de semnul funcțiilor în cadranul II și III.

b) Se ține seama de semnul funcțiilor în cadranele I și IV.

1.72. $\Delta' = \cos^2 a - (1 - \sin a)(1 + \sin a) = \cos^2 a - (1 - \sin^2 a) = \sin^2 a + \cos^2 a - 1$ și cum $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, avem $\Delta' = 1 - 1 = 0$. Deci, primul trinom are o rădăcină dublă. Cînd x ia această valoare, trinomul este nul, iar cînd x diferă de această valoare, trinomul are semnul coeficientului lui x^2, deci are semnul $+$, căci în cazul nostru, $1 - \sin a > 0$, avînd $\sin a < 1$. Analog pentru al doilea trinom. Discriminantul acestuia este:

$$\Delta = \sin^2 a - (1 - \cos a)(1 + \cos a) = 0.$$

Coeficientul lui x^2 este: $1 + \cos a > 0$, căci $\cos a > -1$, deci trinomul este pozitiv sau cel puțin egal cu zero.

Pentru al treilea trinom avem

$$\Delta = (\operatorname{cor}^2 a + \sin^2 a + 2 \cos a \sin a) - (3 + 2 \cos a - 2 \sin a) = 2(\sin a - 1)(\cos a + 1).$$

Dar, $\sin a < 1$ sau $\sin a - 1 < 0$ și $\cos a > -1$ sau $\cos a + 1 > 0$, deci $\Delta < 0$.

Coeficientul lui x^2 este:

$A = 3 + 2\cos a - 2\sin a = (2\sin a \cdot \cos a + 1) - 2(\cos a + 1)(\sin a - 1) = (\sin a + \cos a)^2 - \Delta > 0$. căci, $(\sin a + \cos a)^2 > 0$ și $-\Delta > 0$.

Acest trinom are discriminantul negativ și coeficientul lui x^2 este pozitiv, deci mai mare ca zero.

1.73. Avem

$$2 + 2\sqrt{1-\sin^2 a} + 2 - 2\sqrt{1-\sin^2 a} = 4,$$

$$2 + 2\sqrt{1-\cos^2 a} + 2 - 2\sqrt{1-\cos^2 a} = 4,$$

$$2 + 2\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x} + 2 - 2\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x} = 4.$$

1.74. Notăm $\operatorname{tg} x = a$ și $\operatorname{tg} y = b$. Să arătăm că $(a^2 + b^2)(1/a^2 + 1/b^2) \geqslant (a + b)(1/a + 1/b) \Rightarrow a^2/b^2 + b^2/a^2 \geqslant a/b + b/a$. Dacă $a/b < 0$ este evident. Dacă $a/b = 0$ este imposibil pentru că b/a nu are sens. Dacă $a/b > 0$, notăm $\max(a/b, b/a) = z$, evident că $z \leqslant 1$ și obținem

$$z^2 + 1/z^2 \geqslant z + 1/z \text{ sau } z(z-1) \geqslant (z-1)/z.$$

Pentru $z = 1$ avem egalitate, de asemenea pentru $z > 1$ se obține $z > \frac{1}{z}$ evident. Adică $z > 1 > 1/z$ sau: $\dfrac{(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y)^2}{\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y} \geqslant \dfrac{(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)^2 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y}$.

1.75. Avem $0° < A < 180°$, $0° < B < 180°$ și $A + B < 180°$. De asemenea $2 - \cos^2 B = 1 + \sin^2 B$; Fie M_1 și M_2 cele două părți ale inegalității.

$M_1 = \sin A(1 + \sin^2 B) + \sin B(1 + \sin^2 A) = \sin A + \sin B + \sin A \sin B(\sin A + \sin B) = (\sin A + \sin B)(1 + \sin A \sin B)$ unde $\sin A + \sin B > 0$.

$M_2 = (\sin A + \sin B)(1 - \sqrt{\sin^2 A \sin^2 B}) = (\sin A + \sin B)(1 - \sin A \sin B)$. Inegalitatea devine $1 + \sin A \sin B > 1 - \sin A \sin B$, evident.

1.76. Ambele părți fiind pozitive ridicăm la pătrat

$$E^2 = \frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \frac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2 x} = \left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)^2 = (\sec x - \operatorname{tg} x)^2.$$

1.77. Pentru $x \in [0, \pi/2] \cup [\pi, 3\pi/2]$ avem $\sin x \cos x \geqslant 0$, deci $\sin x \cos x = |\sin x \cos x| = \sqrt{\sin^2 x \cos^2 x}$. Ridicăm la pătrat și obținem $1 + \cos x - \sin x - \sin x \cos x + 1 - \cos x + \sin x - \sin x \cos x + 2\sqrt{(1-\cos^2 x)(1-\sin^2 x)} = 2$ sau $2 - 2\sin x \cos x + 2|\sin x \cos x| = 2$.

Deci relația propusă este justă.

1.78. Notăm $\operatorname{tg} x = m$ și $\operatorname{tg} y = n$ și avem $a = m(1 + n^2)$; $b = n(1 + m^2)$; $c = (m + n)(1 - mn)$, unde m, n și c sînt numere pozitive. Rezultă că

$$a + b + c = m(1 + n^2) + n(1 + m^2) + (m + n)(1 - mn) = 2(m + n)$$

$$a + b = m(1 + n^2) + n(1 + n^2) = (m + n)(1 + mn).$$

$$a - b = m(1 + n^2) - n(1 + m^2) = (m - n)(1 - mn).$$

Rezultă:

$$mn + n = \frac{a+b+c}{2};\ mn = \frac{a+b}{m+n} - 1 = \frac{2(a+b)}{a+b+c} - 1 = \frac{a+b+c}{a+b-c};$$

$$m - n = \frac{a-b}{1-mn} = \frac{(a-b)(a+b+c)}{2c}.$$

Deci: $m = \frac{a+b+c}{4} + \frac{(a+b)(a+b+c)}{4c} = \frac{(a+b+c)(c+a-b)}{4c}$,

$n = \frac{(a+b+c)(c-a+b)}{4c}$. Înlocuind în $c = (m+n)(1-mn)$ obținem

$c = \frac{a+b+c}{2} \cdot \left[1 - \frac{(a+b+c)^2(c+a-b)(c-a+b)}{16c^2}\right]$; sau $\frac{a+b+c}{2} -$

$- c = \frac{(a+b+c)^3(c+a-b)(c-a+b)}{2.16c^2}$, deci $(a+b-c)16c^2 = (a+b+$

$+ c)^3(c+a-b)(c-a+b)$, de unde $4c\sqrt{a+b-c} = (a+b+c) \cdot$

$\cdot\sqrt{(a+b+c)(c-a+b)(c+a-b)}$.

Observație. Analog dacă $a = m(k+n^2)$; $b = n(k+m^2)$ și $c = (m+$ $+ n)(k-mn)$. prin eliminarea lui m și n obținem:
$(a+b+c) \cdot \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)} = 4kc\sqrt{k(a+b-c)}$.

1.79. Ecuațiile date se mai pot scrie

$$\sqrt{2(1+\sec x)} = |\sqrt{1-\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\operatorname{tg} x}|. \qquad (1)$$

Ridicăm la pătrat și reducem termenii asemenea: $2(1+\sec x) = 2 - 2\cdot\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}$ sau încă $\sec x = -\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}$, deci $\sec x \leqslant 0$. După încă o ridicare la pătrat avem $\sec^2 x = 1 - \operatorname{tg}^2 x$, de unde rezultă $\operatorname{tg} x = 0$. Între 0 și 4π, $\operatorname{tg} x$ se anulează pentru $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$, $x_3 = 2\pi$, $x_4 = 3\pi$ și $x_5 = 4\pi$, dar secanta este negativă numai pentru $x_2 = \pi$ și $x_4 = 3\pi$ valori care verifică ecuațiile din enunț. În general avem soluția $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

1.80. $\sin(xOA) = 3/\sqrt{3^2+4^2} = 3/5$; $\cos(xOA) = 4/5$, $\operatorname{tg}(xOA) = 3/4$
$\sin(xOB) = 1/\sqrt{(-2)^2+1^2} = 1/\sqrt{5}$; $\cos(xOB) = -1/\sqrt{5}$; $\operatorname{tg}(xOB) = -2$,
$\sin(xOC) = 1/\sqrt{5}$; $\cos(xOC) = -2/\sqrt{5}$; $\operatorname{tg}(xOC) = -1/2$.

1.81. Fie M și N respectiv mijloacele coardelor $|AB|$ și $|CD|$. Avem: $\mathbf{OA} + \mathbf{OB} = 2\mathbf{OM}$ și $\mathbf{OC} + \mathbf{OD} = 2\mathbf{ON}$; $\mathbf{OA} + \mathbf{OB} + \mathbf{OC} + \mathbf{OD} = 2(\mathbf{OM} + \mathbf{ON}) = 2\mathbf{OP}$.

$\mathbf{PA} = \mathbf{OA} - \mathbf{OP}$; $\mathbf{PB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OP}$; $\mathbf{PC} = \mathbf{OC} - \mathbf{OP}$; $\mathbf{PD} = \mathbf{OD} - \mathbf{OP} \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbf{PA} + \mathbf{PB} + \mathbf{PC} + \mathbf{PD} = \mathbf{OA} + \mathbf{OB} + \mathbf{OC} + \mathbf{OD} - 4\mathbf{OP} = 2\mathbf{OP} - 4\mathbf{OP} =$
$= -2\mathbf{OP} = 2\mathbf{PO}$.

1.82. Avem $\mathbf{OA} + \mathbf{OB} = 2\mathbf{OA}$, (regula paralelogramului: $\mathbf{OB} + \mathbf{OC} = 2\mathbf{OB}_1$; $\mathbf{OC} + \mathbf{OD} = 2\mathbf{OC}_1$ și $\mathbf{OD} + \mathbf{OA} = 2\mathbf{OD}_1$. Adunînd aceste patru relații parte cu parte, obținem $\mathbf{OA} + \mathbf{OB} + \mathbf{OC} + \mathbf{OD} = \mathbf{OA}_1 + \mathbf{OB}_1 + \mathbf{OC}_1 +$ $+ \mathbf{OD}_1$; $\mathbf{OA}_1 + \mathbf{OC}_1 = 2\mathbf{OM}$; de asemenea $\mathbf{OB}_1 + \mathbf{OD}_1 = 2\mathbf{OM}$, figura $A_1B_1C_1D_1$ fiind un paralelogram. Dacă $M \equiv O \Rightarrow \Sigma\mathbf{MA} = \Sigma\mathbf{MA}_1 = \mathbf{0}$ și $\mathbf{OA}_1 + \mathbf{OC}_1 = \mathbf{0}$; $\mathbf{OB}_1 + \mathbf{OD}_1 = \mathbf{0}$,

1.83. $\mathbf{OA} + \mathbf{OB} = 2\mathbf{OC}_1$; $\mathbf{OB} + \mathbf{OC} = 2\mathbf{OA}_1$; $\mathbf{OC} + \mathbf{BA} = 2\mathbf{OB}_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \Sigma\mathbf{OA} = \Sigma\mathbf{OA}_1$ $\mathbf{OA} + \mathbf{OB} + \mathbf{OC} = 2\mathbf{O}\mathbf{C}_1 + \mathbf{OC} = 3\mathbf{OG}$. Dacă $O \equiv G \Rightarrow$ $\Rightarrow \Sigma\mathbf{GA}_1 = \mathbf{0}$.

1.84. Dacă $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, atunci vectorii $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ și $\mathbf{c}$ pot fi considerați ca laturile unui triunghi echilateral, deci unghiurile dintre fiecare doi vectori vor fi egali cu 120° și deci $\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca} = -3/2$.

1.85. Avem $\mathbf{VA} + \mathbf{VB} + \mathbf{VC} = 3\mathbf{VG}$, iar în particular, $\mathbf{GA} + \mathbf{GB} + \mathbf{GC} = \mathbf{0}$. Descompunem vectorii $\mathbf{VA}$, $\mathbf{VB}$, $\mathbf{VC}$ după direcția GV și două perpendiculare duse din G pe GV și pe intersecțiile planului ce trece prin G și este perpendicular pe GV respectiv cu planele VGA, VGB, VGC și obținem: $\mathbf{VA}_1 + \mathbf{VB}_1 + \mathbf{VC}_1 = \mathbf{0}$.

1.86. Se observă că mijlocul segmentului dat $|BD|$ are coordonatele $\left(\frac{4-2}{2}, \frac{5-3}{2}\right)$ adică coincide cu punctul $E(1, 1)$. Analog, punctul E este și mijlocul segmentului $|AC|$. Mai avem: $EC = 5$ cm, $|BD| = \sqrt{(4-1)^2 + (5-1)^2} = 5$, prin urmare $|AE| = |BE| = |CE| = |DE|$, deci $ABCD$ este dreptunghi. $|BC| = \sqrt{(6+2)^2 + (1+3)^2} = 4\sqrt{5}$, $|AB| = \sqrt{(-4+2)^2 + (1+3)^2} = 2\sqrt{5}$, rezultă că aria $ABCD = 80$ cm^2.

b) Mijlocul lui $|DC|$ este $F(5, 3)$ de unde rezultă că

$$\mathbf{EF} = \frac{\mathbf{ED} + \mathbf{EC}}{2} = \frac{\mathbf{AC} + \mathbf{BD}}{4} \text{ sau } \mathbf{AC} + \mathbf{BD} = 4\mathbf{EF}.$$

c) Relația cerută se mai scrie $\mathbf{MA} + \mathbf{MC} = \mathbf{MB} + \mathbf{MD}$, dar $\mathbf{MA} + \mathbf{MC} = 2\mathbf{ME}$ și $\mathbf{MB} + \mathbf{MD} = 2\mathbf{ME}$.

d) Ducem $|DG| \perp EC$, dar $|EC| \parallel Oy \Rightarrow \|EG\| = 4 - 1 = 3$. adică diferența absciselor punctelor A și E. Avem $\operatorname{tg}(\sphericalangle DEG) = \operatorname{tg}(\sphericalangle CED) = 4/3$. În triunghiul BAC dreptunghic în B avem $\operatorname{tg}(\sphericalangle BAC) = BC/AB = 2$. Prin urmare $2\operatorname{tg}(\sphericalangle BAC) = 3\operatorname{tg}(\sphericalangle CED)$.

1.87. $\mathbf{AM} = (\mathbf{c} - \mathbf{b})/2$; $\mathbf{BN} = (\mathbf{a} - \mathbf{c})/2$; $\mathbf{CP} = (\mathbf{b} - \mathbf{a})/2$.

1.88. a) Fie M' proiecția punctului M pe planul xOy; avem:

$a_x = \|OA\| = \|OM'\| \cos(AOM') = \|OM'\| \cos 45°$;

$a_y = \|OB\| = \|OM'\| \cos(BOM') = \|OM'\| \cos 45°$;

$a_z = \|OC\| = \|OM\| \cos(COM) = \|OM\| \cos 60°$

Dar $\|OM'\| = \|OM\| \cos(MOM') = 3 \cos 30°$. Rezultă

$$a_x = \|OM\| \cos 30° \cdot \cos 45° = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{4},$$

$$a_y = \|OM\| \cos 30° \cos 45° = 3\sqrt{6}/4.$$

$$a_z = \|OM\| \cos 60° = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{2}.$$

b) $\cos\alpha = a_x/\|OM\| = \sqrt{6} : 4$, $\cos\beta = a_y/|OM| \parallel \sqrt{6}:4 = \cos\gamma = a/\|OM\| = \cos 60° = 1/2$.

1.89. Fie mijlocul lui $\| BC \|$. Avem $\mathbf{AB} + \mathbf{AC} = 2\mathbf{AM}$, $\mathbf{AD} + \mathbf{AG} = 2\mathbf{AM}$, $\mathbf{AE} + \mathbf{AF} = 2\mathbf{AM}$. Deci, $\mathbf{AB} + \mathbf{AD} + \mathbf{AE} + \mathbf{AF} + \mathbf{AG} + \mathbf{AC} = 6\mathbf{AM}$. Punctul M fiind mijlocul ipotenuzei $| BC |$, $\| AM \| = \| BC \|/2$; $\| BC \| = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = 20$ dm, $|6\mathbf{AM}| = 6 \cdot 10 = 60$ dm.

1.90. $\| OR \|^2 = (0 + 1 + 2 - 5 - 7)^2 + (4 + 3 - 3 - 1 - 0)^2 = 81 + 9 = 90$, deci $\| OR \| = \sqrt{90}$; $\operatorname{tg}(ROx) = \dfrac{\Sigma y}{\Sigma x_1} = \dfrac{3}{-9} = -\dfrac{1}{3}$, Punctul $R(-9, 3)$ se află în cadranul II.

1.91. $\mathbf{OC} + \mathbf{OD} = \mathbf{a}/4 + 3\mathbf{b}/4 + 3\mathbf{a}/4 + \mathbf{b}/4 = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{OA} + \mathbf{OB}$.

1.92. $\mathbf{OA} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$; $\mathbf{OB} = \mathbf{OA} + \mathbf{AB} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$; $\mathbf{OC} = \mathbf{OB} + \mathbf{BC} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; $\mathbf{OD} = \mathbf{OC} + \mathbf{CD} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, $\mathbf{OE} = \mathbf{OD} + \mathbf{DE} = -i + 6\mathbf{j}$. Rezultă: $B(2, 6)$, $C(2, 4)$, $D(-2, 5)$, $E(-1, 6)$.

1.93. $\mathbf{OM} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, $\mathbf{ON} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{d})$.

$\mathbf{OR} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$; $\mathbf{GS} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{d})$.

$\mathbf{MN} = \mathbf{MO} + \mathbf{ON} = -\dfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \dfrac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \dfrac{1}{2}(-\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d})$,

$\mathbf{RS} = \mathbf{RO} + \mathbf{OS} = \dfrac{1}{2}(-\mathbf{b} - \mathbf{c} + \mathbf{a} + \mathbf{d})$.

$\mathbf{OP} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{OM} + \mathbf{ON}) = \dfrac{1}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d})$, figura $MRNS$ este un paralelogram, deci diagonalele $| RS |$ și $| MN |$ se taie în părți egale, deoarece $\mathbf{OM} + \mathbf{ON} = \mathbf{OR} + \mathbf{OS} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d})$.

1.94. $\mathbf{OB} = \mathbf{OA} + \mathbf{AB} = 5\mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} + 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} = 8\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

$\mathbf{OC} = \mathbf{OA} + \mathbf{AC} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$;

$\mathbf{OD} = \mathbf{OA} + \mathbf{AD} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} = 11\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

$\mathbf{OE} = \mathbf{OA} + \mathbf{AE} = 5\mathbf{i} - \dfrac{3}{2}(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) = \dfrac{\mathbf{i}}{2} + 3\mathbf{j}$.

Avem: $B(8, -2)$, $C(2, 2)$, $D(11, 4)$, $E(1/2, 3)$.

1.95. $\mathbf{AB} = (3 - 1)\mathbf{i} + (-2 - 1)\mathbf{j} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$,

$\mathbf{AC} = 2\mathbf{AB} = 2(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$; $\mathbf{AD} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

$\mathbf{AE} = \dfrac{3}{2}(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) = 3\mathbf{i} - \dfrac{9}{2}\mathbf{j}$.

$\mathbf{AD} + \mathbf{AC} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

$\mathbf{AD} - \mathbf{AC} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} = -6\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$.

1.96. Fie $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ respectiv mijloacele laturilor $| AB |$, $| BC |$, $| CD |$, $| DE |$, $| EF |$, $| FA |$,iar O un punct oarecare din spațiu.

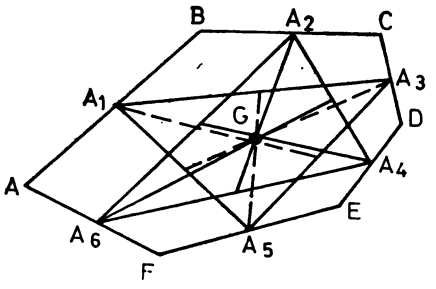

Fig. 1.96

Avem $\mathbf{OA} + \mathbf{OB} = 2\mathbf{OA}_1$; $\mathbf{OC} + \mathbf{OD} = 2\mathbf{OA}_3$; $\mathbf{OE} + \mathbf{OF} = 2\mathbf{OA}_5$; $\Sigma\mathbf{OA} = 2(\mathbf{OA}_1 + \mathbf{OA}_3 + \mathbf{OA}_5) = 6\mathbf{OG}$, unde G este centrul de greutate al triunghiului $A_1A_3A_5$. Analog $\Sigma\mathbf{OA} = 2(\mathbf{OA}_2 + \mathbf{OA}_4 + \mathbf{OA}_6) = 6\mathbf{OG}_1$, dar $6\mathbf{OG}_1 = 6\mathbf{OG}_2$; ca rezultante unice la compunerea vectorilor $\mathbf{OA}_i$, prin urmare $G \equiv G_1$; adică triunghiurile $A_1A_3A_5$ și $A_2A_4A_6$ au același centru de greutate.

Observație. Pentru un poligon convex cu 12 laturi, obținem exagoanele $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}$ și $A_2A_4A_6A_8A_{10}A_{12}$ cărora le aplicăm construcția arătată pentru exagon care se reduc apoi la triunghiuri cu același centru de greutate. Analog se extinde pentru un poligon cu $3 \cdot 2^n$ laturi.

1.97. a) $\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = (x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j}) - (x_A\mathbf{i} + y_A\mathbf{j}) = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} = (-1 - 4)\mathbf{i} + (9 - 6)\mathbf{j} = -5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Analog avem

$$\mathbf{BC} = 3\mathbf{i} - 10\mathbf{j}; \quad \mathbf{CA} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}.$$

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} + \mathbf{CA} = (-5 + 3 + 2)\mathbf{i} + (3 - 10 + 7)\mathbf{j} = \mathbf{0}.$$

b) Fie $D(x, y)$; avem $x - x_C = x_B - x_A$ și $y - y_C = y_B - y_A$ sau $x - 2 = -1 - 4 \Rightarrow x = -3$, $y + 1 = 9 - 6 \Rightarrow y = 2$, deci $D(-3, 2)$.

1.98. a) Avem $2\mathbf{AM} = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$. De asemenea $\|AB\|^2 = \|BN\| \cdot \|BC\|$ și $\|AC\|^2 = \|CN\| \cdot \|CB\|$. Rezultă $c^2 \cdot \|BN\| = b^2 \cdot \|NC\|$. Deci $\mathbf{AN} = \dfrac{\mathbf{AB} + \dfrac{b^2}{c^2} \cdot \mathbf{AC}}{b^2 + c^2} = \dfrac{b^2 \cdot \mathbf{b} + c^2 \cdot \mathbf{c}}{b^2 + c^2}$; $\mathbf{MN} = \mathbf{MA} + \mathbf{AN} = \mathbf{AN} - \mathbf{MA} =$

$$= \frac{b^2\mathbf{b} + c^2\mathbf{c}}{b^2 + c^2} - \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} = \frac{b^2\mathbf{b} + c^2\mathbf{c} - c^2\mathbf{b} - b^2\mathbf{c}}{2(b^2 + c^2)} = \frac{(\mathbf{b} - \mathbf{c})(b^2 - c^2)}{2(b^2 + c^2)} =$$

$$\mathbf{BC} \cdot \frac{b^2 - c^2}{2(b^2 + c^2)}.$$

b) $\mathbf{MN} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \mathbf{BC}$ și $\mathbf{MN} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \cdot \mathbf{BC}$, deci $\dfrac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Prin proporții derivate deducem $b^2 = \dfrac{(2 + \sqrt{3})(b^2 + c^2)}{4}$; $c^2 = \dfrac{(2 - \sqrt{3})(b^2 + c^2)}{4}$

de unde $16b^2c^2 = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})(b^2 + c^2)^2 = 4\|BC\|^4$, deci $\|BC\|^2 = 4bc$.

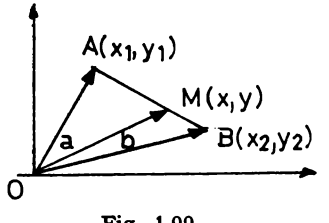

Fig. 1.99

1.99. $\mathbf{MA} = k \cdot \mathbf{MB}$; $\mathbf{MA} = \mathbf{OA} - \mathbf{OM} =$

$= \mathbf{a} - \mathbf{OM} = k\mathbf{MB} = k(\mathbf{OB} - \mathbf{OM}) = k(\mathbf{b} - \mathbf{OM})$.

$\mathbf{a} - k\mathbf{b} = \mathbf{OM} \cdot (1 - k) \Rightarrow \mathbf{OM} = \dfrac{\mathbf{a} - k\mathbf{b}}{1 - k}$, $\mathbf{OM} =$

$= \dfrac{1}{1 - k} \cdot \mathbf{a} + \dfrac{-k}{1 - k} \cdot \mathbf{b}$, de unde $x = \dfrac{x_1 - kx_2}{1 - k}$;

$y = \frac{y_1 - ky_2}{1-k}$; deci avem $k = \frac{m}{n}$ adică $\frac{MA}{m} = \frac{MB}{n}$; atunci $OM = \frac{na - mb}{n-m}$;

; $x = \frac{nx_1 - mx_2}{n-m}$; $y = \frac{ny_1 - my_2}{n-m}$.

1.100. Fie $R(x, y)$. Avem $x_1 + x_2 + x_3 = x$, $y_1 + y_2 + y_3 = y$.

$$|OR| = \sqrt{(x_1 + x_2 + x_3)^2 + (y_1 + y_2 + y_3)^2},$$

$$\cos(ROx) = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{|OR|}; \sin(ROx) = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{|OR|}; \operatorname{tg}(ROx) = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{x_1 + x_2 + x_3}.$$

1.101. a) Fie $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ și $\mathbf{V}_3$ vectorii dați $\|\mathbf{V}_1\| = \|\mathbf{V}_2\| = \|\mathbf{V}_3\| = r$. $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 = \mathbf{0}$, deci $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = -\mathbf{V}_3$. Rezultă că $\|\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2\| = r$. Deci considerînd cercul de centru ω (punctul de aplicație al vectorilor $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$ și de rază r, vectorii $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$ și $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ au extremitățile pe acest cerc. Deci, paralelogramul care are două laturi $\mathbf{V}_1$ și $\mathbf{V}_2$ și o diagonală $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ este de fapt romb, avlnd o diagonală egală cu latura. Deci, el se descompune în două triunghiuri echilaterale. Unghiul la centru dintre $\mathbf{V}_1$ și $\mathbf{V}_2$ este de 120°, iar unghiul dintre $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ și $\mathbf{V}_3$ este de 180° ca să se poată anula. Deci, extremitățile lor sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

b) Știm că $\|\mathbf{V}_1\| = \|\mathbf{V}_2\| = \|\mathbf{V}_3\| = \|\mathbf{V}_4\| = r$, $\|\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2\| = -\|\mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4)\|$; $\|\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2\| = \|\mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4\|$. Deci unghiul dintre $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ și $\mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4$ este de 180°. Deci triunghiurile $\omega|AB|$ și $\omega|CD|$ sînt egale avînd laturile (module de vectori) egale. Deci unghiul $\alpha = \beta$, deci $\mathbf{V}_4$ și $\mathbf{V}_1$ sînt în prelungire și extremitățile A, A', C, C' sînt vîrfurile unui dreptunghi.

1.102. Avem: $|AB| = \sqrt{(11+1)^2 + (1-6)^2} = 13$; $|AC| = \sqrt{338} = 13\sqrt{2}$.

$$\cos A = \frac{(11+1)(-18+1) + (1-6)(-1-6)}{13^2\sqrt{2}} = \frac{-169}{169\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sphericalangle BAC = 120°$.

1.103. Fie O un punct oarecare. Avem $\mathbf{OA}_1 + \mathbf{OA}_2 = 2\mathbf{OI}_{12}$; $\mathbf{OA}_3 + \mathbf{OA}_4 = 2\mathbf{OI}_{34}$; $\mathbf{OA}_5 + \mathbf{OA}_6 = 2\mathbf{OI}_{56}$ și $\mathbf{OA}_7 + \mathbf{OA}_8 = 2\mathbf{OI}_{78} \Rightarrow \sum_{i=1}^{8} \mathbf{OA}_i = 2(\mathbf{OI}_{12} + \mathbf{OA}_{34} + \mathbf{OI}_{56} + \mathbf{OI}_{71})$.

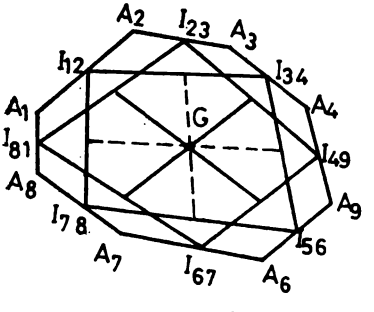

Fig. 1.103

Analog avem $\mathbf{OA}_2 + \mathbf{OA}_3 = 2\mathbf{OI}_{23}$; $\mathbf{OA}_4 + \mathbf{OA}_5 = 2\mathbf{OI}_{45}$; $\mathbf{OA}_6 + \mathbf{OA}_7 = 2\mathbf{OI}_{67}$ și $\mathbf{OA}_8 + \mathbf{OA}_1 = 2\mathbf{OI}_{81} \Rightarrow \sum_{i=1}^{8} \mathbf{OA}_i = 2(\mathbf{OI}_{23} + \mathbf{OI}_{45} + \mathbf{OI}_{67} + \mathbf{OI}_{81})$.

Notăm cu B_{34} și B_{78} mijloacele segmentelor $|OI_{23}|$ și $|OI_{45}|$ respectiv $|I_{67}I_{81}|$. Avem $\mathbf{OI}_{23} + \mathbf{OI}_{45} = 2\mathbf{OB}_{34}$ și $\mathbf{OI}_{67} + \mathbf{OI}_{81} = 2\mathbf{OB}_{78}$, dar $\mathbf{OB}_{34} + \mathbf{OB}_{79} = 2\mathbf{OG}$ și deci $\sum_{i=1}^{8} \mathbf{OA}_i = 8\mathbf{OG}$.

De asemenea $\mathbf{OI}_{12} + \mathbf{OI}_{34} + \mathbf{OI}_{56} + \mathbf{OI}_{7} = \mathbf{OI}_{23} + \mathbf{OI}_{45} + \mathbf{OI}_{67} + \mathbf{OI}_{81} = 4\mathbf{OG}$, G fiind punctul din planul octogonului dat.

Rezultă că dreptele care unesc mijloacele opuse ale patrulaterului $I_{12}I_{34}I_{56}I_{78}$ și dreptele care unesc mijloacele laturilor opuse ale patrulaterului $I_{23}I_{45}I_{67}I_{81}$ sînt diagonalele a două paralelograme care au același centru de simetrie G punctul comun al celor patru diagonale concurente.

1.104. Dacă $\mathbf{AA}_1 + \mathbf{BB}_1 + \mathbf{CC}_1 = \mathbf{0}$ condiția cerută este îndeplinită. Dar

$$\mathbf{AA}_1 = \frac{\mathbf{AC} + k \cdot \mathbf{AB}}{1+k}; \quad \mathbf{BB}_1 = \frac{\mathbf{BA} + k \cdot \mathbf{BC}}{1+k}; \quad \mathbf{CC}_1 = \frac{\mathbf{CB} + k \cdot \mathbf{CA}}{1+k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{AA}_1 + \mathbf{BB}_1 + \mathbf{CC}_1 = \frac{\mathbf{AC}(1-k) + \mathbf{BA}(1-k) + \mathbf{CB}(1-k)}{1+k} = (\mathbf{AC} + \mathbf{BA} + \mathbf{CB}) \cdot \frac{(1-k)}{(1+k)} = \mathbf{0},$$

deoarece $\mathbf{AC} + \mathbf{BA} + \mathbf{CB} = \mathbf{0}$.

1.105. Avem $\mathbf{BC} = \mathbf{B}_1\mathbf{C} = \mathbf{b}$, $\mathbf{CD} = \mathbf{C}_1\mathbf{D}_1 = -\mathbf{a}$, $\mathbf{AB}_1 = \mathbf{DC}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{c}$ $\mathbf{AD}_1 = \mathbf{BC}_1 = \mathbf{b} + \mathbf{c}$; $\mathbf{AC} = \mathbf{A}_1\mathbf{C}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b}$; $\mathbf{AC}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

$\mathbf{CA}_1 = -\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$; $\mathbf{D}_1\mathbf{A}_1 = -\mathbf{b}$; $\mathbf{AB}_1 = \mathbf{a}$, $\mathbf{BB}_1 = \mathbf{CC}_1 = \mathbf{DD}_1 = \mathbf{c}$; $\mathbf{BA}_1 = \mathbf{CD}_1 = -\mathbf{a} + \mathbf{c}$; $\mathbf{DA}_1 = \mathbf{CB}_1 = -\mathbf{b} + \mathbf{c}$; $\mathbf{BD} = -\mathbf{a} + \mathbf{b}$; $\mathbf{BD}_1 = -\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ și $\mathbf{DB}_1 = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

1.106. $\sphericalangle(\mathbf{MA}, \mathbf{CA}) = \alpha$, $\sphericalangle(\mathbf{MB}, \mathbf{CB}) = \alpha$ și $MA = MB$ deci punctul M se află pe bisectoarea unghiului C.

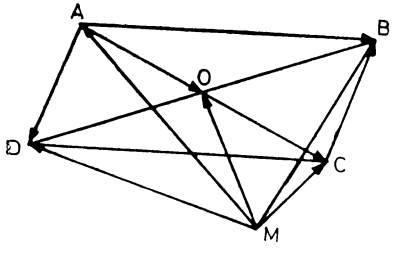

Fig. 1.107

1.107. Fie M un punct oarecare, chiar în spațiu, iar $O = AC \cap BD$. $\mathbf{MO} = \frac{\mathbf{MA}+\mathbf{MC}}{2} = \frac{\mathbf{MB}+\mathbf{MD}}{2}$; $2\mathbf{MO} = \frac{\mathbf{MA}+\mathbf{MC}+\mathbf{MB}+\mathbf{MD}}{2}$; $4\mathbf{MO} = \mathbf{MA} + \mathbf{MC} + \mathbf{MB} + \mathbf{MD}$; $\mathbf{AC} = 2\mathbf{AO} = \mathbf{AB} + \mathbf{AD}$; $2\mathbf{AC} = 4\mathbf{AO} = \mathbf{AB} + \mathbf{AD} + \mathbf{AB} + \mathbf{AD} = \mathbf{AC} + \mathbf{AB} + \mathbf{AD}$; $4\mathbf{AO} = \mathbf{AC} + \mathbf{AB} + \mathbf{AD}$.

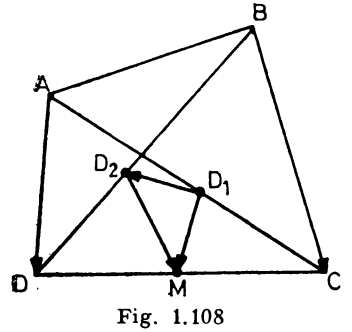

Fig. 1.108

1.108. Fie M mijlocul laturii $|DC|$. În triunghiul MO_1O_2 putem scrie relația vectorială:

$$\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2 = \mathbf{O}_1\mathbf{M} - \mathbf{O}_2\mathbf{M}. \qquad (1)$$

Dar $\mathbf{O}_1\mathbf{M} = \frac{1}{2}\mathbf{AD}$ și $\mathbf{O}_2\mathbf{M} = \frac{1}{2}\mathbf{BC}$. Înlocuind în (1) obținem:

$$\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{AD} - \mathbf{BC}) \text{ sau } 2\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2 = \mathbf{AD} - \mathbf{BC}. \quad (2)$$

Ținînd cont de relația din enunț, relația (2) devine $2\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2 = 4\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$ deci $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2 = \mathbf{0}$, ceea ce înseamnă că mijloacele diagonalelor coincid, deci $ABCD$ este un paralelogram.

1.109. Avem succesiv:

a) $\mathbf{AB} + \mathbf{AC} = 2\mathbf{AM}$;

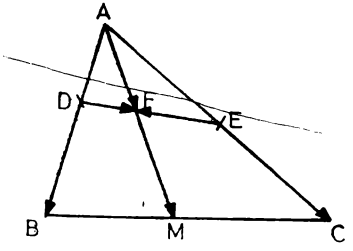

Fig. 1.109

$$\mathbf{AF} = \mathbf{AM} = \frac{\lambda}{2}(\mathbf{AB} + \mathbf{AC}) = \mathbf{AD} + \mathbf{DF} =$$
$$= \mathbf{AD} + \mu\mathbf{DE} = \mathbf{AD} + \mu(\mathbf{AE} - \mathbf{AD}) =$$
$$= \mathbf{AD}(1 - \mu) + \mu\mathbf{AE} = \frac{1}{m}\mathbf{AB}(1 - \mu) + \frac{\mu}{n} \cdot \mathbf{AC} \Rightarrow \frac{\lambda}{2}\mathbf{AB} + \frac{\lambda}{2}\mathbf{AC} = \frac{1-\mu}{m}\mathbf{AB} + \frac{\mu}{n}\mathbf{AC} \Rightarrow \frac{\lambda}{2} = \frac{1-\mu}{m};\ \frac{\lambda}{2} = \frac{\mu}{n} \Rightarrow \frac{\mu}{n} - \frac{1-\mu}{m}.$$

Rezultă $\mu m + \mu n = n$ sau $\mu = \frac{n}{m+n}$, de unde $\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{m+n}$ sau $\lambda = \frac{2}{m+n}$. Avem $\mathbf{AF} = \frac{1}{m+n}(\mathbf{AB} + \mathbf{AC})$ sau $(m+n)\mathbf{AF} = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$.

b) $\mathbf{DF} = \mu\,\mathbf{DE} = \frac{n}{m+n} \cdot \mathbf{DE}$; $\mathbf{FE} = (1 - \mu)\,\mathbf{DE} = \frac{m}{m+n} \cdot \mathbf{DE}$ sau $m \cdot \mathbf{DF} = n \cdot \mathbf{FE}$.

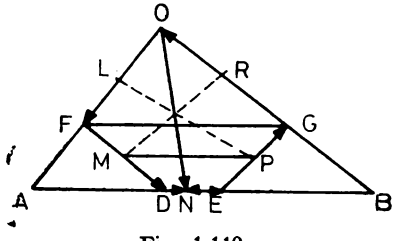

Fig. 1.110

1.110. 1) Putem scrie că $\mathbf{ON} = \mathbf{OF} + \mathbf{FD} + \mathbf{DN}$ şi $\mathbf{ON} = \mathbf{OG} + \mathbf{GE} + \mathbf{EN}$ care adunate dau $2\mathbf{ON} = \mathbf{OF} + \mathbf{FD} + \mathbf{OG} + \mathbf{GE}$.

Analog din $\mathbf{PL} = \mathbf{PG} + \mathbf{GO} + \mathbf{OL}$ şi $\mathbf{PL} = \mathbf{PE} + \mathbf{ED} + \mathbf{DF} + \mathbf{FL}$ se obţine: $2\mathbf{PL} = \mathbf{GO} + \mathbf{ED} + \mathbf{DF}$.

La fel din $\mathbf{MR} = \mathbf{MF} + \mathbf{FO} + \mathbf{OR}$ şi $\mathbf{MR} = \mathbf{MD} + \mathbf{DE} + \mathbf{EG} + \mathbf{GR}$ se obţine $2\mathbf{MR} = \mathbf{FO} + \mathbf{DE} + \mathbf{EG}$.

Dar $2\mathbf{ON} + 2\mathbf{PL} + 2\mathbf{MR} = \mathbf{OF} + \mathbf{FD} + \mathbf{OG} + \mathbf{GE} + \mathbf{GO} + \mathbf{ED} + \mathbf{DF} + \mathbf{PO} + \mathbf{DE} + \mathbf{EG} = \mathbf{0}$, de unde rezultă că $\mathbf{ON} + \mathbf{PL} + \mathbf{MR} = \mathbf{0}$, adică vectorii **ON**, **PL** şi **MR** pot forma un triunghi.

2) Să presupunem că $\mathbf{MP} \parallel \mathbf{AB}$. Deoarece $MP \parallel AB$ şi $\|FM\| = \|MD\|$; $\|GP\| = \|PE\|$, rezultă că

$$FG \parallel AB \text{ şi } \frac{\|AO\|}{\|FE\|} = \frac{\|BO\|}{\|BG\|}. \tag{1}$$

Dar $DF \parallel BO$ şi deci $\frac{\|AO\|}{\|FA\|} = \frac{\|SB\|}{\|AD\|}$ (2)

Analog, din $GE \parallel AO$ rezultă că $\|BO\| : \|BG\| = \|AB\| : \|BE\|$ (3)

Din relaţiile (1), (2), (3) rezultă că $\|AD\| = \|BE\|$.

Reciproc: să presupunem că $\|AD\| = \|BE\|$. Din (2) şi (3) rezultă relaţia (1), adică $\frac{\|AO\|}{\|FA\|} = \frac{\|BO\|}{\|BG\|}$, deci $FG \parallel FB$. Şi cum $|MP|$ este linie mijlocie în trapezul $DFGE$, rezultă că $MP \parallel AB$.

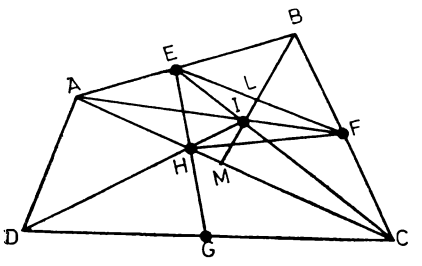

Fig. 1.111

1.111. a) $|BM|$ este mediană în triunghiul ABC, I fiind centru de greutate (intersecția medianelor), $EF \| AC$ și $\|AC\| = 2\|EF\|$, deoarece $|EF|$ este linie mijlocie în triunghiul ABC. Triunghiurile ALI și MIC sînt asemenea în raportul 1/2, deci $\|IL\| = \frac{1}{2}\|MS\| = \frac{1}{6} \cdot \|MB\|$.

b) Dacă P este un punct oarecare avem $\mathbf{PA} + \mathbf{PB} = 2\mathbf{PE}$; $\mathbf{PC} + \mathbf{PD} = 2\mathbf{PG}$. Adunînd avem $\mathbf{PA} + \mathbf{PB} + \mathbf{PC} + \mathbf{PD} = 2(\mathbf{PE} + \mathbf{PG}) = 4\mathbf{PH}$, iar pentru $P \equiv D$ avem $\mathbf{DA} + \mathbf{DB} + \mathbf{BC} + \mathbf{O} = 4\mathbf{DH}$, dar $\mathbf{DA} + \mathbf{DB} + \mathbf{DC} = 3\mathbf{DI}$ (vezi și manualul). Rezultă că D, H, I sînt coliniare și că $4\|DH\| = 3\|DI\|$; dar $\|DH\| = \|DI\| - \|HI\|$, deci $4(\|DI\| - \|HI\|) = 3\|DI\|$ sau $\|DI\| = 4\|HI\|$.

1.112. Considerăm un poligon regulat cu $2n + 1$ laturi înscris într-un cerc de centru O. Vectorii egali care pleacă din O către fiecare vîrf făcîndu-și echilibru au rezultanta lor nulă, deci $\sum_{i=0}^{2n+1} \mathbf{F}_i = 0$. Proiectăm pe direcția unui vector, toți vectorii F_i și scriem că suma proiecțiilor este nulă.

1.113. Două cîte două din funcțiile trigonometrice sinus și tangentă sînt egale în valoare absolută, dar de semn contrar, deci se anulează. Pentru funcția cosinus, n este par; se anulează, de asemenea, două cîte două, iar în caz că n este impar, considerînd că suma vectorilor $\mathbf{OA}_2 + \mathbf{OA}_3 + \ldots + \mathbf{OA}_n$ proiectați pe axa OA, plus vectorul $\mathbf{OA}_1$ este zero, vectorii își fac echilibru.

1.114. $f(x + 6\pi) = 2\operatorname{tg}(x/2 + 3\pi) - 3\operatorname{tg}(x/3 + 2\pi) = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3\operatorname{tg}\frac{x}{3}$.

1.115. $\operatorname{tg}(2x) = \operatorname{tg}[2(x + T)] = 2x + \pi = 2x + 2T$ adică perioada funcției $3\operatorname{tg} 2x$ este $\pi/2$, la fel se arată că perioada funcției $5\operatorname{ctg} 3x$ este $\pi/3$. Cel mai mic multiplu comun al perioadelor $\pi/2$ și $\pi/3$ este π, deci perioada funcției $f(x)$ este π.

1.116. Perioada funcției $\cos\frac{x}{2}$ este 4π deoarece $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{x + T}{2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} + 2\pi = \frac{x}{2} + \frac{T}{2} \Rightarrow T_1 = 4\pi; \sin\frac{x}{3} = \sin\frac{x + T}{3} \Rightarrow \frac{x}{3} + 2\pi = \frac{x}{3} + \frac{T}{3} =$$

$$= T_2 = 6\pi.$$

Perioada funcției $f(x)$ este 12π avînd ca divizori atît pe 4π cît și pe 6π, deoarece 12 este cel mai mic multiplu emun al lui 4 și 6.

1.117. Fie T perioada căutată. Trebuie să avem:

$$3\sin x + \sin 2x = 3\sin(x + T) + \sin(2x + 2T).$$

Pentru $x = 0$ obținem $0 = 3\sin t + \sin 2T = \sin T(3 + 2\cos T) = 0$.
Dar $3 + 2\cos T \neq 0$; iar $\sin T = 0$ dă $T = k\pi$, $k \in Z$.
$f(x + \pi) = 3\sin(x + \pi) + \sin(2x + 2\pi) = -3\sin x + \sin 2x \neq f(x)$,
$f(x + 2\pi) = 3\sin(x + 2\pi) + \sin(2x + 4\pi) = 3\sin x + \sin 2x = f(x)$, deci $T = 2\pi$.

Observație. Funcția $\sin x$ are perioada 2π, iar funcția $\sin 2x$ are perioada π; perioada funcției care conține $\sin x$ și $\sin 2x$ este 2π, adică cea mai mare perioadă care satisface ambele funcții.

1.118. Avem:

a) $f(x) = f(x + T)$ adică $\sin \frac{3x}{4} = \sin \frac{3(x+T)}{4}$, $\frac{3(x+T)}{4} = 2\pi + \frac{3x}{4} \Rightarrow T = \frac{\pi}{3}$.

b) $g(x) = g(x + T)$ adică $\operatorname{ctg}[4(x + T) + \pi/6)] = \operatorname{ctg}(4x + \pi/4)$ deci $4(x + T) + \pi/6 = \pi + 4x + \pi/6 \Rightarrow 4x = \pi \Rightarrow x = \pi/4$.

c) $\cos\left[\frac{2(x+T)}{5}\right] = \cos\frac{2x}{5} \Rightarrow \frac{2(x+T)}{5} = \frac{2x}{5} + 2\pi$ de unde $2x + 2T = 2x + 10\pi = T = 5\pi$.

d) $\operatorname{tg}[3(x + T) + x/4] = \operatorname{tg}[3x + \pi/4]$, deci $3x + 3T + \pi/4 = \pi + 3x + \pi/4$, de unde $T = \pi/3$.

1.119. Deoarece $(\forall)x$ avem $|\sin x| \geqslant 0$, perioada funcției $\sin x$ fiind 2π, perioada funcției $f(x) = |\sin x|$ este redusă. Să arătăm că perioada este π: $|\sin(x + \pi)| = |-\sin x| = |\sin x| = f(x)$.

1.120. Perioada T_1 a funcției $\sin \frac{\pi x}{3}$ va îndeplini condiția: $\frac{(x+T_1)}{3} = \frac{\pi x}{3} + 2\pi$, deci $T_1 = 6\pi$. Perioada T_2 a funcției $\sin \frac{\pi x}{4}$ va îndeplini condiția: $\frac{(x+T_2)}{4} = \frac{\pi x}{4} + 2\pi$, deci $T_2 = 8\pi$. Perioada funcției f (perioada principală) este T, egală cu cel mai mic multiplu comun $(8, 6) = 24$, adică $f(x) = f(x + 24\pi)$.

1.121. Perioada T_1 a funcției $\sin(2\pi x + \pi/3)$ verifică relația $2\pi(x + T_1) + \pi/3 = (2\pi x + \pi/3) + 2\pi$ de unde $T_1 = \pi$. Perioada T_2 a funcției $\sin(3\pi x + \pi/4)$ verifică relația: $3\pi(x + T_2) + \pi/4 = (3\pi x + \pi/4) + 2\pi$, de unde $T_2 = \frac{2}{2}\pi$. Perioada T_3 a funcției $5\pi x$ verifică relația $5\pi(x + T_3) = 5\pi x = 2\pi$ sau $T_3 = 2/5$.

Perioada principală a funcției f va fi cel mai mic număr întreg în care numerele 1, 2/5, 2/3 se cuprind de un număr întreg de ori deci $T = 2\pi$. Avem: $2 : 1 = 2$; $2 : 2/5 = 5$ și $2 : 2/3 = 3$. Prin urmare $f(x) = f(x + 2\pi)$.

1.122. Avem $f(x + T) = |\sin|x + T|| = |\sin|x||$.
$\sin|x + T| = \pm\sin|x|$. Pentru $T = \pi$ avem:
$\sin|x + \pi| = \pm\sin|x|$; idem dacă $T = 2\pi$.
Perioada funcției $f(x)$ este deci π. Avem:
$f(x + \pi) = |\sin|x + \pi|| = |-\sin x| = |\pm\sin x| = |\sin|x||$.

1.123. Fie T perioada funcției $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x} > 0$, deci pentru $x \in \bigcup_{k\in z} [k\pi, k\pi + \pi/2)$. Din $f(x) = f(x + T)$ rezultă $\sqrt{\operatorname{tg} x} = \sqrt{\operatorname{tg}(x + T)}$, de unde $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + T)$ și deci $T = \pi$ care este și perioada funcției tangentă.

1.124. Condiția ca $f(x) = \sin\sqrt{x}$ să fie periodică este ca $(\forall)\ x \in R$ să existe $T \in R,\ T \neq 0$ astfel încît $\sin\sqrt{x+T} = \sin\sqrt{x}$ deci $\sqrt{x+T} = (-1)^k\sqrt{x} + k\pi, k \in Z$ sau $x + T = x + k^2\pi + 2(-1)^k\ k\pi\sqrt{x}$ sau $T = k^2x + 2(-1)^k \cdot k \cdot \pi \cdot \sqrt{x}$. Rezultă că nu putem avea T constantă cînd $x \neq 0$, adică independentă de x, prin urmare funcția $f(x) = \sqrt{\sin x}$ nu este periodică.

1.125. Avem: $f(x+T) = m\sin[a(x+T)+b] - n\cos[2a(x+T)+c]$. Pentru $\sin(ax+b) = \sin[a(x+T_1)+b]$ avem: $aT_1 = 2\pi \leftrightarrow T_1 = \frac{2\pi}{a}$; iar pentru $\cos(2ax+c) = \cos[2a(x+T_2)+c]$ avem $2aT_2 = 2\pi \leftrightarrow T_2 = \frac{\pi}{a}$; dar $T_1 = 2T_2$, deci perioada funcției $f(x)$ este $T = 2\pi/a$. Cel mai mic multiplu comun al lui T_1 și T_2 este T_1, care este perioada.

1.126. $f(-x) = -3(-x)[-\sin(-2x)] + 2(-x)^2\sin|-x| + (-x)[-\operatorname{tg}(-3x)] = f(x)$ deci funcția $f(x)$ este o funcție par

1.127. $f(-x) = -2\operatorname{tg}(-x) + 3\sin(-x) + \operatorname{ctg}(-2x) - \cos(90° + x/2 = -f(x)$, deci $f(x)$ este o funcție impară.

1.128. Avem $f(-x) = -\sin x + \cos a$, deci $f(x) \neq f(-x)$, și $f(x) \neq -f(-x)$, adică funcția nu este nici pară, nici impară.

1.129. $f(-x) = 1 - \sin x \neq f(x)$ și $1 - \sin x \neq -f(x)$.
$g(-x) = 1 - \cos(30° - x) \neq f(x)$, $g(x) = -1 + \cos(30° + x)$ deci $f(-x) \neq -g(x)$. Rezultă că $g(x)$ nu este funcție pară sau impară.

1.130. $f(-x) = 1 - 2\sin(\pi/6 + |-x|) + 3\cos|-x| - |\operatorname{tg}|-2x|| + \arccos|x/2| = f(x)$ deci funcția $f(x)$ este o funcție pară.

1.131. Amplitudinea este $a = 1/2$ și pulsația este $\omega = 2$, iar faza $\varphi = \pi/3$. Perioada este $T = \pi = 2\pi/2 = 2\pi/\omega$.
Studiem graficul pe un interval de amplitudine π.

Fie $\left(-\frac{\pi}{2\omega} - \frac{\varphi}{\omega};\ \frac{3\pi}{2\omega} - \frac{\varphi}{\omega}\right)$ adică $t \in \left(-\frac{5\pi}{12};\ \frac{7\pi}{12}\right)$ și se obține diagrama.

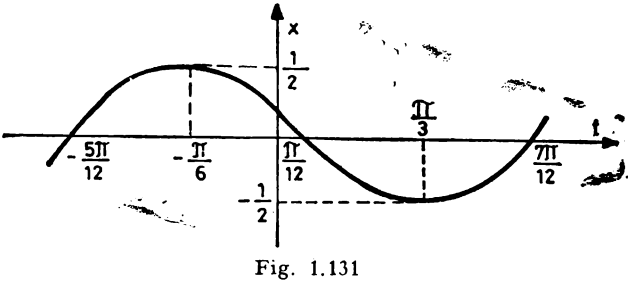

Fig. 1.131

1.132. Perioada funcției f este $T = 2\pi/2 = \pi$, deci să reprezentăm funcția în intervalul $[0, \pi]$.

Reprezentăm mai întîi graficul funcției $h(x) = \sin 2x$, apoi înmulțim ordonatele cu 3 și obținem funcția $g(x) = 3\sin 2x$. Pentru a reprezenta

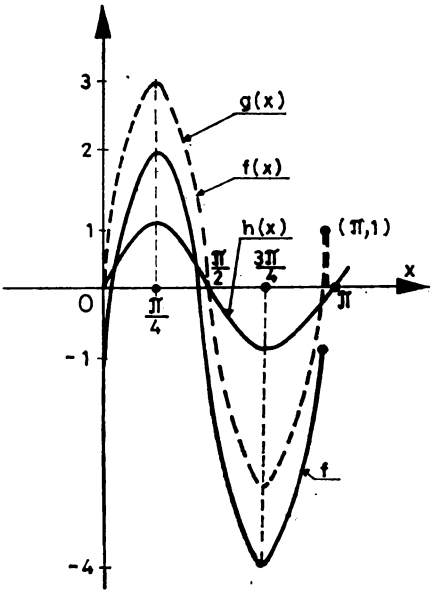

Fig. 1.132

graficul funcției f micșorăm ordonatele funcției $g(x)$ cu o unitate, adică ridicăm axa absciselor cu o unitate și obținem sistemul de axe pentru funcția $f(x)$.

1.133. Ecuația dată se mai scrie: $|\sin x| + |\cos x| = 1$ care are ca soluții $x = 90° k$, $k \in Z$.

a) Pentru $x = 0° \to (1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 1)^2 = 0$; $x = 90° \to (0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 1)^2 = 0$; $x = 180° \to (-1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 1) = 4$; $x = 270° \to (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 - 1)^2 = 4$. Pentru $x = 360°, 450°, \ldots$ rezultatele se repetă

b) Pentru $x = 0° \to (1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 1)^2 = 1$; $x = 90° \to (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 1)^2 = 1$; $x = 180° \to (-1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 1)^2 = 1$; $x = 270° \to (0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 - 1)^2 = 1$. Pentru $x = 360°, 450°, \ldots$ rezultatele se repetă.

1.134. a) Pentru $0 + k\pi \leqslant x \leqslant \pi/2 + k\pi$ și $\pi + k\pi \leqslant x < 3\pi/2 + k\pi$ avem $|\operatorname{tg} x| = \operatorname{tg} x$ și deci $E_1 = 2 \operatorname{tg} x = 0$, satisfăcută numai pentru $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

— Pentru $\pi/2 + k\pi < x \neq \pi + k\pi$ și $3\pi/2 < x < 2\pi + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, avem $|\operatorname{tg} x| = -\operatorname{tg} x$ și deci $E_1 = 0$, identitate.

— Pentru $x = k\pi + \pi/2$, tangenta nu este definită.

b) Conform discuției de la a) rezultă că $E_2 = 0$ pentru $k\pi \neq x < \pi/2 + k\pi$ și $\pi + k\pi \leqslant x < 3\pi/2 + k\pi$, unde $k \in \mathbf{Z}$.

1.135. a) Avem:

$$\frac{\cos x(1-\sin x)}{\cos x - \sin x} - \frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x - \sin x} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x - \sin x} = 1.$$

b) $$\frac{\sin x(1-\cos x)}{\sin^2 x} + \frac{\cos x(1-\sin x)}{\cos^2 x} + \frac{(1-\sin x)(1-\cos x)}{\sin x \cos x} =$$

$$= \frac{\sin x \cos x}{\sin x \cos x} = 1.$$

1.136. Aducem la același numitor și obținem

$$\frac{\dfrac{(1 \pm \sin x)^2 + \cos^2 x}{\cos x(1 \pm \sin x)}}{\dfrac{(1 \pm \cos x)^2 + \sin^2 x}{\sin x(1 \pm \cos x)}} = \frac{\dfrac{1 + \sin^2 x \pm 2 \sin x + \cos^2 x}{\cos x(1 \pm \sin x)}}{\dfrac{1 + \cos^2 x \pm 2 \cos x + \sin^2 x}{\sin x(1 \pm \cos x)}} =$$

$$= \frac{\dfrac{2(1 \pm \sin x)}{\cos x(1 \pm \sin x)}}{\dfrac{2(1 \pm \cos x)}{\sin x(1 \pm \cos x)}} = \operatorname{tg} x, \text{ unde } x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}.$$

1.137. Avem $\left(\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}\right) + \left(\frac{3k\pi}{4} + \frac{7\pi}{16}\right) = k\pi + \frac{\pi}{2}$. Deci

$\left(\frac{k\pi}{4} + \frac{5\pi}{16}\right) + \left(\frac{3k\pi}{4} + \frac{3\pi}{11}\right) = k\pi + \frac{\pi}{2}$. Fie $\alpha + \beta = k\pi + \frac{\pi}{2}$.

Pentru k par avem $\sin \alpha = -\cos \beta$ și $\cos \alpha = -\sin \beta$; iar pentru k impar avem $\sin \alpha = \cos \beta$ și $\cos \alpha = \sin \beta$ deci relația din enunț rămîne valabilă pentru $k \in \mathbf{Z}$.

1.138. În ipoteza că $\sin x \neq -1$ sau $x \neq 2k\pi - \pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$, facem produsul mezilor cu al extremilor $(\sin x + \operatorname{tg} x)(\cos x + \operatorname{ctg} x) = \sin x \cos x + \cos x + \sin x + 1$ și $(1 + \sin x)(1 + \cos x) = 1 + \cos x + \sin x + \sin x + \cos x$.

1.139. $f(k\pi) = \sin k\pi = 0$, $g(k\pi) = \sin 2k\pi = 0$.

$$f\left(2k\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$g\left(2k\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(4k\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$f\left(2k\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2k\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$g\left(2k\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(4k\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Prin urmare funcțiile f și g sînt egale.

1.140. Avem $\frac{\pi}{n} \leqslant \frac{4\pi}{21}$ deci $\cos\frac{\pi}{n} \leqslant \cos\frac{4\pi}{21}$; cum $\frac{4\pi}{21} < \frac{\pi}{3}$ rezultă $\cos\frac{4\pi}{21} > \cos\frac{\pi}{3}$; $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{21}{25} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{21}{4}}$ dar cum $1 - \frac{1}{1 + \frac{21}{4}} > 1 - \frac{1}{1+n}$,

unde $n \geqslant \frac{21}{4}$, rezultă $\cos\frac{4\pi}{21} > 1 - \frac{1}{1+n}$, deci $\cos \geqslant \frac{\pi}{n} > 1 - \frac{1}{1+n}$.

1.141. Ecuația dată fiind bipătrată are rădăcinile opuse două cîte două. $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8} = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$ și $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8} = -\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$, iar ecuația $y^2 - 6y + 1 = 0$ trebuie să aibă rădăcinile $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}$ și $\operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{8}$; $y_1 + y_2 = 6$, $y_1 y_2 = 1$. Rămîne de arătat că $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8} + \operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{8} = 6$ și că $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}\operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{8} = 1$. Însă,

$$\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}} + \frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{1+\cos\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 6 \text{ și}$$

$$\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{1+\cos\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 1.$$

1.142. Din teorema bisectoarei avem: $\frac{\|AB_1\|}{\|B_1C\|} = \frac{\|AB\|}{\|BC\|} = \cos B$ deci $\|AB_1\| = \|B_1C\| \cos B$.

Analog, $\frac{\|AC_1\|}{\|BC_1\|} = \frac{\|AC\|}{\|BC\|} = \cos C$. Din *teorema lui Menelaus* pentru modulele segmentelor avem $\frac{\|DC\|}{\|DB\|} \cdot \frac{\|BC_1\|}{\|AC_1\|} \cdot \frac{\|AC_1\|}{\|CB_1\|} = 1$ sau $\frac{\|DC\|}{\|DB\|} \cdot \frac{\sin C}{\cos B} = 1$. Deci $\|DC\| \cdot \operatorname{tg} C = \|BD\|$.

1.143. Fie un triunghi isoscel ABC cu $\|AB\| = \|BC\| = 1$ și $\sphericalangle B = \pi/5$. Bisectoarea din A taie latura $\|BC\|$ în D și paralela din B la AC în E. Notăm cu I intersecția bisectoarelor și cu K proiecția lui D pe BI, iar L proiecția lui A pe BC.

$\|BL\| = \cos\frac{\pi}{5}$; $\|BI\| = \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$; $\sphericalangle KDI = \frac{\pi}{5}$; $\sphericalangle KID = \frac{3\pi}{10}$ deci $\|KD\| > \|KI\|$; $\|BD\| > \|BK\|$ deoarece $\|BD\| + \|DK\| > \|BK\| + \|KI\|$ adică $\|BL\| > \|BI\|$.

1.144. Deoarece $a \in (0, \pi/4)$, atunci $\operatorname{tg} a \in (0, 1)$. Rezultă $\frac{x^3-3x+2}{x^2-2x+1} = \frac{x-2}{x-1} \in (0; 1)$. Deci. $\frac{x-2}{x-1} > 0$ și $\frac{x-2}{x-1} - 1 < 0$ sau $\frac{-1}{x-1} < 0$. Avem $x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ și $x \in (1, +\infty)$. Deci $x \in (2, \infty)$.

1.145. a) $x_1 = 2\cos^2\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, care verifică. $x_2 = 2\cos^2\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}$ și $x_3 = 2\cos^2\pi = 2$ care verifică.

b) $x_1 = 2\cos^2\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$ care verifică ecuația $4x^3 - 12x + 9x = 0$, $x_2 + \cos^2\frac{3\pi}{6} = 0$ care verifică și $x_3 = 2\cos^2\frac{5\pi}{6} = \frac{3}{2}$.

1.146. a) Pentru $x \in [0, \pi/2]$ evident că $0 \leqslant \cos x(1 - \cos x)$.

$E = \cos x - \cos^2 x$ admite maximul pentru $\cos x = 1/2 \to x = \pi/3$.

$$E_{max} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

b) Deoarece $x \in [0, 1]$ putem nota $x = \sin a$, deci

$a \in (0, \pi/2)$ și $0 \leqslant \sqrt{1-\sin^2 x}\,(1 - \sqrt{1-\sin^2 x}) \leqslant 1/4$ sau $0 \leqslant \cos a(1 - \cos a) \leqslant 1/4$ pentru $a \in [0, \pi/2]$, adică tocmai punctul a).

1.147. Avem $\mathbf{c} = 7\mathbf{i} - \mathbf{j}$; $\mathbf{d} = -\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$; $\mathbf{e} = 25\mathbf{i}$.

1.148. $|\mathbf{a}| = \sqrt{(3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$; $|\mathbf{b}| = \sqrt{5 + (-12)^2} = 13$,

$|\mathbf{c}| = \sqrt{16 + 9} = 5$; $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$;

$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68}$.

1.149. Fie M și N intersecțiile diametrului respectiv cu coardele $|CC_1|$ și $|DD_1|$. Avem $\mathbf{AC} + \mathbf{AC_1} = \mathbf{AM}$, $\mathbf{AD} + \mathbf{AD_1} = \mathbf{AN}$, dar $\mathbf{AM} + \mathbf{AN} = \mathbf{AB}$. Deci $\mathbf{AB} = \mathbf{AC} + \mathbf{AC_1} + \mathbf{AD} + \mathbf{AD_1} = 3\mathbf{AB}$.

1.150. Avem $\|OA\| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$, $\|OB\| = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$.

$\|AB\| = \sqrt{(3 + 2)^2 + (5 + 3)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$.

$$\cos(OAB) = \frac{\|OA\|^2 + \|AB\|^2 - \|OB\|^2}{2\|OA\| \cdot \|OB\|} = \frac{13 + 29 - 34}{2\sqrt{13} \cdot \sqrt{29}} = \frac{4}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{29}}.$$

$$\cos(OBA) = \frac{\|OB\|^2 + \|AB\|^2 - \|OA\|^2}{2\|OA\| \cdot \|AB\|} = \frac{34 + 29 - 13}{2\sqrt{34} \cdot \sqrt{29}} = \frac{25}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{29}}.$$

$$\cos(AOB) = \frac{\|OA\| + \|OB\|^2 - \|AB\|^2}{2\|OA\| \cdot \|OB\|} = \frac{13 + 34 - 29}{2\sqrt{13} \cdot \sqrt{34}} = \frac{9}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{34}}.$$

1.151. Avem: $\mathbf{BC} = \mathbf{DC} - \mathbf{DB}$; $\mathbf{CA} = \mathbf{DA} - \mathbf{DC}$ și $\mathbf{AB} = \mathbf{DB} - \mathbf{DA}$. Relația din enunț devine: $\mathbf{DA}(\mathbf{DC} - \mathbf{DB}) + \mathbf{DB}(\mathbf{DA} - \mathbf{DC}) + \mathbf{DC}(\mathbf{DB} - \mathbf{DA}) = 0$.

Deoarece produsul scalar este distributiv față de scădere, desfacem parantezele și obținem:

$\mathbf{DA} \cdot \mathbf{DC} + \mathbf{DB} \cdot \mathbf{DA} + \mathbf{DC} \cdot \mathbf{DB} - \mathbf{DA} \cdot \mathbf{DB} - \mathbf{DB} \cdot \mathbf{DC} - \mathbf{DC} \cdot \mathbf{DA} = 0$

relație verificată, produsul scalar fiind și comutativ.

1.152. Avem $\mathbf{AB} - \mathbf{AC} = \mathbf{CB}$; $\mathbf{AB} + \mathbf{AC} = 2\mathbf{AD}$, de unde ridicînd la pătrat obținem:

$(\mathbf{AB})^2 - 2\|\mathbf{AB}\| \cdot \|\mathbf{AC}\| + (\|\mathbf{AC}\|)^2 = (\|\mathbf{CB}\|)^2$ și $(\|\mathbf{AB}\|)^2 + \|\mathbf{AB}\| \cdot \|\mathbf{AC}\| + (\mathbf{AC})^2 = 4\mathbf{AD}^2$. Adunăm: $2(\|\mathbf{AB}\|)^2 + (\|\mathbf{AC}\|)^2 = \|\mathbf{BC}\|^2 + 4\|\mathbf{AD}\|^2$, echivalentă cu relația cerută.

1.153. Trebuie să avem $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 0$. Dar $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = (a\mathbf{i} + b\mathbf{j})(b\mathbf{i} - a\mathbf{j}) = ab(\mathbf{i})^2 - ab(\mathbf{j})^2 + b^2\mathbf{ij} - a^2\mathbf{ij} = ab - ab = 0$.

1.154. $\|AB\|^2 = (-9+3)^2 + (-4-4)^2 = 36 + 64 = 100, \|AB\| = 10.$

$\|BC\|^2 = (3+9)^2 + (-4+4)^2 = 12^2, \|BC\| = 12, \|AC\|^2 = (3+3)^2 + (-4-4)^2 = 36 + 64 = 100, AC = 10.$

$\|OA\| = \sqrt{(-3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = 5, \|OB\| = \sqrt{97}, |OC| = 5.$

$\cos(AOx) = -3/5, \cos(BOx) = 9/\sqrt{97}, \cos(COx) = 3/5.$

1.155. Deoarece $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = 0$, rezultă că vectorii $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ formează un triunghi.

Calculînd produsul scalar avem $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 0$ și deci $V \perp \mathbf{a}$.

Analog găsim că $\mathbf{w} \perp \mathbf{b}$ și $\mathbf{u} \perp \mathbf{c}$ și deci triunghiul format de vectorii $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ are laturile perpendiculare pe laturile triunghiului dat, de unde rezultă că au unghiurile egale două cîte două și deci sînt egale.

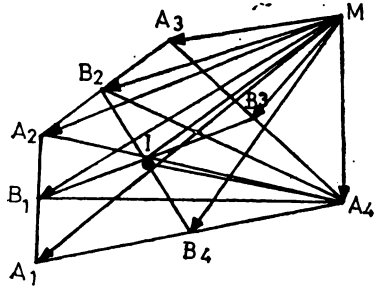

Fig. 1.156

1.156. Din relațiile $\mathbf{MA}_1 + \mathbf{MA}_2 = 2\mathbf{MB}_1$; $\mathbf{MA}_2 + \mathbf{MA}_3 = 2\mathbf{MB}_2$; $\mathbf{MA}_3 + \mathbf{MA}_4 = 2\mathbf{MB}_3$; $\mathbf{MA}_1 + \mathbf{MA}_1 = 2\mathbf{MB}_4$, prin adunare obținem $\sum_{i=1}^{4} \mathbf{MA}_i = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{MB}_i$. Dar $\mathbf{MB}_1 + \mathbf{MB}_3 = 2\mathbf{MI}$ și $\mathbf{MB}_2 + \mathbf{MB}_4 = 2\mathbf{MI}$. Rezultă: $\sum_{i=1}^{4} \mathbf{MA}_i = 4\mathbf{MI} = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{MB}_i$.

Funcţiile trigonometrice ale sumei arcelor, ale arcelor multiple şi jumătăţilor de arce. Transformări în produse trigonometrice. Eliminări. Identităţi şi inegalităţi trigonometrice. Aplicaţii. Sume şi produse trigonometrice

PROBLEME

ENUNŢURI

2.1. Să se deducă pe cale vectorială formula cosinusului diferenţei a două unghiuri.

2.2. Să se deducă pe cale vectorială formula cosinusului sumei a două unghiuri.

2.3. Să se verifice identitatea:

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = (\sin a + \sin b)(\sin a - \sin b).$$

(Admitere în treapta a II-a, Dolj, 1978)

2.4. Să se restrîngă expresia:

$$E = \frac{\sin(\pi/4 + a) - \cos(\pi/4 + a)}{\sin(\pi/4 + a) + \cos(\pi/4 + a)}, \text{ unde } x = k\pi \neq \pi/2,\ k \in \mathbf{Z}.$$

(Admitere în treapta a II-a, Brăila, 1978)

2.5. Să se arate că expresia:

$$E = \sin^2 x + \sin^2(a + x) + 2\cos a \cos x \cdot \cos(a + x)$$

nu depinde de x.

2.6. Se consideră într-un plan un segment de dreaptă AB, o dreaptă (d) şi două axe perpendiculare Ox şi Oy.

Să se arate că suma proiecţiilor pe dreapta (d) a proiecţiilor segmentului pe Ox şi Oy este egală cu proiecţia segmentului $|AB|$ pe dreapta (d).

(G.M.B., 12 562, *C.I.Ţ.*)

2.7. O rază de lumină, căzînd normal pe una din feţele unei prisme, cu indicele de refracţie $\sqrt{2}$, la ieşirea din prismă are aceeaşi deviaţie D ca şi cînd ar fi căzut pe prismă sub un unghi de incidenţă de 45°. Să se afle unghiul A al prismei.

2.8. Să se scrie expresia:

$$E = 1 + \sin^2 x \cos^2 x + m(\sin^4 x + \cos^4 x) - 3m(\sin^6 x + \cos^6 x)$$

în funcție de $u = \sin 2x$, apoi să se determine parametrul m astfel încît E să nu depindă de x.

2.9. Să se arate că dacă $a \neq k\pi + \pi/2$, $b \neq k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$,

$$\frac{2 \sin (a + b)}{\cos(a + b) + \cos (a - b)} = \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b$$

2.10. Să se demonstreze identitatea $\sin^2(x + y) - \sin^2 (x - y) = \sin^2 x \sin^2 y$.

2.11. Să se arate că dacă $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$, atunci:

$$\cos^2(x_1 - x_2) + \cos^2(x_2 - x_3) + \cos^2(x_3 - x_1) =$$

$$= 2 \cos (x_1 - x_2) \cos (x_2 - x_3) \cos (x_3 - x_1) + 1.$$

2.12. Să se arate că dacă $\operatorname{tg} A \neq -1$, $\cos A \neq 0$, atunci:

$$\operatorname{tg} (45° - A) = \frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \sec 2A - \operatorname{tg} 2A.$$

(Numerus, N.G., 356, *C.I.Ț.*)

2.13. Să se arate că dacă $\sin 2a \neq -1$, $\cos a \neq 0$, atunci

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \frac{1 - \sin 2a}{1 + \sin 2a}.$$

2.14. Să se arate că dacă $a \neq k\pi/2 + \pi/4$, $k \in \mathbf{Z}$, atunci

$$\frac{\sin a - \cos a}{\sin a + \cos a} - \frac{\sin a + \cos a}{\sin a - \cos a} = \frac{4}{\operatorname{ctg} a - \operatorname{tg} a} = 2 \operatorname{tg} 2a.$$

$$\frac{\sin a - \cos a}{\sin a + \cos a} + \frac{\sin a + \cos a}{\sin a - \cos a} = \frac{2}{1 - 2\cos^2 a} = 2 \sec 2a.$$ (S.G.M., VI: 453, *C.I.Ț.*)

2.15. Se dă $\operatorname{tg} x = \cos 2y$. Să se calculeze $\sin 2x$ în funcție de $\sin y$. (G.M.B., 13450, *C.I.Ț.*)

2.16. Să se elimine α între relațiile: $x = a \cos \alpha \cos 3\alpha$; $y = b \sin \alpha \sin 3\alpha$

2.17. Să se elimine x între ecuațiile: $\sin x + \cos x = a$, $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x = b$.

2.18. Să se afle condiția ca ecuațiile: $\sin x + \cos x = a$; $\sec x + \operatorname{cosec} x = b$ să fie compatibile.

2.19. Fie a apotema unui poligon regulat cu n laturi ($n > 10$), înscris în cercul de rază unu și fie a_2, a_3, a_4 și a_5 respectiv apotemele poligoanelor care se obțin unind vîrfurile poligonului dat din două în două, din trei în trei, din patru în patru și din cinci în cinci. Să se stabilească relația:

$$a_5 + a_4 - 2a_2(a_2 + a_3) + a + 1 = 0.$$ (S.G.M., E: 64, *C.I.Ț.*)

2.20. În triunghiul oarecare ABC ducem bisectoarea $|AA_1|$. Din A_1 se duce perpendiculara $|A_1M|$ pe AA_1, unde M este pe una din laturile $|AB|$ sau $|AC|$.

Să se arate că $\|AM\| = \dfrac{2\|AB\| \cdot \|AC\|}{\|AB\| + \|AC\|}$.

2.21. Să se calculeze $\cos(a + b)$ știind că $\sin a = -5/13$ și $\cos b = 3/5$, a și b fiind unghiuri în cadranul IV.

2.22. Să se calculeze $\sin(a - b)$, știind că $\sin a = -5/13$, $\cos b = 4/5$, a și b fiind unghiuri din cadranul IV.

2.23. Să se simplifice fracția:

$$E = \frac{\sin(5\pi/2 + x) + \cos 3x + \sin(\pi/2 - 5x)}{\sin 3x - \cos(\pi/2 + x) + \sin 5x}.$$

2.24. Să se arate că $\operatorname{tg} a(1 + \cos 2a) = \cos 2a \operatorname{tg} 2a = \sin 2a$.

2.25. Să se transforme în produse trigonometrice expresia $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x - 1$.

2.26. Să se arate că $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2\left(\dfrac{2}{\sin^2 2x} - 1\right)$.

(Institutul de Construcții, București, 1976)

2.27. Să se elimine x din relațiile $\dfrac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = a$, $\dfrac{\sin 2x}{\sin 2x + \cos 2x} = b$.

2.28. Fie două triunghiuri dreptunghice asemenea, avînd unul din unghiuri de 15°, iar cateta cea mare a triunghiului mic este egală cu cateta mică a triunghiului mai mare. Să se arate că suma ariilor celor două triunghiuri este dublul ariei pătratului cu latura cît lungimea catetelor egale.

(Numerus, 6, 3378, *C.I.Ț.*)

2.29. Se dă $\sin x = 3/5$; $\pi/2 < x < \pi$. Să se calculeze $\sin 4x$ și să se stabilească în ce cadran este extremitatea arcului $4x$.

2.30. Să se arate că dacă numitorii sînt diferiți de zero, atunci:

$$\frac{1 - \sin(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\cos a + \cos b - \sin a - \sin b}{\cos a + \cos b + \sin a + \sin b} = \frac{\cos(a + b)}{1 + \sin(a + b)};$$

$$\frac{1 - \sin(a - b) - \cos(a - b)}{1 - \sin(a - b) + \cos(a - b)} + \frac{\sin a - \sin b}{\cos a + \cos b} = 0. \quad \text{(G.M.B., 13064, } C.I.Ț.\text{)}$$

2.31. Să se arate că:

$\sec 2a + \operatorname{tg} 2a = \operatorname{tg}(\pi/4 + a)$.

$\cos 2a(\operatorname{ctg} a + 1) = (1 + \sin 2a)(\operatorname{ctg} a - 1)$.

(Numerus, 3 454, *C.I.Ț.*)

2.32. Se dă $\operatorname{tg}\dfrac{a}{2} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\dfrac{b}{2} = \sqrt{3}$. Se cere $\sin(a + b)$; $\sin(a - b)$; $\operatorname{tg}(a + b)$.

2.33. Să se arate că $\dfrac{\operatorname{cosec} 2a - \operatorname{ctg} 2a}{\operatorname{cosec} 2a + \operatorname{ctg} 2a} = \operatorname{tg}^2 a$, unde $a \neq k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$. (S.G.M., 1140, *C.I.Ț.*)

2.34. Să se arate că dacă $a \neq k\pi/2 + \pi/8$, atunci $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 2a\right) = \frac{1 + \sin 4a}{\cos 4a}$.

2.35. Să se arate că $\frac{\sin 2a}{1 + \cos a} \cdot \frac{\cos a}{1 + \cos a} = \operatorname{tg} \frac{a}{2}$, unde $a \neq (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

2.36. Să se arate că $\frac{1}{2} \sec\left(\frac{\pi}{4} + a\right) \sec\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \frac{1}{\cos 2a}$.

2.37. Să se arate că $\sec^2 \frac{\pi}{12} + \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{12} = 16$.

2.38. Să se arate că funcția: $\frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}$ ia valoarea $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right)$, și valoarea $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ pentru $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right)$. (G.M.B., 1401, *C.I.Ț.*)

2.39. Să se arate că $\frac{1 + \sin^2 x \operatorname{tg}^2 x - 3 \sin^2 x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} + \cos 2x = 0$.

2.40. Să se arate că dacă $a > b > 0$, $x \in (0, \pi/2)$ și $(a^2 + b^2) = \sin 2x = 2ab$ atunci $\frac{a^n + b^n}{a^n - b^n} + \frac{1 + \operatorname{tg}^n x}{1 - \operatorname{tg}^n x} = 0$. (G.M.B., 12 277, *C.I.Ț.*)

2.41. Să se arate că dacă $a > b > 0$, $x \in (0, \pi/2)$ și $(a^2 + b) \cos x = 2ab$ atunci:

$$\frac{a^{2n} - b^{2n}}{a^{2n} + b^{2n}} = \frac{(1 + \sin x)^n - (1 - \sin x)^n}{(1 + \sin x)^n + (1 - \sin x)^n}.$$

2.42. Să se arate că $\operatorname{tg} 4a(1 - \operatorname{tg}^2 a)(1 - \operatorname{tg}^2 2a) = 4 \operatorname{tg} a$.

2.43. Să se arate că dacă $a > b > 0$, $x \in (0, \pi/2)$, iar $(a^2 + b^2) \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 2ab$, atunci:

1°) $\frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \frac{(1 + \sqrt{\cos x})^n - (1 - \sqrt{\cos x})^n}{(1 + \sqrt{\cos x})^n + (1 - \sqrt{\cos x})^n}$,

2°) Ce devine relația (1°) dacă $x \in (\pi/2, \pi)$? (G.M.B., 12 319, *C.I.Ț.*)

2.44. Să se arate că $\frac{1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x} - \frac{\operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\sin 2x}{2}$, unde $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

2.45. Să se calculeze $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arcsec} 2+\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2.46. Să se calculeze

$$E_1=\sin\left(\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\cos\left(2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}\right).$$

$$E_2=\operatorname{ctg}\left[\operatorname{arctg}(-1)\right]+\sin\left(3\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\cos\left[2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right].$$

2.47. Să se arate că a, b, c sînt arce oarecare, astfel că $\operatorname{tg} a\cdot\operatorname{tg} b\neq 1$, $\operatorname{tg} b\cdot\operatorname{tg} c\neq 1$ și $\operatorname{tg} a\cdot\operatorname{tg} c\neq 1$, atunci:

$$\frac{\sin(a-b)}{\cos(a+b)}+\frac{\sin(b-c)}{\cos(b+c)}+\frac{\sin(c-a)}{\cos(c+a)}+$$

$$\frac{\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)}{\cos(c+b)\cos(b+c)\cos(c+a)}=0.$$ (R.M.F., 112, 1951, *C.I.Ț.*)

2.48. Să se găsească o relație algebrică între unghiurile x, y, z, astfel ca să aibă loc relația

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{y}{2}+\frac{\operatorname{tg} y}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{z}{2}+\operatorname{tg}\frac{z}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1.$$ (Facultatea de matematică, Cluj-Napoca, 1962).

2.49. Ce relație există între a și b dacă $\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b=\operatorname{tg}(a+b)$?

2.50. Să se verifice identitatea; $\sin^2 a+\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 a}-\cos a=2\sin^2\frac{a}{2}$.

(Institutul Politehnic, Iași, 1967)

2.51. Ce relație există între a și b dacă:

$$\sin a\sqrt{1-\sin^2 b}+\sin b\sqrt{1-\sin^2 a}=0.$$

2.52. Să se arate că $16\cos\left(\frac{11\pi}{24}-a\right)\cos\left(\frac{5\pi}{24}-a\right)\cos\left(\frac{17\pi}{24}-a\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{24}-a\right)=-\cos 4a-\sqrt{3}\sin 4a.$ (S.G.M., VII, 267, *C.I.Ț.*)

2.53. Să se arate că

$$E=\frac{\sin^2 a-\sin^2 b}{\cos^2 a-\cos^2 b}+\operatorname{tg}(a+b)=\sqrt{2}\operatorname{tg}(a+b)\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+a-b\right)}{\cos(a-b)}.$$

2.54. Se dă $x\in(0,\pi/2)$. Să se afle:

a) minimul expresiei $E_1=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$.

b) maximul expresiei $E_2=\sin x+\cos x$.

2.55. Să se arate că: $x^2 - 2(1 + 2\operatorname{tg}^2 a)\, x^2 + 1 = (x^2 + 2x \operatorname{tg} a - 1)\,(x^2 - 2x \operatorname{tg} a - 1) = (x^2 + 2x \sec a + 1)\,(x^2 - 2x \sec a + 1) = (x^2 - 2\operatorname{tg}^2 a - 2 \operatorname{tg} a \sec a - 1) - (x^2 - 2 \operatorname{tg}^2 a + 2 \operatorname{tg} a \sec a - 1] = [(x + \operatorname{tg} a + \sec a)\,(x + \operatorname{tg} a - \sec a)\,(x - \operatorname{tg} a + \sec a) \cdot (x - \operatorname{tg} a - \sec a)]$. (G.M.B., 12 270, *C.I.Ţ.*)

2.56. Să se arate că dacă $a^2 + b^2 = 1$ şi $x^2 + y^2 = 1$, atunci

$$|ax \pm by| \leqslant 1;\ |ay \pm bx| \leqslant 1;\ |ab \pm xy| \leqslant 1.$$

2.57. Să se arate că dacă $a \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, atunci

$$E = \frac{\sin 3a}{\sin a} - \frac{\cos 3a}{\cos a} = 2.$$

2.58. Să se stabilească identitatea

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + a\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - a\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{8} - a\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{8} + a\right) = 4 \operatorname{tg} 4a.$$

(S.G.M., VII, *C.I.Ţ.*)

2.59. Să se arate că dacă $13° \leqslant x \leqslant 28°$, atunci:

a) $3/2 \leqslant \sin^2 (4x + 8°) + \cos^2 (4x - 82°) \leqslant 2$;

b) $0 \leqslant \operatorname{ctg}^2 (4x + 8°) + \operatorname{tg}^2 (4x - 82°) \leqslant 2/3$. (G.M.B., 6 662, *C.I.Ţ.*)

2.60. Se dă $\sin a = 4/5$, $\cos b = 5/13$, $\sin c = 24/25$. Să se calculeze $\sin (a + b + c)$.

2.61. Să se arate că dacă $0° \leqslant x \leqslant 10°$, atunci:

$3/4 \leqslant \sin (4x + 60°) \cos (6x - 30°) \leqslant 1$;

$1/2 \leqslant \sin(9x + 45°) \cos (9x - 45°) \leqslant 1$;

$1/2 \leqslant \sin (9x - 45°) \cos (9x + 45°) \leqslant 0$. (G.M.B., 6829, *C.I.Ţ.*)

2.62. Să se arate că dacă $\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b = \operatorname{tg}^2 c$, atunci:

$$\frac{\sin^2 (a + c)}{\sin^2 (b + c)} = \frac{\sin 2a}{\sin 2b}.$$

2.63. Se dă $\operatorname{ctg} x = -3$, $x \in (\pi/2, \pi)$. Să se calculeze $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos \frac{x}{2}$.

(Admitere în treapta a II-a, Caraş-Severin, 1976)

2.64. Să se arate fără tabele că:

$$\sin \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{4} = \sin \frac{5\pi}{12},$$

$$2\left(\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} - 1\right)\left(\sin \frac{5\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12} + 1\right) + 1 = 0,$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} = 4.$$ (G.M.B., 13 297 *C. Ionescu-Ţiu*)

2.65. Să se arate că dacă $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{b}{2}$, atunci:

$$\cos x = \frac{\cos a + \cos b}{1 + \cos a \cdot \cos b}.$$

2.66. Să se arate că dacă $a \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin 2a}{1 + \cos 2a} = \frac{\sin 4a}{1 + 2\cos 2a + \cos 4a} = \operatorname{ctg} a - 2 \operatorname{ctg} 2a.$$

(S.G.M., VI: 218, *C.I.Ţ.*)

2.67. Calculînd rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 2x - 1 = 0$ să se demonstreze egalităţile:

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{8} = \sin \frac{\pi}{4} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{8} \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{8} = 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{8} = 2.$$

2.68. Se dă $\operatorname{ctg} a = -\sqrt{3}$, $a \in (\pi/2, \pi)$. Să se calculeze: $\sin a$, $\cos a$, $\sin 2a$, $\operatorname{tg} a$ şi $\cos \frac{a}{2}$.

2.69. Să se găsească maximul funcţiei $Z = x - y$, dacă $\operatorname{tg} x = 3 \operatorname{tg} y$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2)$. (G.M.B., 8 179, *V. Bărănescu*)

2.70. Se consideră relaţia: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = A$.

$$\cos x_1 = \frac{a_1}{A - a_1}; \quad \cos x_2 = \frac{a_2}{A - a_2}, \ldots, \cos x_n = \frac{a_n}{A - a_n}.$$

Să se arate că dacă $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathrm{R}_+$, atunci $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg}^2 \frac{x_k}{2} = n - 2$.

(G.M.B., 11 933, *L. Tuţescu*)

2.71. Să se arate că:

$$\sqrt{1 + \cos a} + \sqrt{1 - \cos a} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + |\sin a|}.$$

$$\sqrt{1 + \cos a} - \sqrt{1 - \cos a} = \sqrt{2} \left(\left| \cos \frac{a}{2} \right| - \left| \sin \frac{a}{2} \right| \right).$$

2.72. Să se arate că:

$$(1 + \cos a)\left(\sqrt{1 + \sin a} - \sqrt{1 - \sin a}\right) = \sin x \left(\sqrt{1 + \sin a} + \sqrt{1 - \sin a}\right)$$

$$1 + 2 \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} 2a = (1 + \cos 2a) : (1 - \cos 2a) = \operatorname{ctg}^2 a.$$

(Numerus, 3452, *C.I.Ţ.*)

2.73. Să se arate că dacă $0 < a < \pi/2$, atunci $\operatorname{ctg} a > 1 + \operatorname{ctg} 2a$.

2.74. Să se arate că $\sin^2 \frac{\pi}{9} + \sin^2 \frac{2\pi}{9} + \sin^2 \frac{4\pi}{9} = \frac{3}{2}$. (*C.I.Ţ.*)

2.75. Să se arate că:

$$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{8}}+\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{8}}\right)=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{12}}+\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{12}}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}+\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{8}}\right)=\frac{1}{14}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}}+\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{12}}\right)=1.$$

(G.M.B., 12 997, *C.I.Ţ.*)

2.76. Să se arate că funcţia $f(x)=\sqrt{1+\sin 3x}+\sqrt{1-\sin 3x}$ are perioada $2\pi/3$ şi avem:

$$f(x)=\begin{cases}2\cos\dfrac{3x}{2} \text{ dacă } x\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)\\[2ex] 2\sin\dfrac{3x}{2} \text{ dacă } x\in\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\end{cases}.$$

2.77. Să se arate că $\sin^2(\pi/2+a)-\sin^2(\pi/8-a)=\sqrt{2}\cdot\sin a\cdot\cos a$.

2.78. Să se arate că avem relaţia $[\cos a+b)+\cos(a-b)]^2=$ $=4\cos^2a\cos^2b$ din care să se deducă relaţia: $[\sin(a+b)+\cos(a-b)]^2=$ $=(1+\sin 2a)(1+\sin 2b)=4\sin^2(a+\pi/4)\sin x^2(b+\pi/4)$.

(R.M.F., 1950, *C.I.Ţ.*)

2.79. Să se calculeze $\operatorname{tg}\left(\arcsin\dfrac{2}{3}\right)$.

2.80. Să se transforme în produse expresia:

$E=\sqrt{\operatorname{tg}x+\sin x}+\sqrt{\operatorname{tg}x-\sin x}$, unde $\operatorname{tg}x>0$.

şi să se afle valoarea ei pentru $x=60°$. (Institutul Politehnic, Galaţi, 1966).

2.81. Dacă $f(\sin x)=g\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$, să se arate că

$$g(\sin x)=f\left(\frac{2\sin x}{1+\sin^2 x}\right).$$ (S.G.M., VII: 1000, *C.I.Ţ.*)

2.82. Să se afle intervalele de valori ale lui x cuprinse între 0 şi 2π, pentru care au loc simultan identităţile

$$\operatorname{tg}4x=\sqrt{\frac{1-\cos 8x}{1+\cos 8x}} \text{ şi } \sec 6x+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 16x}=0$$ (G.M.B., 2345, *C.I.Ţ.*)

2.83. Să se arate că

$$2\sin\frac{\pi}{2^n}=\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}\ ;\ 2\cos\frac{\pi}{2^n}=\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}},$$

fiecare formulă avînd $(n-1)$ radicali.

2.84. a) Să se arate că dacă $x \in 0,\ \pi/2) \cup [\ ,\ 3\pi/2]$, atunci

$$E_1 = \sqrt{1 + \cos x)\,(1 - \sin x)} + \sqrt{(1 + \sin x)\,(1 - \cos x)} = \sqrt{2}.$$

b) Dacă $x \in [\pi/2,\ \pi] \cup [3\pi/2,\ 2\pi]$, atunci

$$E_2 = \sqrt{(1 + \cos x)\,(1 + \sin x)} + \sqrt{(1 - \sin x)\,(1 - \cos x)} = \sqrt{2}.$$

(C.I.Ţ.)

2.85. Să se arate că dacă $\dfrac{\sin x - \sin a}{\sin x - \sin b} = \dfrac{\cos^2 a \cdot \sin b}{\cos^2 b \cdot \sin a}$, atunci

$$\left(\frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}\right)^2 = \left(\frac{\cos\frac{a}{2} - \sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{2}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\cos\frac{b}{2} - \sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{b}{2} + \sin\frac{b}{2}}\right)^2.$$

2.86. Să se calculeze valoarea expresiei:

$$E = \frac{\cos(a - \pi/4)}{\sin(a + \pi/12)} + \frac{\sin(a - \pi/4)}{\cos(a + \pi/12)}.$$

2.87. a) Să se arate că dacă $x = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} \pm \dfrac{\pi}{6}\right)$ atunci $x^2 - 4x + 1 = 0$.

b) Dacă $x^2 - 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})\,x + 1 = 0$, atunci $x = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{5\pi}{24}\right)$.

(C.I.Ţ.)

2.88. Să se scrie expresia:

$$E = 1 + \sin^2 x \cdot \cos^2 x + m\,(\sin^4 x + \cos^4 x) - 3m\,(\sin^6 x + \cos^6 x)$$

în funcţie de $u = \sin 2x$, apoi să se determine parametrul m astfel încît E să nu depindă de x.

2.89. Să se simplifice fracţia:

$$E = \frac{\sin 5x - \cos(\pi/2 + 3x) + \sin x}{\sin(9\pi/2 + x) + \cos 5x + \sin(\pi/2 + 3x)}.$$

2.90. Se dau expresiile:

$$E_1 = \sin x - \sin 2x + \sin 3x.$$

$$E_2 = \cos x - \sin 2x + \cos 3x.$$

a) Să se calculeze valorile acestor expresii în cazul cînd $\operatorname{tg} x = -3/4$, pentru $\pi/2 < x < \pi$.

b) Să se transforme E_1 şi E_2 în expresii calculabile prin logaritmi.

c) Să se determine valorile lui x pentru care $E_1 = E_2$.

(Institutul Politehnic, Bucureşti, 1968

2.91. Să se arate că dacă $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b$, atunci

$$\cos 2x = \frac{\cos 2a + \cos 2b}{1 + \cos 2a \cdot \cos 2b}.$$

2.92. a) Să se arate că dacă $x \in (\pi/2, \pi/4)$, atunci

$$\frac{\sqrt[4]{1+\sin 2x}-\sqrt[4]{1-\sin 2x}}{1+\sqrt[4]{1+\sin 2x}+\sqrt[4]{1-\sin 2x}} = \operatorname{tg} x - \sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 1}.$$ (G.M.B., 12 335, *C.I.Ţ.*)

2.93. Să se arate că $\operatorname{tg}^4\left(\frac{k}{8} \pm \frac{\pi}{16}\right) + \operatorname{ctg}^4\left(\frac{k\pi}{8} \pm \frac{\pi}{16}\right) + 70 =$

$$= 28\left[\operatorname{tg}^2\left(\frac{k\pi}{8} \pm \frac{\pi}{16}\right) + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{k\pi}{8} \pm \frac{\pi}{16}\right)\right].$$

Semnele se corespund. (G.M.B., 9 318, *C.I.Ţ.*)

2.94. Să se arate că $64 \prod_{k=1}^{9} \sin \frac{k\pi}{20} = \sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5}$.

2.95. Să se arate că $S = \frac{1}{\cos a \cdot \cos (a+b)} + \frac{1}{(\cos(a+b) \cdot \cos(a+2b)} +$

$$+ \cdots + \frac{1}{\cos [a+(n-1)\,b] \cdot \cos (a+nb)} = \frac{\operatorname{tg}(a+nb) - \operatorname{tg} a}{\sin b}.$$

2.96. Să se demonstreze identitatea $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos (k-1)\,\alpha \cdot \cos k\alpha} = \frac{\operatorname{tg} n\alpha}{\sin \alpha}$, unde n este număr natural. (G.M.B., 6 148, *Grecu Eftimie*)

2.97. Să se arate că $\sin \frac{\pi}{14} \cdot \sin \frac{3\pi}{14} \cdot \sin \frac{5\pi}{14} = \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot$

$$\cdot \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{8}.$$ (G.M.B., 8 353, *C.I.Ţ.*)

2.98. Să se arate că dacă $0 < x < \pi$ atunci: $1 + \operatorname{ctg} x \leqslant \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$.

2.99. Să se arate că pentru $0 < x < \pi/4$, expresiile $\sin x$, $\cos x$ și $\cos 2x$ pot fi laturile unui triunghi. (G.M.B., 1808, *C.I.Ţ.*)

2.100. Să se arate că dacă $0 \leqslant x \leqslant 6°$, atunci

$$1 \leqslant 4 \sin (5x + 30°) \cdot \cos (5x - 60°) \leqslant 3 \leqslant 4 \sin (5x + 60°) \cdot$$
$$\cdot \cos (5x - 30°) \leqslant 4.$$ (G.M.B., 14 667, *C.I.Ţ.*)

2.101. Să se arate că $2 \sin 2x \sin 2y < 1 + 8 \sin^2 x \sin^2 y$. (G.M.B., 3383, *C.I.Ţ.*)

2.102. 1° Să se arate că există un triunghi ABC ale cărui laturi să fie exprimate prin numerele: $a = m\sqrt{1+n^2}$; $b = n\sqrt{1+m^2}$; $c = m + n$, unde m și n sînt numere reale și pozitive.

2°. De asemenea, există un triunghi $A_1B_1C_1$ cu laturile $a_1 = m(1+n^2)$; $b_1 = n(1+m^2)$; $c_1 = (m+n)(1-mn)$, unde m și n sînt numere pozitive și $mn < 1$. (G.M.B., 1 055, *C.I.Ţ.*)

2.103. Să se arate că dacă $\pi/2 \leqslant x + y \leqslant \pi$ avem:

$$\sin \frac{3x}{2} \sin \frac{3y}{2} \geqslant \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{3y}{2},$$

$$\sin 2x \cos 2y + \sin 2y \cos 2x \leqslant 0.$$ (Pitagora, VI: 129, *C.I.Ţ.*)

2.104. Să se arate că:

$\cos^2(x-y) \leqslant 4(1-\sin x\cos y)(1-\cos x\sin y)$,

$\sin^2(x-y) \leqslant 4(1+\sin x\sin y)(1-\cos x\cos y)$.

$\cos^2(x+y) \leqslant 4(1-\sin x\cos y)(1+\cos x\sin y)$,

$\sin^2(x+y) \leqslant 4(1-\sin x\sin y)(1-\cos x\cos y)$.

(G.M.B., 8 732, *C.I.T.*)

2.105. Să se arate că $\sin(2a+b) - 2\sin a\cos(a+b) = \sin b$.

2.106. Se dau arcele α și β despre care se știe că:

$\sin\alpha + \sin\beta = 14/65$; $\cos\alpha + \cos\beta = -8/65$;

Să se calculeze: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ și $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

(Inst. de arhitectură, București, 1978)

2.107. Să se arate că $\dfrac{1}{2}\left(\sin\dfrac{3\pi}{11} + \sin\dfrac{4\pi}{11}\right) = \cos\dfrac{2\pi}{11}\sin\dfrac{5\pi}{11}$.

(*C.I.T.*)

2.108. Să se arate că $\sin\dfrac{\pi}{24}\sin\dfrac{5\pi}{24}\sin\dfrac{7\pi}{24}\sin\dfrac{11\pi}{24} = \dfrac{1}{16}$.

2.109. Să se arate că:

a) $\sin\dfrac{\pi}{14} + \cos\dfrac{2\pi}{14} - \sin\dfrac{3\pi}{14} = \dfrac{1}{2}$.

b) $\sin\dfrac{\pi}{14}\cos\dfrac{2\pi}{14} - \sin\dfrac{\pi}{14}\sin\dfrac{3\pi}{14} - \cos\dfrac{2\pi}{14}\sin\dfrac{3\pi}{14} = -\dfrac{1}{2}$.

c) $\sin\dfrac{\pi}{14}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{14}\cdot\sin\dfrac{3\pi}{14} = \dfrac{1}{8}$. (G.M.B., 10 580, *C.I.T.*)

2.110. Dîndu-se $\sin a + \sin b = p$, $\cos a + \cos b = q$ să se calculeze $\sin(a+b)$ și $\cos(a+b)$.

2.111. Se dă $\operatorname{tg} x = b/a$. Să se arate că: $a\cos 2x + b\sin 2x = a$.

(Admitere, I.P. București, 1978)

2.112. Să se arate că dacă numitorii sînt diferiți de zero, avem

$$\frac{1-\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\cos a+\cos b-\sin a-\sin b}{\cos a+\cos b+\sin a+\sin b} = \frac{\cos(a+b)}{1+\sin(a+b)}.$$

$$\frac{1-\sin(a+b)-\cos(a-b)}{1-\sin(a-b)+\cos(a-b)} + \frac{\sin a-\sin b}{\cos a+\cos b} = 0.$$

(G.M.B13 064,., *C.I.T.*)

2.113. Să se afle cel mai mic unghi pozitiv x care satisface ecuația:

$$\frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 2x} = \frac{\operatorname{ctg} 3x}{\operatorname{ctg} 4x}.$$

2.114. Să se arate că

$$\sin^2 4x + \sin^2 3x - \cos^2 2x - \cos^2 x + 2 \cos x \cos 2x \cos 5x = 0.$$

2.115. Să se arate că avem

$$\cos 5a + 3 \cos 7a + 3 \cos 9a + \cos 11a = 8 \cos^3 a \cos 8a.$$

2.116. Să se arate fără tabele că:

1) $\sin 10° - \cos 20° + \cos 40° = 0.$

2) $\operatorname{ctg} 10° + \operatorname{tg} 20° - \operatorname{tg} 40° = 3\sqrt{3}.$

3) $\operatorname{tg} 10° + \operatorname{ctg} 20° - \operatorname{ctg} 40° = \sqrt{3}.$ (G.M.B., 10 042, *C.I.T.*)

2.117. a) Să se arate că dacă $a + b \neq 2k\pi - \pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$, atunci

$$\frac{1 + \sin(a+b) - \cos(a+b)}{1 + \sin(a+b) + \cos(a+b)} = \frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b};$$

b) $$\frac{\cos a + \cos b + \sin a - \sin b}{\cos a + \cos b - \sin a + \sin b} = \frac{1 + \sin(a-b)}{\cos(a-b)},$$

unde $a + b \neq (2k+1)\pi$.

2.118. Să se arate fără tabele că:

1) $\operatorname{tg}^2 20° + \operatorname{tg}^2 40° + \operatorname{tg}^2 80° = 33.$

2) $\operatorname{tg} 20° \cdot \operatorname{tg} 30° \cdot \operatorname{tg} 40° = \operatorname{tg} 10°.$

3) $\operatorname{tg} 15° \cdot \operatorname{tg} 25° \cdot \operatorname{tg} 35° = \operatorname{tg} 5°.$ (G.M.B., 10046, *C.I.T.*)

2.119. Să se transforme în produse $\sin \frac{5\pi}{24} + \cos \frac{11\pi}{24}$;

$$\sin \frac{5\pi}{24} + \cos \frac{11\pi}{24} + \sin \frac{\pi}{6}.$$

2.120. a) Să se transforme în produs expresia

$$E(x) = \cos x + 2 \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + 2 \cos 5x + \cos 6x.$$

b) Să se deducă apoi relația

$$\cos 20° + 2 \cos 40° - \sin 10° = 4\sqrt{3} \cos^2 10° \sin 20°.$$

(G.M.B., 10 421, *C.I.T.*)

2.121. Să se arate că oricare ar fi x,

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \frac{\cos 2x \sin \frac{3x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

2.122. Să se arate că

$$\sin(a-b)\sin(a+b) + \sin(b-c)\sin(b+c) + \sin(c-a)\sin(c+a) = 0$$

$$\sin(a-b)\cos(a+b)+\sin(b-c)\cos(b+c)+$$
$$+\sin(c-a)\cos(c+a)=0. \quad \text{(S. G. M., VI:1053, } C.I.Ț.\text{)}$$

2.123. Să se arate că

$$4\sin a\sin b\sin c\sin d+4\cos a\cos b\cos c\cos d=\cos(a+b+$$
$$+c+d)+\cos(a+b-c-d)+\cos(a-b+c-d)+$$
$$+\cos(-a+b+c-d).$$

2.124. Să se arate că

$$\sin^2(a+b-c)-\sin^2(a-b+c)+\sin(a+b-c)\sin(a-$$
$$-b+c)+\sin^2 a-\sin^2(b-c)+\sin 2a\sin(2b-2c).$$

(Pitagora, VII: 63, *C.I.Ț.*).

2.125. Se dau arcele a și b despre care se știe că $\sin a+\sin b=14/65$ și $\cos a+\cos b=-8/165$. Să se calculeze $\operatorname{tg}(a+b)$ și $\operatorname{tg}\dfrac{a-b}{2}$.

(Inst. de Arhitectură, București, 1938)

2.126. Să se calculeze fără tabele:

$$E_1=\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{24}-\sin\frac{5\pi}{24}\right)-\sin\frac{\pi}{8}\left(\sin\frac{\pi}{24}-\cos\frac{5\pi}{24}\right);$$

$$E_2=\sin\frac{\pi}{8}\left(\sin\frac{\pi}{24}+\cos\frac{7\pi}{24}\right). \quad \text{(G.M.B., 13 108, } C.I.Ț.\text{)}$$

2.127. Să se arate că dacă numitorul este diferit de zero, atunci:

$$\frac{\sin ax+\sin(a+b)x+\sin(a+2b)x+\sin(a+3b)x}{\cos ax+\cos(a+b)x+\cos(a+2b)x+\cos(a+3b)x}=\operatorname{tg}\left(a+\frac{3b}{2}\right)x.$$

2.128. Să se arate fără tabele că:

$$2(\sin 36^\circ+\cos 18^\circ)=\operatorname{ctg}18^\circ;$$

$$1+2(\sin 18^\circ+\cos 24^\circ+\sin 42^\circ)=\frac{1}{2\sin 6^\circ}. \quad \text{(G.M., 16 418, } C.I.Ț.\text{)}$$

2.129. Să se arate că dacă $x\neq 2k\pi+\pi/3$, $k\in\mathbf{Z}$, atunci

$$\frac{\sin x+\sin 2x}{2\cos x-1}=\sin x\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right).$$

2.130. Se dă expresia $E(x)=\dfrac{\cos 4x+2\cos 6x+\cos 8x}{\sin 4x+2\sin 6x+\sin 8x}$.

a) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.

b) Să se calculeze valoarea expresiei $E(x)$ pentru $x=\pi/72$.

(Instit. de arhitectură, București, 1980)

2.131. Să se arate că $E = \sin x + \cos 2x + \sin 3x + \cos 4x =$

$$= 4 \cos x \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5x}{2}\right).$$

2.132. Să se stabilească identitatea:

$$E = 2^7 \sin\left(\frac{7\pi}{16} + a\right)\sin\left(\frac{7\pi}{16} - a\right)\sin\left(\frac{5\pi}{16} + a\right)\sin\left(\frac{5\pi}{16} - a\right)\cdot$$

$$\cdot \sin\left(\frac{3\pi}{16} + a\right)\sin\left(\frac{3\pi}{16} - a\right)\sin\left(\frac{\pi}{16} - a\right) = \cos 8a.$$

(Pitagora, *VI*: 61, *C.I.Ţ.*)

2.133. Să se afle intervalele de valori ale lui x cuprinse în intervalul $(0,2\pi)$ pentru a avea simultan egalităţile

$$\operatorname{tg} 4x = \sqrt{\frac{1-\cos 8x}{1+\cos 8x}} \text{ şi } \sec 6x + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 6x} = 0. \quad \text{(G.M.B., 2345, } C.I.Ţ.\text{)}$$

2.134. Să se arate că pentru $k \in \mathbf{Z}$, avem

$$\cos\frac{5k\pi}{16}\cdot\cos\frac{4k\pi}{16} = \cos\frac{7k\pi}{16}\cdot\cos\frac{11k\pi}{16}.$$

2.135. Să se arate că

a) $E_1 = \cos^2(a-b) - \cos^2(a+b) = \sin 2a \cdot \sin 2b.$

b) $E_2 = \cos^2 a + \cos^2 b = 1 + \cos(a+b)\cos(a-b).$

(S.G.M., 3, 1948, *C.I.Ţ.*)

2.136. Să se arate că $\sin 11° + \sin 25° - \cos 29° - \cos 43° + \cos 7° = 0$

2.137. Să se arate că

a) $1 - \operatorname{tg}^2 x = 2 \operatorname{ctg} 2x (\operatorname{cosec} 2x - \operatorname{ctg} 2x).$

b) $\operatorname{ctg}^2 x - 1 = 2 \operatorname{ctg} 2x (\operatorname{cosec} 2x + \operatorname{ctg} 2x).$

c) $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{\operatorname{cosec} 2x - \operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{cosec} 2x + \operatorname{ctg} 2x}.$ (S.G.M., VI: 257, *C.I.Ţ.*)

2.138. Să se arate că există relaţiile

1°. $[\cos(a+b) + \cos(a-b)]^2 = (1+\cos 2a)(1+\cos 2b) =$
$= 4\cos^2 a \cdot \cos^2 b.$

2°. $[\sin(a+b) + \cos(a-b)]^2 = (1+\sin 2a)(1+\sin 2b) =$
$= 4\sin^2(a+\pi/4)\sin^2(b+\pi/4).$ (R.M.F., 93, 1950, *C.I.Ţ.*)

2.139. Să se arate că $\sin(a-b) + \sin(a-c) + \sin(b-c) =$

$$= 4\cos\frac{a-b}{2}\sin\frac{a-c}{2}\cos\frac{b-c}{2}.$$

2.140. Să se arate că

a) $E = \sin(4x - 10°)\cos(4x - 30°) + \sin(11x + 40°)\cos(11x +$
$+ 60°) = \sin(15x - 150°)\sin(7x - 20°).$

b) Dacă $12° - x \leqslant 20°$, atunci $E \geqslant \sqrt{3}/4$.

c) Dacă $x = 20°$, atunci $4E = \sqrt{3}$. (G.M.B., 6449, *C.I.Ţ.*)

2.141. Să se arate că dacă $0 \leqslant x \leqslant \pi/18$, atunci $1/4 \leqslant \sin(3x + \pi/6)\cos(3x - \pi/3) \leqslant 3/4 \leqslant \sin(3x + \pi/3)\cos(3x - \pi/6) \leqslant 1$. (G.M.B., 11 293, *C.I.Ţ.*

2.142. Să se arate că dacă $13° \leqslant x \leqslant 28°$, avem

a) $3/2 \leqslant \sin^2(4x + 8°) + \cos^2(4x - 82°) \leqslant 2$.

b) $0 \leqslant \operatorname{ctg}^2(4x - 8°) + \operatorname{tg}^2(4x - 82°) \leqslant 2/3$. (G.M.B., 6662, *C.I.Ţ.*)

2.143. Să se arate că dacă $10° \leqslant x \leqslant 15°$, atunci

a) $-1 \leqslant \sin(12x - 60°)\cos(12x + 30°) \leqslant 3/4$.

b) $1/2 \leqslant \sin(18x + 45°)\cos(18x - 45°) \leqslant 1$.

c) $-1/2 \leqslant \sin(18x - 45°)\cos(18x + 45°) \leqslant 0$. (G.M.B., 6895, *C.I.Ţ.*)

2.144. Să se arate că $(1 + \operatorname{cosec} x)(1 + \sec x) \geqslant 3 + 2\sqrt{2}$, unde $0 < x < \pi/2$.

2.145. Să se arate că dacă $x \neq k\pi/2$, k întreg, atunci

$$\frac{\sin 2x}{(1 - \sin x)(1 + \cos x)} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$ (G.M.B., 10 347, *C.I.Ţ.*)

2.146. Să se arate că $E(x) = \cos x + 2\cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + 2\cos 5x + \cos 6x = 8\cos\frac{7x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$. (G.M.B., 10421, *C.I.Ţ.*

2.147. Să se arate că dacă $b = a \operatorname{ctg} \alpha$, atunci

$$\frac{a\sin x + b\cos x}{a\cos x + b\sin x} + \frac{a\sin x - b\cos x}{a\cos x - b\sin x} = \frac{\sin 2x \cos 2\alpha}{\sin(x + \alpha)\sin(x - \alpha)}$$

2.148. a) Să se arate că oricare ar fi x real, atunci

$$\cos x + \cos 3x + \cos 7x + \cos 9x = 4\cos x \cos 3x \cos 5x.$$

b) Din relația precedentă să se deducă egalitatea

$$\frac{1}{2} + \cos\frac{2\pi}{9} = \cos\frac{\pi}{9}\left(1 + 2\sin\frac{\pi}{18}\right).$$

c) Folosind rezultatele obținute și notînd $\cos\frac{\pi}{9} = t$, să se arate că $16t^4 + 4t + 1 = 4t^2(2t + 3)$. (G.M.B., 10 401, *C.I.Ţ.*)

2.149. Să se arate că dacă numitorii sînt diferiți de zero, atunci:

$$\frac{\sin a + \cos(2b - a)}{\cos a - \sin(2b - a)} = \frac{1 + \sin 2b}{\cos 2b}.$$

2.150. Să se arate că oricare ar fi a_1, a_2, b_1, b_2 avem relațiile:

$E_1 = \cos a_1 \cdot \cos (a_1 + a_2 + b_2) - \cos b_1 \cdot \cos (b_1 + a_2 + b_2) =$

$= \cos (a_1 + a_2) \cdot \cos (a_1 + b_2) - \cos (b_1 + b_2) \cdot \cos (b_1 + a_2)$,

$E_2 = \cos a_1 \cdot \sin (a_1 + a_2 + b_2) + \cos b_1 \cdot \sin (b_1 + a_2 + b_2) =$

$= \sin (a_2 + b_2) + \cos (a_1 + a_2) \cdot \sin (a_1 + b_2) + \cos (b_1 + b_2) \cdot$

$\cdot \sin (b_1 + a_2)$. (R.M.F., 230, *C.I.Ț.*)

2.151. Să se determine condițiile în care relația $\sin x + \sin y = 2 \sin (x + y)$ se poate pune sub forma: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{y}{2} = \frac{1}{3}$.

2.152. Să se arate că:

$\sin^2 a + \sin^2 b + \cos (a + b) \cdot \cos (a - b) = 1$,

$\sin^2 (a + b) + \sin^2 (a - b) + \cos 2a \cos 2b = 1$,

$\cos^2 a + \cos^2 b - \cos (a + b) \cos (a - b) = 1$,

$\cos^2 (a + b) + \cos^2 (a - b) - \cos 2a \cos 2b = 1$.

Una din relații fiind stabilită, celelalte rezultă.
(G.M.B., 9377, *C.I.Ț.*)

2.153. Să se arate că $8 \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} = 1$;

$$8 \sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{14} \sin \frac{5\pi}{14} = 1.$$

2.154. Să se arate că $8 \sin a \sin b \cos (a + b) \leqslant 1$.
(R.M.F., 1034, *C.I.Ț.*)

2.155. Să se demonstreze identitatea: $E = \frac{\cos 3x}{\sin 2x \cdot \sin 4x} +$

$$+ \frac{\cos 5x}{\sin 4x \cdot \sin 6x} + \frac{\cos 7x}{\sin 6x \cdot \sin 8x} = \frac{\sin 3x \cdot \cos 5x}{\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 8x}$$

(G.M.B., 14 869, *Olimpia Popescu*)

2.156. Să se arate că dacă $x > y > 0$ și $x + y < \pi$, atunci

a) $\sin (x \pm y) > \sin x - \sin y > 0$,

b) $\frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} < \frac{(1 + \sin x) \sin^2 \frac{x}{2}}{(1 + \sin y) \sin^2 \frac{y}{2}}$. (G.M.B., 9 767, *C.I.Ț.*)

2.157. Se dă $\sin x = \sin y$. Să se afle relația dintre x și y.

2.158. Ce relație există între x și y dacă $\operatorname{tg} x \cos y = \cos x \operatorname{tg} y$, iar $\cos x \neq 0$, $\cos y \neq 0$. (G.M.B., 4 461, *C.I.Ț.*)

2.159. Să se arate că dacă $\sin 2(a+c) = n \sin 2b$, atunci:

$$\operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{n+1}{n-1}\operatorname{tg}(a-b+c).$$

2.160. Să se arate că dacă $0 < x < y < \pi/4$, atunci

$$\frac{\sin x - \cos x}{\sin y - \cos y} > \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 y - \cos^2 y} > \frac{\cos^2 x}{\cos^2 y} > \frac{(\sin x + \cos x)^2}{(\sin y + \cos y)^2} >$$

$$> \frac{\sin x \cos x}{\sin y \cos y} > \frac{\sin^2 x}{\sin^2 y}. \qquad \text{(G.M.B., 9 718, } C.I.Ț.\text{)}$$

2.161. Să se arate că dacă $0 < b < a < \pi/8$, atunci

$$\frac{\cos 2a}{\cos 2b} < \frac{\sin a \cos a}{\sin b \cos b} < \frac{\sqrt{1+\sin 4a} - \sqrt{\cos 4a}}{\sqrt{1+\sin 4b} - \sqrt{\cos 4b}}.$$

(G.M., 10 651, 1970, *C.I.Ț.*)

2.162. Să se arate că dacă suma a doua arce variabile pozitive este constantă și mai mică decît $\pi/2$, produsul tangentelor acestor arce este maximum cînd arcele sînt egale.

2.163. a) Să se arate dacă x și y sînt reale, avem $\sin x - \sin y \leqslant \frac{3}{2}\cos(x-y)$.

b) În ce caz avem egalitate? Se va verifica egalitatea pentru valorile lui x cuprinse între 0 și 2π. (G.M.F.B., 6104, *C.I.Ț.*)

2.164. Să se arate că dacă $7 \sin a = 3 \sin(a+b)$, $\sin a \neq 0$, $\operatorname{tg}\frac{b}{2} \neq 0$, atunci $2 \operatorname{tg}\left(\frac{2a+b}{2}\right) = 5 \operatorname{tg}\frac{b}{2}$ și reciproc. (G.M.B., 13 453, *C.I.Ț.*)

2.165. Să se arate că dacă $5 \sin a = \sin(a+2b)$, atunci $2\operatorname{tg}(a+b) = 3 \operatorname{tg} b$.

2.166. Să se arate că dacă $\frac{a}{\cos x} = \frac{b}{\cos(x+y)} = \frac{c}{\cos(x+2y)} = \frac{d}{\cos(x+3y)}$, atunci $\frac{a+c}{b} = \frac{b+d}{c}$.

2.167. Din relațiile $\frac{\cos\alpha}{a_1} = \frac{\cos 2\alpha}{a_2} = \frac{\cos 3\alpha}{a_3} = \frac{\cos 4\alpha}{a_4}$ să se deducă relația: $a_1a_3 - a_2a_4 = a_2^2 - a_3^2$.

2.168. Să se arate că dacă $\frac{\sin x}{a_0} = \frac{\sin(x+h)}{a_1} = \frac{\sin(x+2h)}{a_2} = \frac{\sin(x+3h)}{a_3}$, atunci $a_1(a_1+a_3) = a_2(a_0+a_2)$.

2.169. Să se arate că dacă $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \pi/2$, atunci

$$\sin^2 a_1 + \sin a_2 \sin (2a_1 + a_2) + \sin a_3 \sin (2a_1 + 2a_2 + a_3) + \ldots + \sin a_{n-1} \sin (2a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_{n-2} + a_{n-1}) + \sin^2 a_n = 1.$$

(G.M.B, 9383, *C.I.Ţ.*).

2.170. Să se elimine a şi b din ecuaţiile:

$$x \cos a + y \sin a = p, \quad x \cos b + y \text{ si } \quad b = g,$$

$$x_0 \cos \frac{a+b}{2} + y_0 \sin \frac{a+b}{2} = p \cos \frac{a-b}{2}.$$

2.171. Să se arate că $(\forall)$ x, y avem $\cos^2 (x - y) \leqslant 4(1 - \sin x \cos y) \cdot (1 - \cos x \sin y)$. (G.M.B., 14 568, Concurs elevi, Braşov, 1979)

2.172. Să se demonstreze că oricare ar fi x şi y avem

$$\cos (x + y) + \sin x + \sin y \leqslant 3/2. \qquad \text{(G.M.B., 3 392, } C.I.Ţ.\text{)}$$

2.173. Să se arate că dacă $0 \leqslant a \leqslant \pi/2$ şi $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$, atunci

$$-2 \leqslant \frac{\cos a - \cos b}{\sin \dfrac{a-b}{2}} \leqslant 0.$$

2.174. Să se arate că dacă $a, b \in [0, \pi/2)$, atunci:

$$\operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \leqslant \frac{1}{2} (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b). \qquad (C.I.Ţ)$$

2.175. a) Să se arate că avem $\dfrac{\cos x_1 + \cos x_2}{2} \leqslant \cos \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, unde x_1 şi x_2 sînt numere din intervalul $(0, \pi/2)$.

b) Să se arate că, oricare ar fi numerele $x_i (i = 1, 2, \ldots, 8)$ din intervalul $(0, \pi/2)$, atunci: $\dfrac{1}{8} \sum\limits_{i=1}^{8} \cos x_i \leqslant \cos \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{8} x_i}{8}$.

2.176. Să se demonstreze că $2 \sin 2x \sin 2y < 1 + 8 \sin^2 x \sin^2 y$.

(G.M.B., 3 383, *C.I.Ţ.* 1959)

2.177. Să se arate că $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sin 2^k x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x$.

2.178. Să se arate fără tabele că:

1) $\sin^4 \dfrac{\pi}{16} + \sin^4 \dfrac{3\pi}{16} + \sin^4 \dfrac{5\pi}{16} + \sin^4 \dfrac{7\pi}{16} = \dfrac{3}{2}$.

2) $\operatorname{tg}^2 \dfrac{\pi}{12} + \operatorname{tg}^2 \dfrac{5\pi}{12} = 14$.

3) $\sin \dfrac{\pi}{24} \sin \dfrac{5\pi}{24} \sin \dfrac{7\pi}{24} \sin \dfrac{11\pi}{24} = \dfrac{1}{16}$.

4) $\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}=2\cos\frac{\pi}{22}\sin\frac{7\pi}{22}$.

5) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=\frac{1}{8}$. (G.M.B., 12 204, *C.I.T.*)

2.179. Să se arate că $(1+\sec 2a)(1+\sec 4a)\ldots(1+\sec 2^n a)=\frac{\operatorname{tg} 2^n a.}{\operatorname{tg} a}$.

2.180. Să se calculeze suma $S=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{tg}(2k-1)x\cdot\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}(2k+1)x$.

(R.M.T., 541, *E. Bastius*)

2.181. Să se calculeze suma $S=\sin a+\sin 2a+\sin 3a+\ldots+\sin na$.

2.182. Să se calculeze suma $S=\sin a+\sin(a+h)+\sin(a+2h)+\ldots+\sin[a+(n-1)h]$.

2.183. Să se arate fără tabele că

$$\frac{1}{2}+\cos\frac{2\pi}{19}+\cos\frac{4\pi}{19}+\cos\frac{6\pi}{19}+\cos\frac{8\pi}{19}=\cos\frac{\pi}{19}+\cos\frac{3\pi}{19}+$$

$$+\cos\frac{5\pi}{19}+\cos\frac{7\pi}{19}+\cos\frac{9\pi}{19}.$$ (G.M.B., 9046, *C.I.T.*)

2.184. Să se arate că

a) $2\left(\cos\frac{\pi}{14}+\sin\frac{2\pi}{14}+\cos\frac{3\pi}{14}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{14}$.

b) $2\left(\cos\frac{\pi}{22}+\sin\frac{2\pi}{22}+\cos\frac{3\pi}{22}+\sin\frac{4\pi}{22}+\cos\frac{5\pi}{22}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{22}$.

c) $2\left(\cos\frac{\pi}{26}+\sin\frac{2\pi}{26}+\cos\frac{3\pi}{26}+\sin\frac{4\pi}{26}+\cos\frac{5\pi}{26}+\sin\frac{6\pi}{26}\right)=$

$$=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{26}.$$

2.185. Să se arate că dacă $0<x<\pi/2$, atunci

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k}=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-\operatorname{ctg}x.$$ (*C.I.T.*)

2.186. Să se arate că

a) $\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{2n+1}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2(2n+1)}$.

b) $\sum_{k=0}^{n}\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n+3}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{4n+3}=\frac{1}{4\sin\frac{\pi}{2(4n+3)}}$

c) $\sum_{k=1}^{n} \cos \frac{(2k-1)\pi}{4n+1} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{2k\pi}{4n+1} = \frac{1}{4 \sin \frac{\pi}{2(4n+1)}}$.

(G.M., 16 166, *C.I.T.*)

2.187. Să se calculeze suma $S = \sin^4 \frac{\pi}{32} + \sin^4 \frac{3\pi}{32} + \ldots + \sin^4 \frac{15\pi}{32}$.

2.188. Să se arate că $S_1 = \sum_{k=1}^{15} \sin^2 \frac{k\pi}{8} = 8$ și $S_2 = \sum_{k=1}^{15} \cos^2 \frac{k\pi}{8} = 7$.

(G.M., 16 166, *C.I.T.*)

2.189. Să se arate că pentru k întreg diferit de multiplu de patru avem $\cos^4 \frac{9k\pi}{16} + \cos^4 \frac{11k\pi}{16} + \cos^4 \frac{13k\pi}{16} + \cos^4 \frac{15k\pi}{16} + \cos^4 \frac{17k\pi}{16} +$

$$+ \cos^4 \frac{19k\pi}{16} + \cos^4 \frac{21k\pi}{16} + \cos^4 \frac{23k\pi}{16} = 3.$$

2.190. Să se arate că oricare ar fi x real avem

$$\sum_{k=1}^{16} \cos^4\left(x + \frac{k\pi}{8}\right) = 6; \quad \sum_{k=1}^{24} \sin^4\left(x + \frac{k\pi}{12}\right) = 9, \ k \in \mathbf{N}.$$

(G.M.B., 12 371, *C.I.T.*)

Generalizare.

2.191. Să se calculeze $S_1 = \sum_{k=1}^{31} \sin^4 \frac{k\pi}{64}$; $S_2 = \sum_{k=1}^{31} \sin^4 \frac{k\pi}{64}$, $k \in \mathbf{N}$.

(G.M.B., 12 372, *C.I.T.*)

SOLUȚII ȘI INDICAȚII

2.1. Se va lua în planul axelor xOy vectorii $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$ de aceeași parte a axei Ox și fie α și β unghiurile pe care le fac vectorii $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$, respectiv, cu sensul pozitiv al axei Ox.

Cei doi vectori $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$ vor avea expresiile:

$$\mathbf{a} = a(\cos x \cdot \mathbf{i} + \sin x \cdot \mathbf{j}); \quad \mathbf{b} = b(\cos \varphi \cdot \mathbf{i} + \sin \beta \cdot \mathbf{j}).$$

Se calculează apoi unghiul dintre cei doi vectori și avem

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{a \cdot b} = \frac{ab(\cos \alpha \cdot \mathbf{i} + \sin \alpha \cdot \mathbf{j})(\cos \beta \cdot \mathbf{i} + \sin \beta \cdot \mathbf{j})}{ab} =$$

$$= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

2.2. Se va lua în planul axelor xOy vectorii $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$ care fac cu sensul pozitiv al axei Ox, rsspectiv, unghiurile α și $(-\beta)$.

Cei doi vectori se vor exprima astfel

$$\mathbf{a} = a(\cos \alpha \cdot \mathbf{i} + \sin \alpha \cdot \mathbf{j}), \qquad \mathbf{b} = b(\cos \beta \cdot \mathbf{i} + \sin \beta \cdot \mathbf{j}).$$

Se calculează apoi cosinusul unghiului dintre vectorii **a** și **b** și obținem:

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{a\cdot b}=\frac{ab\,(\cos\alpha\cdot\mathbf{i}+\sin\alpha\cdot\mathbf{j})\,(\cdot\,(\cos\beta\cdot\mathbf{i}-\sin\beta\cdot\mathbf{j})}{ab}=$$

$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

2.3. $(\sin a\cos b+\sin b\cos a)(\sin a\cos b-\sin b\cos a=$
$=\sin^2 a\cos^2 b-\sin^2 b\cos^2 a=\sin^2 a(1-\sin^2 b)-\sin^2 b\,(1-\sin^2 a=$
$=\sin^2 a-\sin^2 b=(\sin a+\sin b)(\sin a-\sin b).$

2.4. $$E=\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos a+\cos\frac{\pi}{4}\sin a-\cos\frac{\pi}{4}\cos a+\sin\frac{\pi}{4}\sin a}{\sin\frac{\pi}{4}\cos a+\cos\frac{\pi}{4}\sin a+\cos\frac{\pi}{4}\cos a-\sin\frac{\pi}{4}\sin a}=$$

$$=\frac{\cos a+\sin a-\cos a+\sin a}{\cos a+\sin a+\cos a-\sin a}=\frac{2\sin a}{2\cos a}=\operatorname{tg} a.$$

2.5. Avem succesiv:

$$E=1-\cos^2 x+1-\cos^2(a+x)+2\cos a\cos x\cos(a+x)=$$

$$=2-\cos^2 x+\cos(a+x)[2\cos a\cos x-\cos(a+x)]=$$

$$=2-\cos^2 x+\cos(a+x)[2\cos a\cos x-\cos a\cos x+\sin a\sin x)]=$$

$$=2-\cos^2 x+\cos(a+x)\cos(a-x)=2-\cos^2 x+$$

$$+(\cos^2 a\cos^2 x-\sin^2 a\sin^2 x)=2-\cos^2 x+\cos^2 a\cos^2 x+$$

$$-(1-\cos^2 a)(1-\cos^2 x)=2-\cos^2 x+\cos^2 a\cos^2 x-1-$$

$$-\cos^2 a\cos^2 x+\cos^2 a+\cos^2 x=1+\cos^2 a.$$

2.6. Fie A_1, B_1 proiecțiile punctelor A, B pe Ox iar A_2, B_2 proiecțiile pe axa Oy. Notăm: $\alpha=\sphericalangle(AB,Ox)$ și $\beta=\sphericalangle(Ox,d)$; $\|A_1B_1\|=\|AB\|\cos\alpha$, $\|A_2B_2\|=\|AB\|\sin\alpha$.

Fie M și N proiecțiile punctelor A_1, B_1 pe (d), iar O și P proiecțiile lui A_2, B_2 pe (d). Avem: $\|MN\|+\|PQ\|=\|AB\|\cos\alpha\cos\beta=\|AB\|\cdot\sin\alpha\sin\beta$ sau $\|MN\|+\|PQ\|=\|AB\|\cos(\alpha+\beta)$; dreapta (d) face cu unghiul $(AB$ unghiul $(\alpha+\beta)$.

2.7. În cazul cînd raza cade normal pe fața prismei avem $i=0$, $r=0$, și rezultă $A=r+r'=r'$ și $D=i+i'-A=i'-A$ deci $i'=A+D$, unde A este unghiul prismei și D unghiul de deviație. Ținem seama de formula de refracție $\sin i'=n\sin r'$ și avem $\sin(A+D)=\sqrt{2}\sin A$, de unde $\operatorname{tg} A=\dfrac{\sin D}{\sqrt{2}-\cos D}$.

În cazul cînd unghiul de incidență $i=45$ avem $\sin 45^\circ=\sqrt{2}\sin r$ de unde $r=30^\circ$. Deci $\sin(A+D-45^\circ)=\sqrt{2}\sin(A-30^\circ)$ sau $\sin A\cos(D-45^\circ)+\cos A\sin(D-45^\circ)=\sqrt{2}\sin A\cos 30^\circ-\sqrt{2}\cos A\sin 30^\circ$ de unde deducem

$$\operatorname{tg} A=\frac{\sin(D-45^\circ)+\sqrt{2}\sin 30^\circ}{\sqrt{2}\cos 30^\circ-\cos(D-45^\circ)}=\frac{\sin D-\cos D+1}{\sqrt{3}-\cos D-\sin D}.$$

Egalăm cele două valori ale lui tg A și obținem

$$\frac{\sin D}{\sqrt{2}-\cos D}=\frac{\sin D-\cos D+1}{\sqrt{3}-\cos D-\sin D} \text{ sau:}$$

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sin D+(\sqrt{2}+1)\cos D=\sqrt{2}+1.$$

Cazul $D=0$ ne dă $A=0$, adică o prismă cu fețele paralele. Avem $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sin D=(\sqrt{2}+1)(1-\cos D)$, de unde $\operatorname{tg}\frac{D}{2}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$. Ținînd seama că $\operatorname{tg} 15^\circ=2-\sqrt{3}$ se verifică $\operatorname{tg} D=\operatorname{tg} 15^\circ$, adică $D=15^\circ$.

$$\operatorname{tg} A=\frac{\sin D}{\sqrt{2}-\cos D}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ deci } A=30^\circ.$$

2.8. Deoarece $\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\cos^2 x\sin^2 x=$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{u^2}{2},\ \sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-$$

$$-3\sin^4 x\cos^2 x-3\sin^2 x\cos^4 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}u^2, \text{ găsim}$$

$E=1-2m+\frac{1+7m}{4}u^2$. Această expresie nu depinde de x dacă și numai dacă $1+7m=0$, adică $m=-1/7$ și atunci $E=9/7$.

2.9. Dezvoltăm $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$ și $\cos(a-b)$.

$$\frac{2\sin a\cos b+2\sin b\cos a}{2\cos a\cos b}=\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b.$$

2.10. Succesiv avem $\sin^2(x+y)-\sin^2(x-y)=[\sin(x+y)+$
$+\sin(x-y)]\cdot[\sin(x+y)-\sin(x-y)]=(2\sin x\cos y)\cdot(2\sin x\cos y)=$
$=\sin 2x\sin 2y$.

2.11. $x_1-x_2=a$, $x_2-x_3=b$ și $x_3-x_1=c$, $a+b+c=0$.
$\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c-\cos a\cos b\cos c=\cos^2 a+\cos^2 b-$

$$-\cos c(2\cos b\cos a-\cos c)=\frac{1+\cos 2a}{2}+\frac{1+\cos 2b}{2}-\frac{1}{2}(\cos 2a+$$
$$+\cos 2b)=1.$$

2.12. $\operatorname{tg}(45^\circ-A)=\frac{1-\operatorname{tg} A}{1+\operatorname{tg} A}=\frac{\cos A-\sin A}{\cos A+\sin A}$, $\cos A\neq 0$, $\operatorname{tg} A\neq -1$.

$$\frac{\cos A-\sin A}{\cos A+\sin A}=\frac{(\cos A-\sin A)^2}{\cos^2 A-\sin^2 A}=\frac{1-\sin 2A}{\cos 2A}=\sec 2A-\operatorname{tg} 2A.$$

2.13. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-a\right)=\frac{1-\operatorname{tg} a}{1+\operatorname{tg} a}=\frac{\cos a-\sin a}{\cos a+\sin a}$;

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-a\right)=\frac{(\cos a-\sin a)^2}{(\cos a+\sin a)^2}=\frac{1-\sin 2a}{1+\sin 2a}.$$

2.14. $\dfrac{\sin a-\cos a}{\sin a+\cos a}-\dfrac{\sin a+\cos a}{\sin a-\cos a}=\dfrac{-4\sin a\cos a}{\sin^2 a-\cos^2 a}=$

$=\dfrac{4}{\operatorname{ctg} a-\operatorname{tg} a}=\dfrac{-2\sin 2a}{-\cos 2a}=2\operatorname{tg} 2a$. Analog a doua egalitate.

2.15. Avem $\sin 2x=\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\dfrac{2\cos 2y}{1+\cos^2 2y}=\dfrac{-2(2\sin^2 y-1)}{1+(2\sin y^2-1)^2}=$

$=\dfrac{-2(2\sin^2 y-1)}{2+4\sin^4 y-4\sin^2 y}=\dfrac{1-2\sin^2 y}{2\sin^4 y-2\sin^2 y+1}$.

2.16. Avem $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\cos\alpha\cos 3\alpha+\sin\alpha\sin 3\alpha=\cos 2\alpha$.

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\cos\alpha\cos 3\alpha-\sin\alpha\sin 3\alpha=\cos 4\alpha.$$

Dar $\cos 4\alpha=2\cos^2 2\alpha-1$, deci $x/a-y/b=2(x/a+y/b)^2-1$.

2.17. Avem $\sin 2x=a^2-1$;

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{1}{\sin 2x\cos 2x}=b.\ \text{Deci}$$

$$\frac{1}{(a^2-1)\cos 2x}=b;\ \cos 2x=\frac{1}{b(a^2-1)}.$$

Înlocuind în relația $\sin^2 2x+\cos^2 2x=1$, obținem

$$(a^2-1)^2+\frac{1}{b^2(a^2-1)^2}=1;\ b^2(a^2-1)^4-b^2(a^2-1)^2+1=0$$

2.18. Eliminăm pe x între aceste două ecuații:

$(\sin x+\cos x)^2=a^2$ sau $1+\sin 2x=a^2\Rightarrow\sin 2x=a^2-1$.

$$b=\sec x+\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}=\frac{2a}{a^2-1}.$$

2.19. Fie x jumătatea arcului subîntins de latura poligonului dat, adică $a=\cos x$, $a_2=\cos 2x$, $a_3=\cos 3x$, $a_4=\cos 4x$ și $a_5=\cos 5x$, unde $5x<\pi/2$ fiindcă $n>10$.

Relația de stabilit devine:

$$\cos 5x+\cos 4x-2\cos 2x(\cos 2x+\cos 3x)+\cos x+1=0.$$

Avem $\cos 2x=2\cos^2 x-1$; $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$,

$\cos 4x=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$ și $\cos 5x=16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x$.

2.20. Avem $\|AM\|=\|AA_1\|\sec\dfrac{A}{2}$, dar $\|AA_1\|=$

$=\dfrac{2\|AB\|\cdot\|AC\|}{\|AB\|+\|AC\|}\cos\dfrac{A}{2}$, de unde rezultă relația din enunț.

2.21. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$

$$\sin a = -\frac{5}{13}, \cos a = +\sqrt{1-\sin^2 a} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \frac{12}{13};$$

$$\sin b = -\sqrt{1-\cos^2 b} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

$$\cos(a+b) = \left(-\frac{5}{13}\right)\frac{4}{5} - \left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{12}{13} = \frac{-20+36}{65} = \frac{16}{65}.$$

2.22. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$

$$\cos a = \sqrt{1-\sin^2 a} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \frac{12}{13}; \sin b = -\sqrt{1-\cos^2 b} = -\frac{3}{5}.$$

$$\sin(a-b) = \left(-\frac{5}{13}\right)\cdot\frac{4}{5} - \left(-\frac{3}{5}\right)\frac{12}{13} = \frac{-20+36}{65} = \frac{16}{65}$$

2.23. $\sin(5\pi/2 + x) = \sin(\pi/2 + x) = +\cos x$; $\sin(\pi/2 - 5x) = \cos 5x$; $\cos(\pi/2 + x) = -\sin x$. Deci:

$$E = \frac{+\cos x + \cos 3x + \cos 5x}{\sin 3x + \sin x + \sin 5x} = \frac{+2\cos 3x \cos 5x + \cos 3x}{\sin 3x + 2\sin 3x \cos 2x} =$$

$$= \frac{\cos 3x(1+2\cos 2x)}{\sin 3x(1+2\cos 2x)} = \operatorname{ctg} 3x, \text{ unde } 1+2\cos x \neq 0.$$

2.24. $\dfrac{\sin a(1+2\cos^2 a - 1)}{\cos a} = \dfrac{\sin a \cdot 2\cos^2 a}{\cos a} = 2\sin a \cos a =$

$$= \frac{\cos 2a \sin 2a}{\cos 2a} = \cos 2a \operatorname{tg} 2a = \sin 2a.$$

2.25. Avem: $2\sin^2 x - 1 = -\cos 2x$. Expresia devine

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) = 2(\sin 2x \cos 30° - \sin 30° \cos 2x) =$$

$$= 2\sin(2x - 30°).$$

2.26. Avem $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x - 2 = \dfrac{1}{\cos^2 x} +$

$$+\frac{1}{\sin^2 x} - 2 = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} - 2 = \frac{4}{\sin^2 2x} - 2 = 2\left(\frac{2}{\sin^2 2x} - 1\right).$$

2.27. Avem $\dfrac{\sin 2x}{\sin 2x + \cos 2x} = \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{1+\operatorname{tg} 2x} = b$ și $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$.

Obținem $(1-2a^2)b = 2a(1-a)$.

2.28. Fie x cateta comună. Cea mai mică catetă din triunghiul dreptunghic mic este $x\operatorname{tg} 15°$, iar cateta cea mai mare din triunghiul dreptunghic mare este $x \operatorname{ctg} 15°$. Revine a arăta că $2x^2$ este suma ariilor celor două triunghiuri dreptunghice.

Ipotenuzele lor sînt catetele unui alt triunghi dreptunghic format din alăturarea celor două dreptunghiuri date și care are ca înălțime chiar cateta comună x.

Catetele triunghiului nou format sînt $x^2 + x^2 \operatorname{tg}^2 15° = x \sec 15°$ și $\sqrt{x^2 + x^2 \operatorname{ctg}^2 15} = x \operatorname{cosec} 15°$. Să arătăm că $\frac{1}{2} x \sec 15° \cdot x \operatorname{cosec} 15° = 2x^2$ sau $\frac{1}{\sin 15° \cos 15°} = \frac{1}{4}$, ceea ce este adevărat deoarece $\sin 30° = \frac{1}{2}$

2.29. Avem $\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -4/5$;

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}; \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x = -\frac{24}{25},$$

$\pi < 2x < 2\pi$, dar $\cos 2x > 0$ deci $3\pi/2 < 2x < 2\pi$;

$$\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x = 2\left(-\frac{24}{25}\right) \cdot \frac{7}{25} = -\frac{336}{625} < 0.$$

$$\cos 4x = \cos^2 2x = \frac{49}{625} - \frac{24^2}{625} < 0.$$

Deoarece $\sin 4x < 0$, $\cos 4x < 0$, rezultă că extremitatea arcului $4x$ este în cadranul IV. Avem $3\pi/2 < 2x < 2\pi$ deci $3\pi < 4x < 4\pi$ rezultă $7\pi/2 < 4x < 4\pi$, $4x$ fiind în cadranul IV.

2.30. Prima fracție este evident egală cu a treia deoarece $(1 - \sin x) \cdot (1 + \sin x) = \cos^2 x$. Pentru a arăta că prima fracție este egală cu a doua, putem folosi mai multe căi: cea mai elementară este dezvoltînd $\sin(a + b)$, $\sin(a - b)$, $\cos(a + b)$ și egalăm produsul mezilor cu al extremilor.

Analog se procedează și pentru ultima egalitate.

2.31. $\frac{1}{\cos 2a} + \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{1 + 2 \sin a \cos a}{\cos^2 a - \sin^2 a} = \frac{(\cos a + \sin a)^2}{\cos^2 a - \sin^2 a} = \operatorname{tg}(\pi/4 + a)$.

$$\frac{(\cos 2a - \sin^2 a)(\cos a + \sin a)}{\sin a} = \frac{(\cos a - \sin a)(1 + \sin 2a)}{\sin a} =$$

$$= (1 + \sin 2a)(\operatorname{ctg} a - 1).$$

2.32. $\sin a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{1+2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\cos a = \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}$.

$$\sin b = \frac{2\sqrt{3}}{1+3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos b = \frac{1-3}{1+3} = -\frac{1}{2}.$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a = -\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6};$$

$$\sin(a-b) = \frac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}; \quad \cos(a-b) = \frac{1-2\sqrt{6}}{6};$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{9\sqrt{3}-8\sqrt{2}}{23}.$$

2.33. $\dfrac{\operatorname{cosec} 2a - \operatorname{ctg} 2a}{\operatorname{cosec} 2a + \operatorname{ctg} 2a} = \dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a} = \operatorname{tg}^2 a.$

2.34. Avem $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+2a\right) = \dfrac{1+\operatorname{tg} 2a}{1-\operatorname{tg} 2a} = \dfrac{\cos 2a + \sin 2a}{\cos 2a - \sin 2a} =$

$$= \frac{(\cos 2a + \sin 2a)^2}{\cos^2 2a - \sin^2 2a} = \frac{1+\sin 4a}{\cos 4a}.$$

2.35. $\dfrac{2\sin a \cos a}{2\cos^2 a} \cdot \dfrac{\cos a}{1+\cos a} = \dfrac{\sin a}{1+\cos a} = \dfrac{2\sin\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{a}{2}}{2\cos^2\dfrac{a}{2}}$

$$= \operatorname{tg}\frac{a}{2}.$$

2.36. Prima parte a relației se mai scrie

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+a\right)} \cdot \frac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-a\right)} = \frac{1}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-a\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-a\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2a\right)} = \frac{1}{\cos 2a}.$$

2.37. $\sec^2\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{4}{2+\sqrt{3}}$; $\operatorname{cosec}^2\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{2}{1-\cos\dfrac{\pi}{6}} = \dfrac{4}{2-\sqrt{3}}$;

$$\sec^2\frac{\pi}{12} + \operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{12} = 4\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}\right) = 4 \cdot 4 = 16.$$

2.38. Ținem seama că $\sqrt{1 \pm \sin x} = \left|\sin\dfrac{x}{2} \pm \cos\dfrac{x}{2}\right|$ și că pentru $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{4}, \dfrac{9\pi}{4}\right]$ avem $\left|\cos\dfrac{x}{2}\right| \geqslant \left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$. Obținem $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, iar pentru restul intervalelor, $y = \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$.

2.39. Avem $\dfrac{1+\dfrac{\sin 4x}{\cos^2 x}-3\sin^2 x}{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-1}=$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^4 x-3\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x-\cos^2 x}=\frac{\sin^4 x+\cos^2 x-3(1-\cos^2 x)\cos^2 x}{\sin^2 x-\cos^2 x}=$$

$$=\frac{(\sin^2 x-\cos^2 x)^2}{\sin^2 x-\cos^2 x}\sin^2 x-\cos^2 x=-\cos 2x, \text{ dar } -\cos 2x+\cos 2x=0.$$

2.40. Obținem $a=b\operatorname{tg} x$, deci

$$\frac{a^n+b^n}{a^n-b^n}=\frac{(a/b)^n+1}{(a/b)^n-1}=\frac{\operatorname{tg}^n x+1}{\operatorname{tg}^n x-1}.$$

2.41. Avem

$$\frac{a^2+b^2-2ab}{a^2+b^2+2ab}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \text{ sau } \frac{a-b}{a+b}=\frac{\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}}{\sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x}{2};$$

$$\left(\frac{2a}{2b}\right)^2=\frac{\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}\Rightarrow\frac{a^n}{b^n}=\frac{(1+\sin x)^n}{(1-\sin x)^n}. \text{ Deci:}$$

$$\frac{a^{2n}-b^2}{a^{2n}+b^{2n}}=\frac{(1+\sin x)^n-(1-\sin x)^n}{(1+\sin x)^n+(1-\sin x)^n}.$$

2.42. Avem $\operatorname{tg}2a=\dfrac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a}$; $\operatorname{tg}4a=\dfrac{2\operatorname{tg}2a}{1-\operatorname{tg}^2 2a}$, de unde

$$1-\operatorname{tg}^2 a=\frac{2\operatorname{tg}a}{\operatorname{tg}2a} \text{ și } \operatorname{tg}4a(1-\operatorname{tg}^2 2a)=2\operatorname{tg}2a \text{ deci,}$$

$$\operatorname{tg}4a\,(1-\operatorname{tg}^2 a)\,(1-\operatorname{tg}^2 2a)=\frac{2\operatorname{tg}a\cdot 2\operatorname{tg}2a}{\operatorname{tg}2a}=4\operatorname{tg}a.$$

2.43. Avem

$$1^\circ\quad \frac{a^2+b^2}{2ab}=\frac{1}{\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}\quad;\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}=\cos x.$$

$$\frac{a-b}{a+b}=\sqrt{\cos x};\quad \frac{a}{b}=\frac{1+\sqrt{\cos x}}{1-\sqrt{\cos x}}.$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{(1+\sqrt{\cos x})^n}{(1-\sqrt{\cos x})^n} \text{ de unde obținem}$$

$$\frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \frac{(1+\sqrt{\cos x})^n - (1-\sqrt{\cos x})^n}{(1+\sqrt{\cos x})^n + (1-\sqrt{\cos x})^n}. \tag{1}$$

2°. Dacă $x \in (\pi/2, \pi)$, în relația (1) se înlocuiește $\cos x$ prin $-\cos x > 0$.

2.44. $E = \dfrac{1 + \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x}}{1 + \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} - \dfrac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \dfrac{\sin x \cos x + 1}{\sin x \cos x} \cdot$

$$\cdot \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin x \cos x + \sin^2 x} - \frac{\cos x \cdot \cos^2 x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos^3 x}{\sin x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \sin^2 x}{\sin x} = \frac{2 \sin x \cos x}{2} = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Egalitatea nu are sens pentru $x = k\pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$.

2.45. Avem $-\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{11\pi}{12}$.

2.46. $E_1 = \sin\dfrac{\pi}{3} + \cos\left(2 \cdot \dfrac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 0 + \sqrt{3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

$$E_2 = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left[2\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = -1 + 1 + 0 = 0.$$

2.47. Ținem seama că: $\dfrac{\sin(a-b)}{\cos(a+b)} = \dfrac{\sin a \cos b - \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} =$

$= \dfrac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$ și relația de demonstrat devine

$$\sum \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} + \prod \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} = 0.$$

Dacă notăm $\operatorname{tg} a = x$, $\operatorname{tg} b = y$, $\operatorname{tg} c = z$ și aducem la același numitor obținem $\Sigma(x-y)(1-yz)(1-zx) + (x-y)(y-z(-x) = 0$ care se justifică efectuînd înmulțirile.

2.48. Avem

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{z}{2} - \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}\operatorname{tg}\dfrac{z}{2}}{1 - \left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\operatorname{tg}\dfrac{y}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{2}\operatorname{tg}\dfrac{z}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{z}{2}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)},$$

rezultă $\dfrac{x+y+z}{2} = \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$, sau $x + y + z = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

2.49. $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$ sau $(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b)\left(\dfrac{1}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} - 1\right) = 0.$

1°. de unde $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = 0$ deci $a + b = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ sau

2°. $\operatorname{tg} a = 0$, adică $a = k\pi$, b oarecare, $k \in \mathbf{Z}$.

3°. $\operatorname{tg} b = 0$, unde $b = k\pi$ și a oarecare, $k \in \mathbf{Z}$.

2.50. Folosim formulele $\cos^2 a = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 a}$, $1 - \cos a = 2 \sin^2 \dfrac{a}{2}$.

Avem $\sin^2 a + \cos^2 a - \cos a = 1 - \cos a = 2 \sin^2 \dfrac{a}{2}$.

2.51. Avem $\sin a = -\sin b$ sau $\sin a + \sin b = 0$ de unde $a + b = 2k\pi$, sau $a - b = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

2.52. Ținem seama de relațiile

$$\cos\left(\frac{11\pi}{24} - a\right) = \sin\left(\frac{\pi}{24} + a\right); \quad \cos\left(\frac{17\pi}{24} - a\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{24} - a\right).$$

Expresia devine succesiv

$$-16 \sin\left(\frac{\pi}{24} + a\right)\cos\left(\frac{\pi}{24} + a\right)\sin\left(\frac{5\pi}{24} - a\right)\cos\left(\frac{5}{24} - a\right) =$$

$$= -4 \sin\left(\frac{\pi}{12} + 2a\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} + 2a\right) = -2 \sin\left(\frac{\pi}{6} + 4a\right) =$$

$$= -2\left(\frac{1}{2}\cos 4a + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4a\right) = -\cos 4a - \sqrt{3}\sin 4a.$$

2.53. Avem identitățile

$$\sin^2 a - \sin^2 b = \sin(a + b)\sin(a - b).$$

$$\cos^2 a - \cos^2 b = \cos(a + b)\cos(a - b).$$

Deci $E = \operatorname{tg}(a + b)\operatorname{tg}(a - b) + \operatorname{tg}(a + b) = \operatorname{tg}(a + b)[\operatorname{tg}(a - b) + 1] =$

$$= \operatorname{tg}(a + b)\left[\operatorname{tg}(a - b) + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right] = \operatorname{tg}(a + b) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + a - b\right)}{\cos(a - b)\cos\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \sqrt{2}\operatorname{tg}(a + b) \cdot \frac{\left(\sin\frac{\pi}{4} + a - b\right)}{\cos(a - b)}.$$

2.54. a) $E_1 > 0$, minimul lui E_1 are loc odată cu minimul lui $E_1^2 = \frac{4(1+\sin 2x)}{\sin^2 2x} = 4\left[\frac{1}{\sin^2 2x} + \frac{1}{\sin 2x}\right]$ este minim cînd $\sin 2x$ este maxim adică $\sin 2x = 1$, deci $\sin x = \sin 45° = \sqrt{2}/2$. Rezultă:.

$$E_{minim} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

b) Analog $E_2 = 1 + \sin 2x$ care este maxim cînd $\sin 2x = 1$ deci, pentru $2x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{4}$; $\max E_2 = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$.

2.55. Avem

$x^2 - 2(1 + 2\operatorname{tg}^2 a)x^2 + 1 = x^4 - 2(1 + 2\sec^2 a - 2)\,x^2 + 1 =$

$= x^4 + 2x^2 + 1 - 4\sec^2 a = (x^2+1)^2 - (2\sec a)^2 x^2 =$

$= (x^2 + 2x\sec a + 1)(x^2 - 2x\sec a + 1)$;

$x^4 - 2(1 + 2\operatorname{tg}^2 a)x^2 + 1 = x^4 - 2(\sec^2 a + \operatorname{tg}^2 a)x^2 +$

$+ (\sec^2 a - \operatorname{tg}^2 a)^2 = x^4 + \operatorname{tg}^4 a + \sec^4 a - 2x^2(\operatorname{tg}^2 a + \sec^2 a) +$

$+ 2\operatorname{tg}^2 a\sec^2 a - 4\operatorname{tg}^2 a\sec^2 a = (x^2 - \operatorname{tg}^2 a - \sec^2 a)^2 -$

$- 4\operatorname{tg}^2 a\sec^2 a = (x^2 - 2\operatorname{tg}^2 a - 1)^2 - 4\operatorname{tg}^2 a\sec^2 a =$

$= (x^2 - 2\operatorname{tg}^2 a + 2\operatorname{tg} a\sec a - 1)(x^2 - 2\operatorname{tg}^2 a - 2\operatorname{tg} a\sec a - 1) =$

$= x^4 - 2(1 + 2\operatorname{tg}^2 a)x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 - 4(\operatorname{tg}^2 a)x^2 =$

$= (x^2 - 1)^2 - 4x^2\operatorname{tg}^2 = (x^2 + 2x\operatorname{tg} a - 1)(x^2 - 2x\operatorname{tg} a - 1 = (x^3 +$

$+ 2x\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}^2 a - \sec^2 a)(x^2 - 2x\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}^2 a - \sec^2 a) =$

$= [(x + \operatorname{tg} a)^2 - \sec^2 a][(x - \operatorname{tg} a)^2 - \sec^2 a] =$

$= (x + \operatorname{tg} a + \sec a)(x + \operatorname{tg} a - \sec a)(x - \operatorname{tg} a\sec a)\cdot x - \operatorname{tg} a - \sec a)$.

2.56. Notăm $a = \sin A$, $b = \cos A$; $x = \sin B$, $y = \cos B$ şi obţinem

$|\sin A\sin B \pm \cos A\cos B| = |\cos(A \pm B)| \leqslant 1$.

$|\sin A\cos B \pm \cos A\sin B)| = |\sin(A \pm B| \leqslant 1$.

$|\sin A\cos A \pm \sin B\cos B| = |(1/2)(\sin 2A \pm \sin 2B)| \leqslant 1$.

2.57. Avem $E = \frac{3\sin a - 4\sin^3 a}{\sin a} - \frac{4\cos^3 a - 3\cos a}{\cos a} = 3 -$

$- 4\sin^2 a - 4\cos^2 a + 3 = 6 - 4 = 2$. Deci $a = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, atunci unul din numitorii fracţiilor din enunţ se anulează, deci nu are sens.

2.58. Avem: $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{8} - a\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - a\right) = 2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - 2a\right)$.

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{8}+a\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+a\right)=2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+2a\right)=2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2a\right)\cdot$$

$$2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-2a\right)-2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2a\right)=4\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-4a\right)=4\operatorname{tg}4a.$$

2.59. a) Avem $\cos(4x-82°)=\sin(90°-4x+82°)=\sin(172°-4x)=\sin(180°-8°-4x)=\sin(4x+8°)$.

Prima inegalitate devine $3/2\leqslant 2\sin^2(4x+8°)\leqslant 2$, cum $13°\leqslant x\leqslant 28°$, $60°\leqslant 4x+8°\leqslant 120°$ deci $\sqrt{3}/2\leqslant\sin(4x+8°)\leqslant 1$, de unde rezultă inegalitatea cerută.

b) $\operatorname{tg}(4x-82°)=-\operatorname{ctg}(4x+8°)$, însă: $60°-4x+8°\leqslant 120°$, deci $|\operatorname{ctg}(4x+8°)|\leqslant 1/\sqrt{3}$.

Inegalitatea dublă $0\leqslant 2\operatorname{ctg}^2(4x+8°)\leqslant -2/3$ este evidentă.

2.60. *Soluția I.* Avem $\cos a=3/5$, $\sin b=12/13$, $\cos x=7/25$.

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a=\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}+\frac{12}{13}\cdot\frac{7}{5}=\frac{56}{65}\cdot$$

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}-\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}=\frac{-33}{56}\cdot$$

$$\sin(a+b+c)=\sin(a+b)\cos c+\cos(a+b)\sin c=\frac{56}{65}\cdot\frac{7}{25}-$$

$$-\frac{33}{65}\cdot\frac{12}{13}=\frac{-4}{845}$$

Soluția a II-a. Formula $\sin(a+b+c)=\sin a\cos b\cos c+\sin b\cos c\cos a+\sin c\cos a\cos b-\sin a\sin b\sin c$ dă același rezultat.

2.61. a) Notăm $6x=y$. Să arătăm că dacă $0\leqslant y\leqslant 60°$, atunci $3/4\leqslant\sin(y+60°)\cos(y-30°)\leqslant 1$ sau $3/4\leqslant\sin(y+60°)\cos(30°-y)\leqslant 1$, $3/4\leqslant\sin^2(y+60°)\leqslant 1$, care este adevărată, deoarece valoarea cea mai mică a lui $y=\sin^2(y+60°)$ este $\sin^2 60°=3/4$, cînd $y=0$, sau $y=60°$, iar valoarea maximă cînd $y+60°=90°$, adică $\sin^2 90°=1$.

b) Fie $9x=y$, avem $0\leqslant y\leqslant 90°$, iar $f(y)=\sin(y+45°)\cos(45°-y)=\sin^2(y+45°)$.

Pentru $y=0$ sau $y=90°$ avem $f(y)=(\sqrt{2}/2)^2=1/2$.

Pentru $y=45°$ avem $f(y)=1$.

c) Ultima pentru $0\leqslant y\leqslant 90°$ devine

$$f(y)=-\sin(45°-y)\cos(45°+y)=-\sin^2(45°-y).$$

Cea mai mare valoare a lui $f(y)$ poate fi zero, și anume cînd $y=45°$. Cînd y crește de la 0 la 45°, atunci $(45-y)$ descrește de la 45° la 0, iar cînd $45°\leqslant y\leqslant 90°$, atunci $0\leqslant(45°-y)\leqslant -45°$. Cea mai mică valoare a lui $f(y)$ este cînd $y=0$ sau $y=90°$, $f(x)=-\sin^2 45=-1/2$.

2.62. Avem $\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c} = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} b}$ sau $\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} c} = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} c + \operatorname{tg} b}$, de unde

$$\frac{\operatorname{tg} a}{\frac{\sin(a+c)}{\cos a \cos c}} = \frac{\operatorname{tg} c}{\frac{\sin(b+c)}{\cos b \cos c}} \text{ sau } \frac{\sin(a+c)}{\sin(b+c)} = \frac{\sin a}{\operatorname{tg} c \cos b} \tag{1}$$

Din $\frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c} = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a}$ rezultă $\frac{\sin(a+c)}{\sin(b+c)} = \frac{\cos a \operatorname{tg} c}{\sin b}$. (2)

Înmulțind (1) cu (2) parte cu parte obținem relația cerută.

2.63. Avem $\cos x < 0$, $\frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -3$; $\cos^2 x = 9(1-\cos^2 x)$ de unde $\cos^2 x = \frac{9}{10}$. Rezultă: $\cos x = -\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{-3\sqrt{10}}{10}$; $\sin x = \frac{\sqrt{10}}{10}$;

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = -\frac{3}{5}.$$

2.64. a) Egalitatea $\sin 15° + \sin 45° = \sin 75°$ se mai scrie $\sin 45° = \sin 75° - \sin 15° = \cos 15° + -\sin 15° > 0$. Ridicăm la pătrat $\sin^2 45° = \cos^2 15 + \sin^2 15 - 2 \sin 15° \cos 15° = 1 - \sin 30° = 1 - 1/2 = 1/2$; $\sin^2 45 = (\sqrt{2}/2)^2 = 1/2$.

b) $2(\sin 15° + \cos 15° - 1)(\cos 15° + \sin 15° + 1) + 1 = 2[(\sin 15° + \cos 15°)^2 - 1] + 1 = 2(1 - \sin 30° - 1) + 1 = 0$.

c) $\operatorname{tg} 15° + \operatorname{ctg} 15° = \frac{\sin 15°}{\cos 15} + \frac{\cos 15°}{\sin 15°} = \frac{\sin^2 15 + \cos^2 15°}{\sin 15° \cos 15°} =$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 30°} = \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = 4.$$

2.65. Folosim relația $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ și avem

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos a}{1+\cos a} \cdot \frac{1-\cos b}{1+\cos b} = \frac{1-\cos a - \cos b + \cos a \cos b}{1+\cos a + \cos b + \cos a \sin a},$$

de unde $\cos x = \frac{\cos a + \cos b}{1 + \cos a \cos b}$.

2.66. Avem $\operatorname{tg} a = \frac{2 \sin a \cos a}{2\cos^2 a - 1 + 1} = \frac{\sin 2a}{1+\cos 2a} =$

$$= \frac{2 \sin 2a \cos 2a}{2(1+\cos 2a)\cos 2a} = \frac{\sin 4a}{2\cos 2a + 2\cos^2 2a} = \frac{\sin 4a}{1 + 2\cos 2a + \cos 4a};$$

$$\operatorname{ctg} 2a = \frac{1-\operatorname{tg}^2 a}{2 \operatorname{tg} a} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} a - \frac{1}{2}\operatorname{tg} a \text{ sau } \operatorname{tg} a = \operatorname{ctg} a - 2 \operatorname{ctg} 2a.$$

2.67. Notăm $x = \operatorname{ctg} x$ și avem $\operatorname{ctg}^2 \alpha - 2 \operatorname{ctg} \alpha - 1 = 0$ de unde $\operatorname{ctg} \alpha = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$. însă ecuația (1) scriindu-se sub forma $\frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} = 1$ sau $\operatorname{ctg} 2\alpha = 1$, rezultă $2\alpha = 45$; $\alpha = \pi/8$ și corespunde

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}.$$

2.68. Ținem seama de semnele funcțiilor cînd $a \in (\pi/2, \pi)$. Avem

$$\sin a = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 a}} = \frac{1}{2}; \quad \cos a = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \operatorname{tg} a = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{(4-2\sqrt{3}}{8}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

2.69. Întrucît unghiurile x și y, conform condiției, sînt situate în primul cadran, atunci:

$$\operatorname{tg} x \geqslant 0 \text{ și } \operatorname{tg} y \geqslant 0.$$

Deci dacă $\operatorname{tg} x = 3 \operatorname{tg} y$, atunci $\operatorname{tg} x \geqslant \operatorname{tg} y$ de unde rezultă că $x \geqslant y$, egalitatea avînd loc numai în cazul $x = y = 0$.

Prin urmare avem $Z \geqslant 0$ și

$$\operatorname{tg} Z = \operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \frac{3 \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} y}{1+3 \operatorname{tg}^2 y} = \frac{2 \operatorname{tg} y}{1+3 \operatorname{tg}^2 y} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{ctg} y}{\operatorname{ctg} y + 3 \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{ctg} y} = \frac{2}{\operatorname{ctg} y + 3 \operatorname{tg} y}.$$

De aici avem

$$\operatorname{tg}^2 Z = \frac{4}{(\operatorname{ctg} y + 3 \operatorname{tg} y)^2} = \frac{4}{(\operatorname{ctg} y - 3 \operatorname{tg} y)^2 + 12}.$$

Deoarece $Z \geqslant 0$, atunci maximul funcției Z corespunde maximului funcției $\operatorname{tg}^2 Z$, adică minimul expresiei:

$$(\operatorname{ctg} y - 3 \operatorname{tg} y)^2 + 12, \text{ deci } (\operatorname{ctg} y - 3 \operatorname{tg} y)^2 = 0.$$

Rezultă că funcția $\operatorname{tg}^2 Z$ își atinge maximul pentru $\operatorname{ctg} y = 3 \operatorname{tg} x$ sau $\operatorname{tg}^2 y = 1/3$, $\operatorname{tg} y = 1/\sqrt{3}$ de unde $y = \pi/6$. Atunci avem: $\operatorname{tg} x = 3 \operatorname{tg} y = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$; $x = \frac{\pi}{3}$ și $Z = x - y = \pi/3 - \pi/6 = \pi/6$.

2.70. Avem $\operatorname{tg}^2 \frac{x_1}{2} = \frac{1-\cos x_1}{1+\cos x_1} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n - 2a_1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} =$

$$= 1 - \frac{2a_1}{a_1 + a_2 + , ..., + a_n}.$$

$$\Sigma \operatorname{tg}^2 \frac{x_1}{2} = \Sigma \left(1 - \frac{2a_1}{A}\right) = n - \frac{2\Sigma a_1}{A} = n - 2.$$

2.71. $\sqrt{1 + \cos a} + \sqrt{1 - \cos a} = \sqrt{2 \cos^2 \frac{a}{2}} + \sqrt{2 \sin^2 \frac{a}{2}} =$

$$= \sqrt{2}\left(\left|\cos \frac{a}{2}\right| + \left|\sin \frac{a}{2}\right|\right) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + |\sin a|}.$$

$$\sqrt{1 + \cos a} - \sqrt{1 - \cos a} = \sqrt{2}\left(\left|\cos \frac{a}{2}\right| - \left|\sin \frac{a}{2}\right|\right).$$

2.72. $(1 + \cos a) \geqslant 0$; $\sqrt{1 + \sin a} + \sqrt{1 - \sin a} > 0$, Dacă $\sin a < 0$, atunci și $\sqrt{1 + \sin a} - \sqrt{1 - \sin a} < 0$. Ridicăm la pătrat prima egalitate și obținem:

$(1 + \cos^2 a + 2 \cos a)(2 - 2 \cos a) = (1 - \cos^2 a)(2 + 2 \cos a)$, egalitate evidentă. Avem $\operatorname{ctg} 2a = \frac{\operatorname{ctg} a - 1}{2 \operatorname{ctg} a}$, deci $1 + \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} 2a = \operatorname{ctg}^2 a$ sau

$$\frac{1 + \cos 2a}{1 - \cos 2a} = \frac{2 \cos^2 a}{2 \sin^2 a} = \operatorname{ctg}^2 a.$$

2.73. Fie $\operatorname{ctg} a = x$, $\operatorname{ctg} 2a = \frac{x^2 - 1}{2x}$ sau $\frac{(x-1)^2}{2x} > 0$, $x > 0$, $\operatorname{ctg} a > 0 \Rightarrow 0 < a < \frac{\pi}{2}$.

2.74. Egalitatea se mai scrie $\frac{1 - \cos \frac{2\pi}{9}}{2} + \frac{1 - \cos \frac{4\pi}{9}}{2} +$

$$+ \frac{1 + \cos \frac{\pi}{9}}{2} = \frac{3}{2} \text{ sau } \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} = \cos \frac{\pi}{9}, \text{ sau } 2 \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{9} =$$

$= \cos \frac{\pi}{9}$ evident, deoarece $2 \cos \frac{\pi}{3} = 1$.

2.75. Notăm respectiv cu A_1, A_2, A_3, A_4 cele patru părți ale egalităților și avem

$$A_1 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{8} \sin^2 \frac{\pi}{8}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1.$$

$$A_2 = \frac{1}{16} \cdot \frac{1 \cdot 4}{\sin^2 \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4}} = 1.$$

$$A_3 = \frac{1}{6}\cdot\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{8}+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{6}\cdot\left(\sec^2\frac{\pi}{8}-1+\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{8}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{8}}+\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{8}}-2\right)=\frac{1}{6}\cdot(8-2)=1.$$

$$A_4 = \frac{1}{14}\cdot\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{12}+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{14}\,\frac{4\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{6}\right)}{\sin^2\frac{\pi}{6}}=$$

$$=\frac{2}{7}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{8}\right)}{\frac{1}{4}}=1.$$

2.76. $\sin x$ și $\cos x$ au perioada 2π deci argumentul fiind $3x$ perioada $2\pi/3$. Pentru $x\in(0,\pi/6)$ avem

$$\sqrt{1+\sin 3x}=\sqrt{\left(\sin\frac{3x}{2}+\cos\frac{3x}{2}\right)^2}=\left|\sin\frac{3x}{2}+\cos\frac{3x}{2}\right|,$$

$$\sqrt{1-\sin 3x}=\left|\sin\frac{3x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right| \text{ dar } \cos\frac{3x}{2}\geqslant\sin\frac{3x}{2},$$

deci $f(x)=2\cos\frac{3x}{2}$ deci $x\in(0,\pi/6)$.

Dacă $x\in(\pi/6,\pi/3)$, atunci $\sqrt{1-\sin 3x}=\sin\frac{3x}{2}-\cos\frac{3x}{2}$ deci $f(x)=$ $=2\sin\frac{3x}{2}$ pentru $x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$.

2.77. Avem $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+a\right)=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}+2a\right)}{2}$; $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-a\right)=$

$$=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}-2a\right)}{2}.$$

Partea întîi a relației din enunț devine

$$\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-2a\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+2a\right)=\sin\frac{\pi}{4}\sin 2a=2\cdot\sin a\cos a.\right.$$

2.78. Avem succesiv $[\cos(a+b)+\cos(a-b)]^2=(2\cos a\cos b)^2=$ $=(1+\cos 2a)(1+\cos 2b)=4\cos^2 a\cos b$.

Relația a doua se deduce din prima, înlocuind pe a prin $(\pi/4-a)$ și b prin $(\pi/4-b)$.

2.79. Notăm $\arcsin\frac{2}{3}=a$, unde $a\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ deci $\sin a=2/3$, $a\in(0,\pi/2)$].

$$|\cos a| = \sqrt{1-\sin^2 a} = \sqrt{5}/3 \text{ sau } \cos a = \sqrt{5}/3.$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{2}{3} : \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

2.80. $E = \sqrt{\operatorname{tg} x}\,(\sqrt{1+\cos x} + \sqrt{1-\cos x}) =$

$$= \sqrt{\operatorname{tg} x}\left(\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}} + \sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}\right) = \sqrt{2}\sqrt{\operatorname{tg} x}\left[\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \left|\sin\frac{x}{2}\right|\right] =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{\operatorname{tg} x}\left[\left|\sin\frac{x}{2}\right| + \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right|\right] = 2\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{tg} x}\left|\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{x}{2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\pi}{4}\right)\right| = 2\sqrt{\operatorname{tg} x}\left|\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Pentru $x = 60°$ avem $E = 2\sqrt[4]{3}\cos 15° = \sqrt[4]{3}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

2.81. Avem $g(\sin x) = g\left(\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right) = f\left(\dfrac{2\sin x}{1+\sin^2 x}\right)$.

2.82. Să arătăm cînd are loc prima egalitate. Notăm $4x = y$ deci $\operatorname{tg} y = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2y}{1+\cos 2y}}$, egalitate adevărată pentru $\operatorname{tg} y > 0$ sau $\operatorname{tg} 4x > 0$.

$$\Rightarrow 4x \in \bigcup_{k=Z}\left\{\left[k\pi,\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right\} \text{ sau } x \in \bigcup_{k=2}\left\{\left[\frac{k\pi}{4}\cdot\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)\right\}$$

deci $x_1 \in \left[0,\ \frac{\pi}{8}\right)\cup\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{8}\right)\cup\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{8}\right)\cup\left[\frac{3\pi}{4},\ \frac{7\pi}{8}\right)\cup$

$$\cup\left[\pi,\ \frac{9\pi}{8}\right)\cup\left[\frac{5\pi}{4},\ \frac{11\pi}{8}\right)\cup\left[\frac{6\pi}{4},\ \frac{13\pi}{8}\right)\cup\left[\frac{7\pi}{4},\ \frac{15\pi}{8}\right)\cup 2\pi.$$

A doua egalitate este adevărată cînd $\sec 6x > 0$ sau $\cos 6x > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 6x \in \bigcup_{k\in Z}\left\{\left(2k\pi,\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(2k\pi+\frac{3\pi}{2},\ 2(k+1)\pi\right\}\right.$$

sau $x \in \bigcup_{k\in Z}\left\{\left(\frac{k\pi}{3},\ \frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\right)\cup\left(\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{4},\ \frac{(k+1)\pi}{3}\right)\right\}$. Deci:

$$x_2 \in \left(0,\ \frac{\pi}{12}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{12}\right)\cup\left(\frac{7\pi}{12},\ \frac{8\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{2\pi}{3},\ \frac{9\pi}{12}\right)\cup$$

$$\cup\left(\frac{11\pi}{12},\ \pi\right)\cup\left(\pi,\ \left(\frac{13\pi}{12}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},\ \frac{4\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{4\pi}{3},\ \frac{17\pi}{12}\right)\cup\right.$$

$$\cup\left(\frac{17\pi}{12},\ \frac{4\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{3},\ \frac{21\pi}{12}\right)\cup\left(\frac{24\pi}{12}\right).$$

Rezultă $x = x_1 \cap x_2$.
Aducînd fracțiile la același numitor avem:

$$x_1 \in \left[0, \frac{3\pi}{24}\right) \cup \left(\frac{6\pi}{24}, \frac{9\pi}{24}\right) \cup \left[\frac{12\pi}{24}, \frac{15\pi}{24}\right) \cup \left[\frac{18\pi}{24}, \frac{21\pi}{24}\right) \cup$$
$$\cup \left[\frac{24\pi}{24}, \frac{27\pi}{24}\right] \cup \left[\frac{30\pi}{24}, \frac{33\pi}{24}\right) \cup \left[\frac{36\pi}{24}, \frac{39\pi}{24}\right) \cup$$
$$\cup \left[\frac{42\pi}{24}, \frac{45\pi}{24}\right) \cup \frac{48\pi}{24}.$$

$$x_2 \in \left(0, \frac{8\pi}{24}\right) \cup \left(\frac{6\pi}{24}, \frac{8\pi}{24}\right) \cup \left(\frac{8\pi}{24}, \frac{10\pi}{24}\right) \cup \left(\frac{14\pi}{24}, \frac{16\pi}{24}\right) \cup$$
$$\cup \left(\frac{16\pi}{24}, \frac{18\pi}{24}\right) \cup \left(\frac{22\pi}{24}, \frac{24\pi}{24}\right) \cup \left(\frac{24\pi}{24}, \frac{26\pi}{24}\right) \cup \left(\frac{30\pi}{24}, \frac{32\pi}{24}\right) \cup$$
$$\cup \left(\frac{32\pi}{24}, \frac{34\pi}{24}\right) \cup \left(\frac{38\pi}{24}, \frac{40\pi}{24}\right) \cup \left(\frac{40\pi}{24}, \frac{42\pi}{24}\right) \cup \frac{48\pi}{24}.$$

Rezultă $x \in \left(0, \frac{2\pi}{24}\right) \cup \left(\frac{6\pi}{24}, \frac{8\pi}{24}\right) \cup \left(\frac{8\pi}{24}, \frac{9\pi}{24}\right) \cup \left(\frac{14\pi}{24}, \frac{15\pi}{24}\right) \cup$
$$\cup \left(\frac{16\pi}{24}, \frac{18\pi}{24}\right) \cup \left(\frac{24\pi}{24}, \frac{26\pi}{24}\right) \cup \left(\frac{30\pi}{24}, \frac{32\pi}{24}\right) \cup \left(\frac{32\pi}{24}, \frac{33\pi}{24}\right) \cup$$
$$\cup \left(\frac{38\pi}{24}, \frac{39\pi}{24}\right) \cup \frac{48\pi}{24}.$$

2.83. Se pleacă de la $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și unghiurile fiind în primul cadran folosim formulele $\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$;

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

2.84. a) Prima relație se mai scrie

$$E_1 = \sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right| + \sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right| \cdot$$
$$\cdot \left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{2}.$$

Ținînd seama că $\frac{x}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$,

$$E_1 = \sqrt{2}\left[\left(\cos^2\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\right) + \left(\sin^2\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\right] = \sqrt{2}, \text{ evident.}$$

b) Avem

$$E_2 = \sqrt{2}\left(\left|\cos\frac{x}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right| + \left|\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{x}{2}\right|\right) = \sqrt{2}.$$

Întrucît $\frac{x}{2} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$, rezultă

$$E_2 = \sqrt{2}\left(\cos^2\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{2}, \text{ evident.}$$

2.85. Din relația de condiție deducem

$$\sin x = \frac{\sin a + \sin b}{1 + \sin a \sin b} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right).$$

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{1 + \sin a \cdot \sin b - \sin a - \sin b}{1 + \sin a \cdot \sin b + \sin a + \sin b} =$$

$$= \frac{(1 - \sin a)(1 - \sin b)}{(1 + \sin a)(1 + \sin b)} = \frac{\left(\cos\frac{a}{2} - \sin\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{2}\right)^2} \cdot \frac{\left(\cos\frac{b}{2} - \sin\frac{b}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{b}{2} + \sin\frac{b}{2}\right)^2} \cdot$$

$$\text{Dar } \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \frac{\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2}.$$

2.86. Aducem la același numitor

$$E = \frac{\cos(a - \pi/4)\cos(a + \pi/12 + \sin(a - \pi/4)\sin(a + \pi/12)}{\sin(a + \pi/12\ (\cos(a + \pi/12)} =$$

$$= \frac{\cos\left(a + \pi/12 - a + \frac{\pi}{4}\right)}{\frac{1}{2} \cdot \sin\left(2a + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{2\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\left(2a + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\sin\left(2a + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

2.87. Trebuie să arătăm că

a) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{6}\right) - 4\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$ sau

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{6}\right)-4\sin\left(\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{6}\right)=0,$$

sau

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2},\ \text{adică}\ \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\ \text{și}\ \sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2},\ \text{evident.}$$

b) Analog avem $\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ sau:

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\ \text{evident și}\ \sin\frac{11\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\ \text{evident.}$$

2.88. Deoarece $\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\cos^2 x\sin^2 x=$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{u^2}{2},\quad \sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-$$

$$-3\sin^4 x\cos^2 x-3\sin^2 x\cos^4 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x=$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}u^2,\ \text{găsim}$$

$$E=1+\frac{u^2}{4}+m\left(1-\frac{u^2}{2}\right)-3m\left(1-\frac{3u^2}{4}\right)\cdot$$

$$E=u^2\left(\frac{1}{4}-\frac{m}{2}+\frac{9m}{4}\right)+1-2m.$$

Expresia E nu depinde de u deci nici de x dacă $\frac{1}{4}-\frac{m}{2}+\frac{9m}{4}=$

$$=\frac{9m-2m+4}{4}=0,\ \text{de unde}\ m=-\frac{4}{7}\cdot$$

2.89. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)=-\sin 3x;\ \sin\left(\frac{9\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=$

$$=\cos x;\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)=\cos 3x\cdot$$

$$E=\frac{\sin 5x+\sin 3x+\sin x}{\cos x+\cos 5x+\cos 3x}=\frac{2\sin 3x\cos 2x+\sin 3x}{2\cos 3x\cos 2x+\cos 3x}=$$

$$=\frac{\sin 3x(2\cos 2x+1)}{\cos 3x(2\cos 2x+1)}=\operatorname{tg} 3x.$$

2.90. a) Avem $\cos x=-\frac{4}{5};\ \sin x=\frac{3}{5};\ \sin 2x=2\sin x\cos x;$

$$\cos 2x=\frac{7}{25}\cdot\sin 3x=\frac{117}{125};\cos 3x=\cos(2x+x)=\frac{44}{125}\cdot$$

$$E_1=\frac{312}{125};\quad E_2=\frac{64}{125}\cdot$$

b) $E_1 = 2\cos x(\sin 2x - \sin x) = 4\cos x \sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$, sau

$$E_1 = 2\sin 2x\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 2\sin 2x\left(\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 4\sin 2x \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right).$$

$$E_2 = 2\cos 2x\cos x - 2\sin x\cos x = 2\cos x(\cos 2x - \sin x) =$$

$$= 2\cos x\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \sin x\right] = 4\cos x \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

c) $\sin x + \sin 3x = \cos x + \cos 3x$; $2\sin 2x\cos x = 2\cos 2x\cos x$;

$$\cos x(\sin 2x - \cos 2x) = 0;\ \cos x = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$\operatorname{tg} 2x = 1;\ x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2},\quad k \in \mathbf{Z}.$$

2.91. Ridicăm relația de condiție la pătrat:

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 a \cdot \operatorname{tg}^2 b = \frac{\sin^2 a \cdot \sin^2 b}{\cos^2 a \cdot \cos^2 b} \text{ sau } \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{(1-\cos 2a)(1-\cos 2b)}{(1+\cos 2a)(1+\cos 2b)} = \frac{1-\cos 2a - \cos 2b + \cos 2a\cos 2b}{1+\cos 2a + \cos 2b + \cos 2a\cos 2b}.$$

Aplicăm proprietatea proporțiilor.

Dacă $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, atunci $\frac{A+B}{A-B} = \frac{C+D}{C-D}$ și obținem

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1 + \cos 2a \cdot \cos 2b}{\cos 2a + \cos 2b} = \frac{1}{\cos 2x}.$$

Inversînd fracțiile obținem relația cerută.

2.92. Avem: $\sqrt[4]{1+\sin 2x} = \sqrt[4]{(\sin x + \cos x)^2} = \sqrt[4]{\sin x + \cos x}$, iar $\sqrt[4]{1-\sin 2x} = \sqrt{\sin x - \cos x}$, deoarece $\sin x > \cos x$.

$$E = \frac{\sqrt{\sin x + \cos x} - \sqrt{\sin x - \cos x}}{\sqrt{\sin x + \cos x} + \sqrt{\sin x - \cos x}} = \frac{2\sin x - 2\sqrt{\sin^2 x - \cos^2 x}}{2\cos x} =$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} - \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}} = \operatorname{tg} x - \sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 1}.$$

Observație. Dacă $x \in (0, \pi/4)$, atunci membrul doi devine $\operatorname{tg} x - \sqrt{\operatorname{ctg}^2 x - 1}$.

2.93. Notăm $\frac{k\pi}{8} \pm \frac{\pi}{16} = x$, $k \in \mathbf{Z}$ și ținem seama că $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ apoi dezvoltăm și obținem: $128 \sin^4 x \cos^4 x - 32 \sin^2 x \cos^2 x + 1 = 0$, sau $8 \sin^4 2x - 8 \sin^2 2x + 1 = 0$ și apoi $2(1 - \cos 4x)^2 - 4(1 - \cos 4x) + 1 = 0$ de unde $2 \cos^2 4x - 1 = 0$ sau $\cos 8x = 0$. Rezultă $8x = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ de unde $x = \frac{k\pi}{8} \pm \frac{\pi}{16}$, deci s-a verificat egalitatea propusă.

2.94. Avem succesiv:

$$64 \sin \frac{\pi}{20} \sin \frac{2\pi}{20} \sin \frac{3\pi}{20} \sin \frac{4\pi}{20} \sin \frac{5\pi}{20} \sin \frac{6\pi}{20} \sin \frac{7\pi}{20} \sin \frac{8\pi}{20} \sin \frac{9\pi}{20} =$$

$$= 64 \sin \frac{\pi}{20} \sin \frac{2\pi}{20} \sin \frac{3\pi}{20} \sin \frac{4\pi}{20} \cos \frac{4\pi}{20} \cos \frac{3\pi}{20} \cos \frac{2\pi}{20} \cos \frac{\pi}{20} =$$

$$= 4 \sin \frac{2\pi}{20} \sin \frac{4\pi}{20} \sin \frac{6\pi}{20} \sin \frac{8\pi}{20} = 4 \sin \frac{2\pi}{20} \sin \frac{4\pi}{20} \cos \frac{4\pi}{20} \cos \frac{2\pi}{20} =$$

$$= \sin \frac{4\pi}{20} \sin \frac{8\pi}{20} = \sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5}.$$

2.95. Adunăm relațiile evidente $\operatorname{tg}(a + b) - \operatorname{tg} a = \frac{\sin b}{\cos a \cos (a + b)}, \ldots, \operatorname{tg} (a + nb) - \operatorname{tg} [a + (n - 1)b] =$

$$= \frac{\sin b}{\cos (a+nb) \cos [a + (n - 1)b]} \text{ obținem } S = \frac{\operatorname{tg} (a + nb) - \operatorname{tg} a}{\sin b}.$$

2.96. În relația $\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \frac{\sin (a - b)}{\cos a \cos b}$ facem înlocuirile; $a = (k - 1)\alpha$ și $b = k\alpha$ și obținem relația $\operatorname{tg} (k - 1)\alpha - \operatorname{tg} k\alpha = \frac{\sin (-\alpha)}{\cos (k - 1)\alpha \cos k\alpha}$. Dînd lui k valori de la 1 pînă la n și adunînd relațiile găsite obținem

$$\operatorname{tg} 0 - \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} 2\alpha + \ldots + \operatorname{tg} (n - 1)\alpha - \operatorname{tg} n n\alpha =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{-\sin \alpha}{\cos (k - 1)\alpha \cdot \cos k\alpha} \text{ de unde } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos (k - 1)\alpha \cos k\alpha} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} n\alpha}{\sin \alpha}.$$

2.97. $\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{14}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{14}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\right.$

$$\left.-\frac{5\pi}{12}\right)=\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}=\frac{2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$=\frac{2\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}{2\cdot 2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{\pi}{14}}{8\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{11}}=\frac{1}{8}.$$

2.98. $1+\operatorname{ctg}x=1+\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=$

$$=\frac{1-\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1-1\right)}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\frac{2-\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)^2}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=$$

$=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)^2\leqslant\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, Pentru $0<x<\pi$

avem $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)^2\geqslant 0$, evident.

2.99. Observăm mai întîi că $\sin x$, $\cos x$, $\cos 2x$ sînt pozitive. Să arătăm că suma a două laturi este mai mare decît cea de-a treia latură, în toate cazurile:

1° $\sin x+\cos x-\cos 2x=\sin x+\cos x-\cos^2 x+\sin^2 x=$

$$=\sin x+\sin^2 x+\cos x\,(1-\cos x)>0.$$

2° $\sin x-\cos x+\cos 2x=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x-1)$ care este pozitivă deoarece $\cos x>\sin x$) iar $(\cos x+\sin x>1$ deoarece$x\in(0,\pi/4)$.

3° $-\sin x+\cos x+\cos 2x=(\cos x-\sin x)(\sin x+\cos x+1)>0$

2.100. Inegalitățile se mai pot scrie:

$1/2\leqslant\sin(10x-30°)+\sin 90°\leqslant 3/2\leqslant\sin(10x+30°)+\sin 90°\leqslant 2$

Ţinem seama că $\sin 90°=1$ şi că $x\in[0,6°]$. Deci

$1/2\leqslant\sin(10x-30°)\leqslant 1/2\leqslant\sin(10x+30°)\leqslant 1$.

$10x-30°\in(-30°,30°)$; $10x+30°\in(30°,90°)$ de unde rezultă inegalitățile din enunț.

2.101. Inegalitatea se mai scrie

$8 \cos x \cos y \sin x \sin y - 8 \sin^2 x \sin^2 y - 1 < 0,$

$8 \sin x \sin y \cos (x + y) - 1 < 0,$

$1 - 8 \sin x \sin y \cos (x + y) > 0,$ sau

$1 + 4 \cos (x + y) [\cos (x + y) - \cos (x - y)] > 0;$

$1 + 4 \cos^2 (x + y) - 4 \cos (x + y) \cos (x - y) > 0;$ sau

$[2 \cos (x + y) - \cos (x - y)]^2 + \sin^2 (x - y) > 0$

care este suma a două numere pozitive, deci pozitivă.

2.102. 1° Avem evident $a + b > c$. Rămîne să demonstrăm că $a + c > b$ și $b + c > a$. Notăm $m = \operatorname{tg} \alpha$, $n = \operatorname{tg} \beta$; $0 < \alpha \leqslant \pi/2$. Inegalitatea $a + c > b$ se scrie: $\frac{\operatorname{tg} x}{\cos \beta} + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta > \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos \alpha}$ sau $\sin \alpha + \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta > \sin \beta$; $\sin (\alpha + \beta) > \sin \beta - \sin \alpha$; simplificînd cu $2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$, obținem $\sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) > \sin \frac{1}{2} (\beta - \alpha)$, care este evidentă.

Inegalitatea $b + c > a$ se reduce, de asemenea, la inegalitatea evidentă $\sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) > \sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$.

2°. Și în acest caz $a_1 + b_1 > c_1$. Cu aceeași notație ca mai sus inegalitatea $a_1 + c_1 > b_1$ se scrie

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos^2 \beta} + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) (1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta) > \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos^2 \alpha}$$

sau

$$\sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta + \cos \alpha \cos \beta \sin (\alpha + \beta) (1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta) > 0;$$

deci

$$\sin (\alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta) > 0.$$

Inegalitatea $b_1 + c_1 > a_1$ se reduce la $\sin (\beta - \alpha) + \sin (\alpha + \beta) > 0$.

Ultimele două inegalități trigonometrice sînt evidente.

2.103. Prima inegalitate se mai scrie $\cos \frac{3(x + y)}{2} \leqslant 0$ care se verifică, semnul egal avînd loc dacă $\frac{3(x + y)}{2} = \frac{3\pi}{2}$ adică $x + y = \pi$.

A doua inegalitate se mai scrie $\sin (2x + 2y) \leqslant 0$ care se verifică întrucît $\pi \leqslant 2x + 2y \leqslant 2\pi$ semnul egal are loc cînd $x + y = \pi/2$ sau cînd $x + y = \pi$.

2.104. Fie $E = \cos^2 (x - y) - 4(1 - \sin x \cos y) (1 - \cos x \sin y) =$
$= \cos^2 (x - y) - [2 - \sin (x + y) - \sin (x - y)] [2 - \sin (x + y) +$
$+ \sin (x - y)] = \cos^2 (x - y) - \{[2 - \sin (x + y)]^2 - \sin^2 (x - y)\} =$

$= \cos^2(x-y) + \sin^2(x-y) - [2 - \sin(x+y)]^2 = 1 - 4 - \sin^2(x-y) +$
$+ 4\sin(x+y) = [3 - \sin(x+y)][\sin(x+y) - 1] \leqslant 0.$

Semnul este egal dacă $\sin(x+y) = 1$.

Dacă în prima relație înlocuim pe x cu $-x$ și y cu $90° - y$, $x - y$ devine $x - 90° + y$, iar $\cos^2(x-y)$ devine $\sin^2(x-y)$ și obținem a doua relație.

Apoi, dacă în prima relație înlocuim pe y cu $-y$, obținem a treia relație iar din a doua obținem a patra relație.

2.105. Avem $2\sin a\cos(a+b) = \sin(2a+b) - \sin b$, deci $\sin(2a+b) - \sin(2a+b) + \sin b = \sin b$, evident.

2.106. Relațiile date le putem scrie

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{x-\beta}{2} = -\frac{14}{65};\ 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = -\frac{8}{65}.$$

Prin împărțire rezultă $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{7}{4}$, iar înmulțindu-l avem

$$2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{14\cdot 8}{65^2}$$

Dar $\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = \dfrac{\frac{7}{2}}{1+\frac{49}{65}} = \dfrac{56}{65}$ și înlocuind în egalitatea precedentă avem $\frac{112}{65}\cdot\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{112}{65^2} = \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{65}$, iar $\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 1 - \frac{1}{65} = \frac{64}{65}$ și deci $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 64 \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \pm 8$ și din $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$ obținem $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -\frac{56}{33}$.

2.107. Avem $\frac{1}{2}\left(\sin\frac{3\pi}{11} + \sin\frac{4\pi}{11}\right) = \sin\frac{7\pi}{22}\cos\frac{\pi}{22} = \cos\left(\frac{\pi}{7} - \right.$
$\left. - \frac{7\pi}{22}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{22}\right) = \cos\frac{4\pi}{22}\sin\frac{10\pi}{22} = \cos\frac{2\pi}{11}\sin\frac{5\pi}{11}.$

2.108. Avem $\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \right.$
$\left. - \cos\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}.$

2.109. a) Înmulțind cu $2\cos\frac{\pi}{14}$ se obține

$$2\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}+2\cos\frac{2\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}-2\sin\frac{3\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}=\cos\frac{\pi}{14},$$

adică $\sin\frac{2\pi}{14}+\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{\pi}{14}-\sin\frac{4\pi}{14}-\sin\frac{2\pi}{14}=\cos\frac{\pi}{14}$, de unde

$\cos\frac{3\pi}{14}-\sin\frac{4\pi}{14}=0$ care este evidentă deoarece $\frac{3\pi}{14}+\frac{4\pi}{14}=\frac{\pi}{2}$.

b) Înmulțind cu -2 și transformăm în sume avem

$$\sin\frac{\pi}{14}-\sin\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{2\pi}{14}-\cos\frac{4\pi}{14}+\sin\frac{5\pi}{14}+\sin\frac{\pi}{14}=1,$$

adică

$2\sin\frac{\pi}{14}-2\sin\frac{3\pi}{14}+2\sin\frac{5\pi}{14}=1$. Înmulțim cu $\cos\frac{\pi}{14}$ și avem, după transformarea produselor în sume; $\sin\frac{2\pi}{14}-\sin\frac{2\pi}{14}-\sin\frac{4\pi}{14}+$

$+\sin\frac{4\pi}{14}+\sin\frac{6\pi}{14}=\cos\frac{\pi}{14}$ sau $\frac{\sin 6\pi}{14}=\cos\frac{\pi}{14}$, evident, deoarece $\frac{6\pi}{14}+\frac{\pi}{14}=\frac{\pi}{2}$.

c) Înmulțind cu $8\cos\frac{\pi}{14}$ se obține

$$8\sin\frac{\pi}{14}\cdot\cos\frac{\pi}{14}\cdot\cos\frac{2\pi}{14}\cdot\sin\frac{3\pi}{14}=\cos\frac{\pi}{14}$$

sau

$$4\sin\frac{2\pi}{14}\cdot\cos\frac{2\pi}{14}\cdot\sin\frac{3\pi}{14}=\cos\frac{\pi}{14},\ \text{de unde}$$

$$2\sin\frac{4\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}=\cos\frac{\pi}{14}\ \text{ sau }\ 2\cos\frac{3\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}=\cos\frac{\pi}{14},$$

adică $\sin\frac{6\pi}{14}=\cos\frac{\pi}{14}$, evident, deoarece $\frac{6\pi}{14}+\frac{\pi}{14}=\frac{\pi}{2}$.

2.110. Avem $2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}=p$; $2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}=q$,

$\cos\frac{a-b}{2}\neq 0$, $\Rightarrow \operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\frac{p}{q}$; $\sin(a+b)=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{a+b}{2}}=$

$$= \frac{2 \cdot \frac{p}{q}}{1 + p^2/q^2} = \frac{2pq}{p^2 + q^2}.$$

$$\cos(a+b) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a+b}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a+b}{2}} = \frac{1 - p^2/q^2}{1 + p^2/q^2} = \frac{q^2 - p^2}{q^2 + p^2}.$$

2.111. Deoarece $\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, $\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, avem

$$a \cos 2x + b \sin 2x = a \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + b \cdot \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = a \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} +$$

$$+ b \cdot \frac{2ab}{a^2 + b^2} = a.$$

2.112. Avem $1 - \sin^2(a+b) = \cos^2(a+b)$.

$$M_2 = \frac{2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} - 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}} =$$

$$= \frac{\cos \frac{a+b}{2} - \sin \frac{(a+b)}{2}}{\cos \frac{a+b}{2} + \sin \frac{a+b}{2}} = \frac{1 - \sin(a+b)}{\cos^2 \frac{a+b}{2} - \sin^2 \frac{a+b}{2}} =$$

$$= \frac{1 - \sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\cos(a+b)}{1 + \sin(a+b)}.$$

Pentru următoarea identitate avem

$$\frac{2 \sin^2 \frac{a-b}{2} - 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{2 \cos^2 \frac{a-b}{2} - 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a-b}{2}} + \frac{2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}}{2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}} =$$

$$= \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{-\cos \frac{a-b}{2}} + \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a-b}{2}} = 0.$$

2.113. Ecuația se mai scrie: $\frac{\cos x \cdot \sin 2x}{\sin x \cdot \cos 2x} = \frac{\cos 3x \cdot \sin 4x}{\sin 3x \cdot \cos 4x}$.

Folosind proprietăți ale proporțiilor derivate obținem: $\sin 7x - \sin 3x = 0$ sau $\cos 5x = 0$, $\Rightarrow x_1 = 18°$.

2.114. $\sin^2 4x + \sin^2 3x - \cos^2 2x - \cos^2 x = \frac{1-\cos 8x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} - \frac{1+\cos 4x}{2} - \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 6x + \cos 4x + \cos 2x) =$

$= -\frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x) - \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x) = -\cos 5x \cos 3x -$

$- \cos 5x \cdot \cos x = -\cos 5x (\cos 3x + \cos x) = -2 \cos 5x \cdot \cos 2x \cdot \cos x$, ceea ce justifică identitatea din enunț.

2.115. Avem $\cos 5a + \cos 11a = 2 \cos 8a \cos 3a$; $3(\cos 7a + \cos 9a) = 6 \cos 8a \cos a$.

Relația din enunț devine succesiv $2 \cos 8a (\cos 3a + \cos a + 2 \cos a) = 2 \cos 8a (2 \cos 2a \cos a + 2 \cos a) = 4 \cos a \cos 8a (\cos 2a + 1) = 8 \cos^3 a \cos 8a$.

2.116. 1) Prima egalitate se mai scrie

$$\sin 10° = \cos 20° - \cos 40° = 2 \sin 10° \sin 30°, \text{ evident.}$$

2) Egalitatea cerută se mai scrie

$$\operatorname{tg} 80° - \operatorname{tg} 60° = (\operatorname{tg} 40° + \operatorname{tg} 60°) + (\operatorname{tg} 60° - \operatorname{tg} 20°)$$

sau

$$\frac{\sin 20°}{\cos 80° \cos 60°} = \frac{\sin 100°}{\cos 40° \cos 60°} + \frac{\sin 40°}{\cos 60° \cos 20°}$$

deci

$$\frac{\sin 20°}{\cos 80°} = \frac{\sin 30°}{\cos 40°} + \frac{\sin 40°}{\cos 20°} \text{ de unde } \sin 20° = \sin 10° (2 \sin 40° + 2 \sin 20°) \text{ sau } \sin 20° = \cos 30° - \cos 50° + \cos 10° - \cos 30° =$$

$$= \cos 10° - \cos 50° = 2 \sin 20° \sin 30° = \sin 20°.$$

3) Egalitatea din enunț se mai scrie

$$\operatorname{tg} 10° + \operatorname{tg} 70° = \operatorname{tg} 60° + \operatorname{tg} 50°$$

sau

$$\frac{\sin 80°}{\cos 10° \cos 70°} = \frac{\sin 70°}{\cos 60° \cos 50°}, \text{ de unde}$$

$$\frac{\sin 80°}{\cos 10°} = \frac{2 \sin 70° \cos 70°}{\cos 50°} = \frac{\sin 140°}{\cos 50°} = \frac{\sin 40°}{\cos 50°} = 1.$$

evident deoarece $\sin 80° = \cos 10°$ și $\sin 40° = \cos 50°$.

2.117. Avem

$$\frac{2 \sin^2 \frac{a+b}{2} + 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b}{2}}{2 \cos^2 \frac{a+b}{2} + 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{a+b}{2}\left(\sin\frac{a+b}{2}+\cos\frac{a+b}{2}\right)}{\cos\frac{a+b}{2}\left(\sin\frac{a+b}{2}+\cos\frac{a+b}{2}\right)} = \operatorname{tg}\frac{a+b}{2} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+b}{2}}{2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}} = \frac{\sin a+\sin b}{\cos a+\cos b}.$$

Observație. Dacă $\sin\frac{a+b}{2}+\cos\frac{a+b}{2}=0$, atunci ridicînd la pătrat obținem $\sin(a+b)=-1$ deci $a+b=2k\pi-\pi/2$, $k\in\mathbf{Z}$.

b) Avem $$\frac{2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}+2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}}{2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}-2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{a-b}{2}+\sin\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}-\sin\frac{a-b}{2}} = \frac{\left(\cos\frac{a-b}{2}+\sin\frac{a-b}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{a-b}{2}-\sin^2\frac{a-b}{2}} = \frac{1+\sin(a-b)}{\cos(a-b)}.$$

Am simplificat cu $\cos(a+b)/2\neq 0$, deci $(a+b)/2\neq k\pi+\pi/2$ sau $a+b\neq(2k+1)\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

2.118. 1°) Egalitatea din enunț se mai scrie

$$\sec^2 20^\circ+\sec^2 40^\circ+\sec^2 80^\circ=36 \text{ sau } \frac{1}{\cos^2 20^\circ}+\frac{1}{\cos^2 40^\circ}+\frac{1}{\cos^2 80^\circ}=$$

$$= \frac{\cos^2 20^\circ\cos^2 40^\circ+\cos^2 40^\circ\cos^2 80^\circ+\cos^2 20^\circ\cos^2 80^\circ}{\cos^2 20^\circ\cos^2 40^\circ\cos^2 80^\circ}=36,$$

întrucît $\cos^2 20^\circ\cos^2 40^\circ\cos^2 80^\circ=\frac{\sin^2 160^\circ}{8^2\sin^2 20^\circ}=\frac{1}{64}$.

Rămîne de arătat că:

$$64\left[\frac{(\cos 60^\circ+\cos 20^\circ)^2}{4}+\frac{(\cos 60^\circ-\cos 40^\circ)}{4}+\frac{(\cos 60^\circ-\cos 80^\circ)^2}{4}\right]=36$$

sau

$$3\cos^2 60^\circ+2\cos 20^\circ-2\cos 80^\circ-2\cos 40^\circ+\cos^2 20^\circ+\cos^2 40^\circ+$$

$$+\cos^2 80^\circ=\frac{9}{4} \text{ sau } \frac{3}{4}+2(\cos 20^\circ-\cos 80^\circ-\cos 40^\circ)+\frac{1+\cos 40^\circ}{2}+$$

$$+\frac{1+\cos 80^\circ}{2}+\frac{1-\cos 20^\circ}{2}=\frac{9}{4} \text{ care, întrucît } \cos 20^\circ-\cos 80^\circ-$$

$-\cos 40^\circ = \cos 20^\circ (1 - 2\cos 60^\circ) = 0$, se mai scrie. $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} +$

$+ \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$, deci se verifică.

2°) Egalitatea cerută se mai scrie:

$(\sin 20^\circ \sin 30^\circ)(\sin 40^\circ \cos 10^\circ) = (\sin 10^\circ \cos 40^\circ)(\cos 20^\circ \cos 30^\circ)$

sau $(\cos 10^\circ - \cos 50^\circ)(\sin 30^\circ - \sin 50^\circ) = (\cos 10^\circ + \cos 50^\circ)(\sin 50^\circ -$

$- \sin 30^\circ)$

sau $\cos 10^\circ \sin 30^\circ = \sin 50^\circ \cos 50^\circ$

sau $\cos 10^\circ = 2 \sin 50^\circ \cos 50^\circ = \sin 100^\circ = \cos 10^\circ$.

3) Avem de arătat relația echivalentă:

$\sin 15^\circ \sin 25^\circ)(\sin 35^\circ \cos 5^\circ) = (\cos 15^\circ \cos 25^\circ)(\sin 5^\circ \cos 35^\circ)$ sau

$(\cos 10^\circ - \cos 40^\circ)(\sin 30^\circ + \sin 40^\circ) = (\cos 10^\circ + \cos 40^\circ)(\sin 40^\circ - \sin 30^\circ)$

Efectuînd simplificările obținem de arătat că

$$\sin 30^\circ \cos 10^\circ = \cos 40^\circ \sin 40^\circ$$

sau $\cos 10^\circ = 2 \cos 40^\circ \sin 40^\circ = \sin 80^\circ = \cos 10^\circ$.

2.119. a) Avem $\sin \frac{5\pi}{24} + \cos \frac{11\pi}{24} = \sin \frac{5\pi}{24} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{11\pi}{24}\right) =$

$$= \sin \frac{5\pi}{24} + \sin \frac{\pi}{24} = 2 \sin \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{12}.$$

b) $\sin \frac{5\pi}{24} + \cos \frac{11\pi}{24} + \sin \frac{\pi}{6} = 2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{12} +$

$$+ 2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = 4 \cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{48} \cos \frac{\pi}{48}.$$

2.120. a) Avem $\cos x + \cos 6x = 2 \cos \frac{7x}{2} \cos \frac{5x}{2}$; $\cos 2x +$

$+ \cos 5x = 2 \cos \frac{7x}{2} \cos \frac{3x}{2}$; $\cos 3x + \cos 4x = 2 \cos \frac{7x}{2} \cos \frac{x}{2}$

și deci $E(x) = 2 \cos \frac{7x}{2} \left(\cos \frac{5x}{2} + \cos \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{3x}{2}\right) =$

$$= 2 \cos \frac{7x}{2} \left(\cos \frac{5x}{2} + \cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right) =$$

$$= 4 \cos \frac{7x}{2} \left(\cos 2x \cos \frac{x}{2} + \cos x \cos \frac{x}{2}\right) = 4 \cos \frac{7x}{2} \cos \frac{x}{2} (\cos 2x +$$

$$+ \cos x) = 8 \cos \frac{7x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2}.$$

b) Particularizăm $x = 20°$ și obținem $E(20°) = \cos 20° + 2 \cos 40° +$
$+ \cos 60° + \cos 80° + 2 \cos 100° + \cos 120° = 8 \cos 70° \cos^2 10° \cos 30°.$
$\cos 20° + 2 \cos 40° + 1/2 + \sin 10° - 2 \sin 10° - \sin 30° =$
$= 8 \cos 70° \cos^2 10° \cdot \cos 30°,$
$\cos 20° + 2 \cos 50° - \sin 10° - 8 \sin 20° \cos^2 10° \cos 30° =$
$= 4 \sqrt{3} \cos^2 10° \cdot \cos 20°.$

2.121. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 2 \cos 2x \cos x + \cos 2x =$
$= \cos 2x (1 + 2 \cos x) = \cos 2x [1 + 2 - 2 (1 - \cos x)] =$

$$= \cos 2x \left(3 - 2 \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right) = \cos 2x \left(3 - 4 \sin^2 \frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{\cos 2x \left(3 \sin \frac{x}{2} - 4 \sin^3 \frac{x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\cos 2x \sin \frac{3x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

2.122. Transformînd produsele în sume avem:

$\cos 2b - \cos 2a + \cos 2c - \cos 2b + \cos 2a - \cos 2c = 0,$

$\sin 2a - \sin 2b + \sin 2b - \sin 2c + \sin 2c - \sin 2a = 0.$

2.123. Folosim relațiile $2 \sin a \sin b = \cos (a - b) - \cos (a + b))]$;
$2 \cos a \cos b = \cos (a - b) + \cos (a + b)$ deci
$4 \sin a \sin b \sin c \sin d = [\cos (a - b) - \cos (a + b)][\cos (c - d) - \cos (c + d)],$
$2 \cos a \cos b \cos c \cos d = [\cos (a - b) + \cos (a + b)] [\cos (c - d) +$
$+ \cos (c + d)].$

Rezultă $4 \sin a \sin b \sin c \sin d + 4 \cos a \cos b \cos c \cos d =$
$= 2 \cos (a - b) \cos (c - d) + 2 \cos (a + b) \cos (c + d) =$
$= \cos (a + b + c + d) + \cos (-a + b + c - d) + \cos (a - b + c - d) +$
$+ \cos (a + b - c - d).$

2.124. Notăm $a = x$ și $b - c = y$ și obținem
$\sin^2 (x + y) - \sin^2 (x - y) + \sin (x + y) \sin (x - y) = \sin^2 x +$
$+ \sin 2x \sin 2y - \sin^2 y.$

Partea întîi devine succesiv
$(\sin x \cos y + \cos x \sin y)^2 - (\sin x \cos y \sin y)^2 +$
$+ (\sin x \cos y + \cos x \sin y)(\sin x \cos y - \cos x \sin y) =$
$= 4 \sin x \cos x \sin y \cos y + \sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 \sin^2 y =$

$= \sin 2x \sin 2y + \sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y =$

$= \sin 2x \sin 2y + \sin^2 x - \sin^2 y.$

2.125. Relațiile date se pot scrie: $2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} = \frac{-14}{65}$;

$2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} = -\frac{8}{65}$, de unde $\operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = \frac{7}{4}$ și $2 \sin (a+b) \cos^2 \frac{a+b}{2} = \frac{14 \cdot 8}{65^2}$.

Dar $\sin (a+b) = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a+b}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a+b}{2}} = \frac{56}{65} \Rightarrow \cos^2 \frac{a-b}{2} = \frac{1}{65}$;

$$\sin^2 \frac{a-b}{2} = \frac{64}{65} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \frac{a-b}{2} = 64 \text{ sau } \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = \pm 8.$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a+b}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a+b}{2}} = -\frac{56}{33}.$$

2.126. $E_1 = \cos \frac{\pi}{8} \left(\sin \frac{11\pi}{24} - \sin \frac{5\pi}{29} \right) - \left(\sin \frac{\pi}{24} - \sin \frac{7\pi}{24} \right) \sin \frac{\pi}{8} =$

$= 2 \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{6} + 2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{6} = 2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{6} \left(\cos \frac{\pi}{8} + \right.$

$\left. + \sin \frac{\pi}{8} \right) = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{8} \right] =$

$= \sqrt{3} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} =$

$= \sqrt{3} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$

$E_2 = \sin \frac{\pi}{8} \left(\cos \frac{11\pi}{24} + \cos \frac{7\pi}{24} \right) = 2 \sin \frac{\pi}{8} \cos$

$= 2 \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} =$

2.127. Grupăm termenii extremi. Avem

$$E = \frac{2\sin\left(a+\frac{3b}{2}\right)x\cos\frac{3b}{2}x + 2\sin\left(a+\frac{3b}{2}\right)x\cos\frac{b}{2}x}{2\cos\left(a+\frac{3b}{2}\right)x\cos\frac{3b}{2}x + 2\cos\left(a+\frac{3b}{2}\right)x\cos\frac{b}{2}x} =$$

$$= \operatorname{tg}\left(a+\frac{3b}{2}\right)x.$$

2.128 a) $2(\sin 36^\circ + \sin 72^\circ) = \frac{4\sin 54^\circ \cdot \cos 18^\circ \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ} =$

$$= \frac{2\sin 54^\circ \cdot \sin 36^\circ}{\sin 18^\circ} = \frac{2\cos 36^\circ \cdot \sin 36^\circ}{\sin 18^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 16^\circ} = \frac{\cos 18^\circ}{\sin 18^\circ} = \operatorname{ctg} 18^\circ.$$

b) Înmulțim cu $2\sin 6^\circ$ și relația cerută se mai scrie

$2\sin 6^\circ + 4(\cos 72^\circ \sin 6^\circ + \cos 24^\circ \sin 6^\circ + \cos 48^\circ \sin 6^\circ) = 1;$

$2\sin 6^\circ + 2(\sin 78^\circ - \sin 66^\circ + \sin 30^\circ - \sin 18^\circ + \sin 54^\circ - \sin 42^\circ) = 1$

sau $\sin 6^\circ + \sin 54^\circ + \sin 78^\circ = \sin 18^\circ + \sin 42^\circ + \sin 66^\circ.$

$2\sin 30^\circ \cos 24^\circ + \sin 78^\circ = 2\sin 30^\circ \cos 12^\circ + \sin 66^\circ;$

$\sin 78^\circ - \sin 66^\circ = 2\sin 30^\circ(\cos 12^\circ - \cos 24^\circ)$, de unde

$\sin 78^\circ - \sin 66^\circ = \cos 12^\circ - \cos 24^\circ = \sin 78^\circ - \sin 66^\circ$, evident.

2.19. Avem succesiv

$$\frac{\sin x + \sin 2x}{2\cos x - 1} = \frac{\sin x(1+2\cos x)}{2\cos x - 1} = \frac{\sin x \cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \cos x\right)}{2\left(\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\right)} =$$

$$= \frac{\sin x \cdot 2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\Big)} = \sin x \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)\cdot$$

2.130. a) $E(x) = \frac{2\cos 6x\cos 2x + 2\cos 6x}{2\sin 6x\cos 2x + 2\sin 6x} =$

$$= \frac{\cos 6x(\cos 2x+1)}{\sin 6x(\cos 2x+1)} = \operatorname{ctg} 6x.$$

b) $E\left(\frac{\pi}{72}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{1-\cos\frac{\pi}{6}}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{1-\sqrt{3}/2}}=$

$$=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}=2+\sqrt{3}.$$

2.131. $\sin x+\cos 4x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos 4x=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\right.$

$$\left.+\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5x}{2}\right);$$

$$\cos 2x+\sin 3x=\cos 2x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

$$E=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5x}{2}\right)\left[\cos\frac{\pi}{4}+\frac{3x}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\Big]=$$

$$=4\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos x.$$

2.132. Deoarece $2\sin x\cos x=\sin 2x$ și $\left(\frac{7\pi}{16}\pm a\right)+\left(\frac{\pi}{16}\pm a\right)=$

$=\frac{\pi}{2}$ și $\left(\frac{5\pi}{16}\pm a\right)+\left(\frac{3\pi}{16}\mp a\right)=\frac{\pi}{2}$, avem

$$E=2^3\sin\left(\frac{\pi}{8}+2a\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}-2a\right)\sin\left(\frac{3\pi}{8}+2a\right)\sin\left(\frac{3\pi}{8}-2a\right);$$

însă $\left(\frac{\pi}{8}\pm 2a\right)+\left(\frac{3\pi}{8}\mp 2a\right)=\frac{\pi}{2}$; $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, deci

$$E=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+4a\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-4a\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-4a\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-4a\right)=$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-8a\right)=\cos 8a.$$

Observație. Relația din enunț folosește la rezolvarea în alt mod a ecuației $\cos 8x=0$. Avem $8x=k\pi+\pi/2\Rightarrow x=k\pi/8+\pi/16$; $k\in\mathbf{Z}$. Soluțiile cuprinse în intervalul $[0,\pi]$ sînt

$$x\in\left\{\frac{\pi}{16},\ \frac{3\pi}{16},\ \frac{5\pi}{16},\ \frac{7\pi}{16},\ \frac{9\pi}{16},\ \frac{11\pi}{16},\ \frac{13\pi}{16},\ \frac{15\pi}{16}\right\}.$$

Aceleași soluții se obțin pentru $E=0$, adică egalînd cu zero fiecare sinus din cei opt factori, făcînd $a=0$, obținem relația:

$$2^7\cdot\sin^2\frac{\pi}{16}\sin^2\frac{3\pi}{16}\sin^2\frac{5\pi}{16}\sin^2\frac{7\pi}{16}=1$$

sau $2^7 \cdot \sin^2 \frac{\pi}{16} \sin^2 \frac{3\pi}{16} \cos^2 \frac{3\pi}{16} \cos^2 \frac{\pi}{16} = 1,$

de unde $2^3 \cdot \sin^2 \frac{\pi}{8} \sin^2 \frac{3\pi}{8} = 2^3 \cdot \sin^2 \frac{\pi}{8} \cos^2 \frac{\pi}{8} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1,$

care este evidentă deoarece $\sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$.

2.133, Prima relație are loc dacă $0 + 2k\pi < 4x < \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, sau $\frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, și obținem

$$x_1 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right).$$

A doua relație are loc dacă $\pi/2 + 2k\pi < 6x < 3\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, de unde

$$x_2 \in \left(\frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{9\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right) \cup \ldots \cup \left(\frac{21\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\right).$$

Rezultă:

$$x = x_1 \cap x_2 = \left(\frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{6\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{12}, \frac{15\pi}{12}\right) \cup$$

$$\cup \left(\frac{18\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}\right).$$

2.134. Desfacem produsele în sume: $\cos \frac{5k\pi}{16} \cdot \cos \frac{9k\pi}{16} = \cos \frac{14k\pi}{16} + \cos \frac{4k\pi}{16}$; $\cos \frac{7k\pi}{16} \cdot \cos \frac{11k\pi}{16} = \cos \frac{18k\pi}{16} + \cos \frac{4k\pi}{16}$. Revine deci să arătăm relația $\cos \frac{14k\pi}{16} = \cos \frac{18k\pi}{16}$, dar $\frac{14k\pi}{16} + \frac{18k\pi}{16} = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

2.135. Avem succesiv

a) $E_1 = [\cos (a - b) + \cos (a + b)] [\cos (a - b) - \cos (a + b)] =$

$$= 2 \cos a \cos b \cdot 2 \sin a \cdot \sin b = \sin 2a \sin 2b.$$

b) Egalitatea se mai scrie

$\cos^2 a + \cos^2 b = 1 + (\cos a \cos b + \sin a \sin b)(\cos a \cos b + \sin a \sin b)$

sau $\cos^2 a + \cos^2 b = 1 + \cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b$.

sau $\cos^2 a + \cos^2 b = 1 + \cos^2 a \cos^2 b - (1 - \cos^2 a)(1 - \cos^2 b)$.

În fine, $\cos^2 a + \cos^2 b = 1 + \cos^2 a \cos^2 b - 1 + \cos^2 a + \cos^2 b - \cos^2 a \cos^2 b$, care este evidentă.

2.136. Avem $2 \sin 18^\circ \cos 7^\circ - 2 \cos 36^\circ \cos 7^\circ + \cos 7^\circ =$

$= \cos 7^\circ [1 + 2 (\sin 18^\circ - \sin 54^\circ)] = \cos 7^\circ [1 - 4 \cos 36^\circ \sin 18^\circ] =$

$$= \cos 7^\circ \cdot \left[1 - \frac{4 \cos 36^\circ \sin 18^\circ \cos 18^\circ}{\cos 18^\circ}\right] = \cos 7^\circ \left(1 - \frac{2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ}\right) =$$

$$= \cos 7^\circ \left(1 - \frac{\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ}\right) = \cos 7^\circ (1 - 1) = 0.$$

2.137. a) $1 - \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x}$;

$$\frac{2 \cos 2x \cdot 2 \sin^2 x}{4 \sin^2 x \cos^2 a} = \frac{2 \cos 2x (1 - \cos 2x)}{\sin^2 2x} =$$

$$= 2 \operatorname{ctg} 2x \left(\frac{1}{\sin 2x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x}\right) = 2 \operatorname{ctg} 2x (\operatorname{cosec} 2x - \operatorname{ctg} 2x).$$

b) $\operatorname{ctg}^2 x - 1 = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{\cos 2x}{\sin^2 x} = \dfrac{2 \cos 2x \cdot 2 \cos^2 x}{4 \sin^2 x \cos^2 x} =$

$$= \frac{2 \cos 2x (1 + \cos 2x)}{\sin^2 2x} = 2 \operatorname{ctg} 2x \left(\frac{1}{\sin 2x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x}\right) =$$

$$= 2 \operatorname{ctg} 2x (\operatorname{cosec} 2x + \operatorname{ctg} 2x).$$

c) $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = \dfrac{\dfrac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}}{\dfrac{1 + \cos 2x}{\sin 2x}} = \dfrac{\operatorname{cosec} 2x - \operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{cosec} 2x + \operatorname{ctg} 2x}$.

2.138. Avem succesiv

1) $[\cos (a + b) + \cos (a - b)]^2 = (2 \cos a \cos b)^2 = 2 \cos^2 a \cdot 2 \cos^2 b =$
$= (1 + \cos 2a)(1 + \cos 2b) = 4 \cos^2 a \cos^2 b)$.

2) Relația a doua se deduce din prima înlocuind pe a prin $(\pi/2 - a)$ și pe b prin $(\pi/2 - b)$.

2.139. $\sin (a - b) + \sin (a - c) = 2 \sin \dfrac{2a - b - c}{2} \cos \dfrac{b - c}{2}$;

$\sin (b - c) = 2 \sin \dfrac{b - c}{2} \cos \dfrac{b - c}{2}$. Prima parte devine

$$2 \cos \frac{b - c}{2} \left(\sin \frac{2a - b - c}{2} + \sin \frac{b - c}{2}\right)$$

$$= 4 \cos \frac{b - c}{2} \sin \frac{a - c}{2} \cos \frac{a - b}{2}.$$

2.140. a) $2E = \sin (8x - 40^\circ) + \sin 20^\circ + \sin (22x + 100^\circ) - \sin 20^\circ =$
$= \sin (8x - 40^\circ) + \sin (22x - 260^\circ) = 2 \sin (15x - 150^\circ) \cos(-7x +$
$+ 110^\circ) = 2 \sin (15x - 150^\circ) \sin (7x - 20^\circ)$

b) $30 \leqslant 15x - 150° \leqslant 150°$; $60° \leqslant 7x - 20° \leqslant 120°$ de unde

$$\sin(15x - 150°) \geqslant \frac{1}{2}; \quad \sin(7x - 20°) \geqslant \sqrt{3}/2 \text{ deci } E \geqslant \sqrt{3}/2.$$

c) Pentru $x = 20°$, $E = \sin 150° \sin 120° = \sin 30° \sin 60° = \sqrt{3}/2$.

2.141. Avem $\cos(3x - \pi/3) - \cos(\pi/3 - 3x) = \sin(3x + \pi/6)$;

$$\cos(3x - \pi/6) = \cos(\pi/6 - 3x) = \sin(3x + \pi/3).$$

Să arătăm că $1/4 \leqslant \sin^2(3x + \pi/6) \leqslant 3/4 \leqslant \sin^2(3x + \pi/3)$. Dar $\pi/6 \leqslant 3x + \pi/6 \leqslant \pi/3$ sau $1/2^2 \leqslant \sin^2(3x + \pi/3) \leqslant (\sqrt{3}/2)^2 = 3/4$, apoi $\pi/3 \leqslant 3x \leqslant \pi/2$, deci $(\sqrt{3}/2)^2 \leqslant \sin(3x + \pi/3) \leqslant 1$.

Se mai pot da și alte soluții transformînd produsele în sume trigonometrice.

2.142. a) Avem $\cos(4x - 82°) = \sin(90° - 4x + 82°) = \sin(172° - 4x) = \sin(180° + 8° - 4x) = \sin(4x + 8°)$.

Inegalitatea devine $3/2 \leqslant 2\sin^2(4x + 8°) \leqslant 2$ sau $3/4 \leqslant \sin^2(4x + 8°) \leqslant 1$. Deoarece $13° \leqslant x \leqslant 28°$, avem $60° \leqslant 4x + 8° \leqslant 120°$, deci $\sqrt{3}/2 \leqslant \sin(4x + 8°)$ semnul egal pentru $x = 13°$ și $x = 20°$; $\sin(4x + 8°) \leqslant 1$, egal pentru $x = 20°\,30'$, deci $3/4 \leqslant \sin^2(4x + 8°) \leqslant 1$. Primul egal are loc pentru $x = 13°$ și $x = 28°$, iar al doilea egal pentru $x = 20°30'$.

b) $\operatorname{tg}(4x - 82°) = -\operatorname{ctg}(4x + 8°)$.

Cum $60° \leqslant 4x + 8° \leqslant 120°$, $|\operatorname{ctg}(4x + 8°)| \leqslant 1/\sqrt{3}$. Inegalitatea devine $0 \leqslant 2\operatorname{ctg}^2(4x + 8°) \leqslant 2/3$, evidentă. Primul semn egal are loc pentru $x = 20°30'$, iar al doilea egal pentru $x = 13°$ și $x = 28°$.

2.143. a) Notăm $12x = y$. Să arătăm că dacă $120° \leqslant x \leqslant 180°$, atunci

$$-1 \leqslant \sin(y - 60°)\cos(30° + y) \leqslant -\frac{3}{4} \text{ sau:}$$

$$1 \geqslant \sin(60° - y)\cos(30° + y) \geqslant \frac{3}{4},$$

$$\Rightarrow 1 \geqslant \sin^2(60° - y) \geqslant 3/4 \text{ sau } 1 \geqslant \sin^2(y - 60°) \geqslant 3/4.$$

Avem $120° - 60° \leqslant y - 60° \leqslant 180° - 60°$ sau $60° \leqslant y - 60° \leqslant 120°$. Prin urmare, $\sin^2(60° - y)$ are cea mai mică valoare pentru $y = 120°$ sau $y = 180°$ și anume $3/4$; iar cea mai mare valoare cînd $y - 60° = 90°$ adică $y = 150°$ și deci valoarea unu.

b) Notăm $y = 18x$. Să arătăm că dacă $180° \leqslant y \leqslant 270°$, atunci

$$1/2 \leqslant \sin(y + 45°)\cos(45° - y) \leqslant 1 \text{ sau } 1/2 \leqslant \sin^2(y + 45) \leqslant 1.$$

Dacă notăm $(y + 45°) = z$ deci $225° - z \leqslant 315°$. În acest caz să arătăm că $1/2 \leqslant \sin^2 z \leqslant 1$.

Pentru $z = 225°$ sau $z = 315°$ avem $\sin^2 z = 1/2$, iar pentru $z = 270°$ avem $\sin^2 z = 1$.

c) Dacă $180° \leqslant y \leqslant 270°$, atunci:

$$-\frac{1}{2} \leqslant \sin(y - 45°)\cos(y + 45°) \leqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant \cos^2(45° + y) \geqslant 0;$$

Avem $225° \leqslant y + 45° \leqslant 315°$.

Pentru $y + 45° = 225°$ sau $315°$ avem $\cos^2(45° + y) = 1/2$, iar pentru $45 + y = 270°$ avem $\cos^2 270° = 0$.

2.144. Avem succesiv $E = (1 + \operatorname{cosec} x)(1 + \sec x) =$

$$= \left(1 + \frac{1}{\sin x}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) = 1 + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin x \cos x} =$$

$$= 1 + \frac{\sin x + \cos \pi + 1}{\sin x \cos x} = 1 + \frac{\sqrt{1 + \sin 2x + 1}}{\frac{1}{2}\sin 2x} =$$

$$= 1 + 2\left(\frac{1}{\sin 2x} + \sqrt{\frac{1 + \sin 2x}{\sin^2 2x}}\right) = 1 + 2\left(\frac{1}{\sin 2x} + \sqrt{\frac{1}{\sin^2 2x} + \frac{1}{\sin 2x}}\right)$$

Cele mai mici valori ale fiecărei fracții din expresia precedentă se obțin **cînd** numitorul are cea mai mare valoare, adică pentru $\sin 2x = 1$, deci **pentru** $x = \pi/4$:

$$E \geqslant 1 + 2\left(\frac{1}{1} + \sqrt{\frac{1}{1} + \frac{1}{1}}\right) = 1 + 2(1 + \sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2}.$$

2.145. În ipoteza dată relația se mai scrie $\sin 2x = (1 - \sin x)(1 + \cos x) \cdot 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$. Avem

$$1 - \sin x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right); \quad 1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}.$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}; \quad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}.$$

$$(1 - \sin x)(1 + \cos x)\, 2 \operatorname{tg}\frac{x}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \cdot 2\cos^2\frac{x}{2} \cdot$$

$$\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = 8\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} =$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin x = 2\cos x \sin x = \sin 2x.$$

2.146. Avem $\cos x + \cos 6x = 2\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{5x}{2}$; $2(\cos 2x + \cos 5x) = 4\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2}$; $\cos 3x + \cos 4x = 2\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

$$E(x) = 2\cos\frac{7x}{2}\left(\cos\frac{5x}{2} + \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) =$$

$$= 4\cos\frac{7x}{2}\left(\cos 2x\cos\frac{x}{2} + \cos x\cos\frac{x}{2}\right) = 4\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}(\cos 2x +$$

$$+ \cos x) = 8\cos\frac{7x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}.$$

2. 147. După ce aducem la același numitor, numărătorul este $(a\sin x + b\cos x)(a\cos x - b\sin x) + (a\sin x - b\cos x)(a\cos x + b\sin x) =$

$$= 2\sin x\cos x(a^2 - b^2) = \sin 2x(a^2 - b^2) = -a^2\frac{\sin 2x\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

Numitorul este $a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x = a^2\left(\cos^2 x - \frac{b^2}{a^2}\sin^2 x\right) =$

$$= \frac{a^2}{\sin^2 x}(\sin\alpha\cos x + \cos\alpha\sin x)(\sin\alpha\cos x - \cos\alpha\sin x) =$$

$$= \frac{a^2}{\sin^2\alpha}\cdot\sin(\alpha + x)\sin(\alpha - x).$$

Rezultă $E = \dfrac{\sin 2x\cos 2\alpha}{\sin(x+\alpha)\sin(x-\alpha)}$.

2.148. a) Transformăm în produse și se obține

$$\cos x + \cos 9x = 2\cos 4x\cos 5x;\quad \cos 3x + \cos 7x = 2\cos 5x\cos 2x,$$

deci $E = 2\cos 5x(\cos^2 x + \cos 4x) = 4\cos x\cos 3x\cos 5x.$

b) În cazul $x = \pi/9$ avem

$$\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{7\pi}{9} + \cos\pi = 4\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{5\pi}{9}.$$

Ținînd seama de egalitățile: $\cos\frac{\pi}{3} = (1/2)$; $\cos\frac{7\pi}{9} = -\cos\frac{2\pi}{9}$, $\cos\frac{5\pi}{9} =$

$$= -\cos\frac{4\pi}{9} = -\sin\frac{\pi}{18},\ \text{rezultă: } \cos\frac{\pi}{9} + \frac{1}{2} - \cos\frac{2\pi}{9} - 1 =$$

$$= 4\cos\frac{\pi}{9}\cdot\frac{1}{2}\left(-\sin\frac{\pi}{18}\right),\ \text{de unde obținem } \frac{1}{2} + \cos\frac{2\pi}{9} =$$

$$= \cos\frac{\pi}{9}\left(1 + 2\sin\frac{\pi}{18}\right).$$

c) Mai ținem seama că $\sin\frac{\pi}{18} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{9}}{2}}$ și $\cos\frac{2\pi}{9} =$

$$= 2\cos^2\frac{\pi}{9} - 1 \text{ și deci notînd } \cos\frac{\pi}{9} = t \text{ rezultă succesiv: } 1 + \frac{1}{2} -$$

$$-2t^2 + 1 - 1 = -2t\sqrt{\frac{1-t}{2}};\quad 2t^2 - t - \frac{1}{2} = 2t\sqrt{\frac{1-t}{2}}.$$

După ridicare la pătrat, avem: $16t^4 - 8t^3 - 12t^2 + 1 = 0$, sau $16t^4 + 4t + 1 = 4t^2(2t + 3)$.

2.149. Avem $\sin a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ și $\cos a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$.

Prima parte a relației din enunț se mai scrie:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + b - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - b\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + b - a\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - b\right)} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - b\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2b\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2b\right)} =$$

$$= \frac{1 + \sin 2b}{\cos 2b}.$$

2.150. Transformăm produsele în sume și avem

$$E_1 = \frac{1}{2}[\cos(2a_1 + a^2 + b_2) + \cos(a_2 + b_2) - \cos(2b_1 + a_2 + b_2) -$$

$$- \cos(a_2 + b_2)] = \frac{1}{2}[\cos(2a_1 + a_2 + b_2) + \cos(a_2 - b_2) -$$

$$- \cos(2b_1 + a_2 + b_2) - \cos(a_2 - b_2)].$$

$$E_2 = \cos a_1 \sin(a_1 + a_2 + b_2) + \cos b_1 \sin(b_1 + a_2 + b_2) =$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(2a_1 + a_2 + b_2) + \sin(a_2 + b_2) + \sin(2b_1 + a_2 + b_2) +$$

$$+ \sin(a_2 + b_2)]$$

iar $\sin(a_2 + b_2) + \cos(a_1 + a_2)\sin(a_1 + b_1) + \cos(b_1 + b_2)\sin(b_1 + a_2) =$

$$= \frac{1}{2}[2\sin(a_2 + b_2) + \sin(2a_1 + a_2 + b_2) + \sin(b_2 - a_2) +$$

$$+ \sin(2b_1 + a_2 + b_2) + \sin(a_2 - b_2)]. \text{ Relațiile sînt verificate.}$$

2.151. Din relația dată rezultă: $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} =$

$$= 4\sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x+y}{2} \text{ sau } \sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2} -\right.$$

$$\left. - 2\cos\frac{x+y}{2}\right) = 0 \text{ și de aici sau } \sin\frac{x+y}{2} = 0 \Rightarrow x + y =$$

$$= 2k\pi \text{ sau } \cos\frac{x-y}{2} - 2\cos\frac{x+y}{2} = 0 \text{ sau încă } 3\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2} -$$

$$- \cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} = 0 \text{ și dacă } \cos\frac{x}{2} \neq 0, \cos\frac{y}{2} \neq 0, \text{ atunci } \operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \frac{1}{3}.$$

Deci trebuie ca $x + y \neq 2k\pi$ și $x \neq (2k + 1)\pi$, $y \neq (2k + 1)\pi$.

2.152. $\sin^2 a + \sin^2 b + \cos(a+b)\cos(a-b) = \frac{1}{2}[1 - \cos 2a + 1 - \cos 2b + \cos 2a + \cos 2b] = 1.$

Avem $\left(a_1 \to \frac{a+b}{2},\ b_1 \to \frac{a-b}{2}\right)$.

$$\sin^2(a_1+b_1) + \sin^2(a_1-b_1) + \cos 2a_1 \cos 2b_1 = \sin^2 a + \sin^2 b + \cos(a+b)\cos(a-b) = 1, \text{ sau} \left(a_2 \to a - \frac{\pi}{2},\ b_2 \to b - \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\cos^2 a_2 + \cos^2 b_2 - \cos(a_2+b_2)\cos(a_2-b_2) = \sin^2 a + \sin b + \cos(a+b)\cos(a-b) = 1. \text{ sau} \left(a_3 \to \frac{a+b-\pi}{2},\ b_3 \to \frac{a-b}{2}\right).$$

$$\cos^2(a_3+b_3) + \cos^2(a_3-b_3) - \cos 2a_3 \cos 2b_3 = \cos^2(a-\pi/2) + \cos^2(b-\pi/2) - \cos(a+b-\pi)\cos(a-b) = \sin^2 a + \sin^2 b + \cos(a+b)\cos(a-b) = 1.$$

2.153. $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} = \frac{-\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} =$

$= \frac{-\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{4\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{-\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{8}$. Pentru a doua egalitate observăm că avem

$$\cos\frac{\pi}{7} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) = \sin\frac{5\pi}{14};\quad \cos\frac{4\pi}{7} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{7}\right) = \sin\frac{\pi}{14};$$

$$\cos\frac{5\pi}{7} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{-3\pi}{14}\right) = -\sin\frac{3\pi}{14}.$$

2.154. Inegalitatea se mai scrie $4[\cos(a-b) - \cos(a+b)]\cos(a+b) \leqslant 1$.

Notăm $(a-b) = x$ și $(a+b) = y$, de unde $4(\cos x - \cos y)\cos y \leqslant 1$ sau $4\cos^2 y - 4\cos x \cos y + 1 \geqslant 0$, sau $4\cos^2 y - 4\cos x \cos y + \cos^2 x + \sin^2 x \geqslant 0$, $(2\cos y - 1)^2 + \sin^2 x \geqslant 0$ inegalitate evidentă.

Semnul egal are loc dacă $\sin x = 0$ și $\cos y = 1/2$.

2.155. Înmulțind ambii membri ai egalității cu $\sin x$ și ținem seama că

$$\frac{\sin x \cdot \cos 3x}{\sin 2x \cdot \sin 4x} = \frac{\sin 4x - \sin 2x}{2\sin 2x \cdot \sin 4x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\sin 4x}\right);$$

$$\frac{\sin x \cdot \cos 5x}{\sin 4x \cdot \sin 6x} = \frac{\sin 6x - \sin 4x}{2\sin 4x \cdot \sin 6x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin 4x} - \frac{1}{\sin 6x}\right);$$

$$\frac{\sin x \cdot \cos 7x}{\sin 6x \cdot \sin 8x} = \frac{\sin 8x - \sin 6x}{2 \sin 6x \cdot \sin 8x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin 6x} - \frac{1}{\sin 8x}\right).$$

Adunînd membru cu membru obținem

$$E = \sin x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\sin 8x}\right) = \frac{\sin 8x - \sin 2x}{2 \sin 2x \cdot \sin 8x} = \frac{\sin 3x \cdot \cos 5x}{\sin 2x \cdot \sin 8x}$$

$$\text{sau } E = \frac{\sin 3x \cdot \cos 5x}{\sin x \sin 2x \sin 8x}.$$

Generalizare. Ținem seama că

$$\frac{\sin x \cdot \cos (2n+1)x}{\sin 2nx \sin (2n+2)x} = \frac{\sin (2n+2)x - \sin 2nx}{2 \sin 2nx \sin (2n+2)x} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin 2nx} = \frac{1}{\sin(2n+2)x}\right).$$

$$E = \frac{\cos 3x}{\sin 2x \cdot \sin 4x} + \frac{\cos 5x}{\sin 4x \cdot \sin 6x} + \ldots + \frac{\cos (2n+1)x}{\sin 2nx \cdot \sin (2n+2)x}$$

$$= \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin 2x} \cdot \frac{1}{\sin (2n+2)x}\right) = \frac{\sin nx \cdot \cos (n+2)x}{\sin x \cdot \sin 2x \cdot (2n+2)x}$$

2.156. a) Deoarece $0 < \frac{x-y}{2} < \frac{x+y}{2} < \frac{\pi}{2}$, ținînd seama de monotonia funcției cosinus pe intervalul $(0, \pi/2)$ rezultă $\cos \frac{x-y}{2} > \cos \frac{x+y}{2}$ sau

$$2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x-y}{2} > 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2},$$

de unde $\sin (x+y) > \sin (x-y) > \sin x - \sin y$.

b) Ținînd seama că $\sin \frac{x-y}{2} > 0$, deci $\cos \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} < \sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2}$ sau $\cos \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} + \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} < \sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} + \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2}$, deci:

$$\frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{y}{2}} < \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{y}{2} + \cos \frac{y}{2}} \Rightarrow \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{y}{2}} < \frac{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2}{\left(\sin \frac{y}{2} + \cos \frac{y}{2}\right)^2}.$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{y}{2} \cos^2 \frac{y}{2}} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} < \frac{(1 + \sin x)^2 \sin^2 \frac{x}{2}}{(1 + \sin y)^2 \sin^2 \frac{y}{2}}.$$

2.157. Dacă $\sin x = \sin y$, atunci $\sin x - \sin y = 0$, $2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2} = 0$, de unde $\frac{x-y}{2} = k\pi$, adică $x - y = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, şi: $\frac{x+y}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ adică $x + y = (2k_1 + 1)\pi$, $k_1 \in \mathbf{Z}$.

Rezultă $x = \frac{2k + 2k_1 + 1}{2}\pi$; $y = \frac{2k_1 + 1 - 2k}{2} \cdot \pi$, $k \in \mathbf{Z}$, $k_1 \in \mathbf{Z}$.

2.158. Avem $\sin x - \sin x \sin^2 y - \sin y + \sin^2 x \sin y = 0$, sau $(\sin x - \sin y)(1 + \sin x \sin y) = 0$, care dă $\sin x - \sin y = 0$ sau $1 + \sin x \sin y = 0$, de unde sau $2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} = 0$ sau $\sin x \sin y = -1$. Rezultă $x - y = 2k\pi$ sau $x + y = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Relaţia $\sin x \sin y = -1$ nu poate fi satisfăcută dcoarcce $\cos x \neq 0$ şi $\cos y \neq 0$.

2.159. Relaţia de condiţie se mai scrie:

$$\frac{\sin 2(a+c)}{\sin 2b} = n; \frac{n+1}{n-1} = \frac{\sin 2(a+c) + \sin 2b}{\sin 2(a+c) - \sin 2b} =$$

$$= \frac{2 \sin (a+b+c) \cos (a-b+c)}{2 \cos (a+b+c) \sin (a-b+c} = \frac{\operatorname{tg}(a+b+c)}{\operatorname{tg}(a-b+c)}.$$

2.160. Notăm fiecare fracţie respectiv cu A, B, C, D, E, F.

1) $A > B$. Avem $\frac{(\sin x - \cos x^2)}{(\sin y - \cos y)^2} > \frac{(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)}{(\sin y + \cos y)(\sin y - \cos y)}$ sau $\frac{\cos x - \sin x}{\cos y - \sin y} > \frac{\cos x + \sin x}{\cos y + \sin y}$. Numitorii sînt pozitivi, deci obţinem $2 \sin x \cos y + 2 \cos x \sin y = 2 \sin (x + y) > 0$, evident.

2) $B > C$. Avem $\cos y > \sin y$ şi $\cos x > \sin x$, deci să arătăm că $\cos^2 x \cos^2 y - \sin^2 \cos^2 y - \cos^2 x \cos^2 y + \cos^2 x \sin^2 y - > 0$, sau $\cos^2 x \sin^2 y - \sin^2 x \cos^2 y > 0 \Leftrightarrow \sin (y + x) \sin (y - x) > 0$, evident

3) $C > D$ care se mai scrie $\frac{\cos x}{\cos y} > \frac{\sin x + \cos x}{\sin y + \cos y} \Rightarrow \sin (y - x) > 0$, evident.

4) $D > E$. Inegalitatea se mai scrie $\frac{1 + \sin 2x}{1 + \sin 2y} > \frac{\sin 2x}{\sin 2y} \Rightarrow \sin 2y > \sin 2x$, evident.

5) $E > F$. Inegalitatea se mai scrie $\frac{\cos x}{\cos y} > \frac{\sin x}{\sin y}$ sau $\sin (y - x) > 0$ care este evident.

2.161. Prima inegalitate se mai scrie $\frac{\cos 2a}{\cos 2b} < \frac{\sin 2a}{\sin 2b}$ și fiind toți termenii pozitivi, putem scrie eliminînd numitorii $\sin 2b \cos 2a - \cos 2b \cdot \sin 2a < 0 \Rightarrow \sin 2(b-a) < 0$, ceea ce este evident, deoarece $b - a < 0$. Deci (1) este adevărată.

Ultima fracție o putem scrie

$$\sqrt{1+\sin 4a} - \sqrt{\cos 4a} = \sqrt{(\cos 2a + \sin 2a)^2} - \sqrt{(\cos 2a + \sin 2a)(\cos 2a - \sin 2a)} = \sqrt{\cos 2a + \sin 2a}\,(\sqrt{\cos 2a + \sin 2a} - \sqrt{\cos 2a - \sin 2a}) =$$

$$= \sqrt{\cos 2a + \sin 2a}\,\frac{2\sin 2a}{\sqrt{\cos 2a + \sin 2a} + \sqrt{\cos 2a - \sin 2a}} \cdot$$

și analog $\sqrt{1+\sin 4b} - \sqrt{\cos 4b} = \sqrt{\cos 2b + \sin 2b}$

$$\cdot \frac{2\sin 2b}{\sqrt{\cos 2b + \sin 2b} + \sqrt{\cos 2b - \sin 2b}} \cdot$$

Deci:

$$\frac{\sqrt{1+\sin 4a} - \sqrt{\cos 4a}}{\sqrt{1+\sin 4b} - \sqrt{\cos 4b}} = \frac{\sin 2a}{\sin 2b}$$

$$\cdot \frac{\sqrt{\cos 2a + \sin 2a}\,(\sqrt{\cos 2b + \sin 2b}) + \sqrt{\cos 2b - \sin 2b})}{\sqrt{\cos 2b + \sin 2b}\,(\sqrt{\cos 2a + \sin 2a} + \sqrt{\cos 2a - \sin 2a})} \cdot$$

Acum se vede că este suficient să arătăm că

$$\frac{\sqrt{\cos 2a + \sin 2a}\,(\sqrt{\cos 2b + \sin 2b} + \sqrt{\cos 2b - \sin 2b}}{\sqrt{\cos 2b + \sin 2b}\,(\sqrt{\cos 2a + \sin 2a} + \sqrt{\cos 2y - \sin 2y}} > 1.$$

Dar din ipoteză $2b < 2a < \pi/4$ și deci $\cos 2b - \sin 2b > 0$, $\cos 2a - \sin 2a > 0$.

Termenii fracției fiind pozitivi, eliminînd numitorul și făcînd reducerile, obținem

$$\sqrt{(\cos 2a + \sin 2a)(\cos 2b - \sin 2b)} > \sqrt{(\cos 2b + \sin 2b)(\cos 2a - \sin 2a)}$$

și de aici $\sin 2a \cos 2b - \sin 2b \cos 2a > 0 \Rightarrow \sin 2(a-b) > 0$, adevărat, căci $a - b > 0$, astfel că

$$\frac{\sqrt{1+\sin 4a} - \sqrt{\cos 4a}}{\sqrt{1+\sin 4b} - \sqrt{\cos 4b}} > \frac{\sin 2a}{\sin 2b} = \frac{\sin a \cos a}{\sin b \cos b.} \cdot$$

2.162. Avem $x + y = a < \pi/2$ și $P = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$. Putem scrie

$$P = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\cos(x-y+\cos(x+y)} = \frac{\cos(x-y) - \cos a}{\cos(x-y) + \cos a} =$$

$$= \frac{\cos(x-y) - \cos a - 2\cos a}{\cos(x-y) + \cos a}, \text{ de unde } P = 1 - \frac{2\cos a}{\cos(x-y) + \cos a} \cdot$$

P este maxim, cînd scăzătorul este minim, și acesta cînd numitorul scăzătorului, care este pozitiv, va avea cea mai mare valoare posibilă, adică atunci cînd $\cos(x-y) = 1$, deci $x = y = a/2$.

2.163. Inegalitatea se mai scrie

$$2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \leqslant \frac{3}{2} - 1 + 2\sin^2\frac{x-y}{2},$$

$$4\sin^2\frac{x-y}{2} - 4\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} + 1 \geqslant 0,$$

$$4\sin^2\frac{x-y}{2} - 4\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} + \cos^2\frac{x+y}{2} + 1 - \cos^2\frac{x+y}{2} \geqslant 0,$$

$$\left[2\sin\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\right]^2 + \sin^2\frac{x+y}{2} \geqslant 0.$$

Egalitate avem cînd

$$\sin\frac{x+y}{2} = 0 \tag{1}$$

și

$$2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} = 0. \tag{2}$$

Din relația (1) se deduce $x + y = 2k\pi$. Înlocuind pe $(x + y)$ în relația (2) obținem $2\sin\frac{x-y}{2} \pm 1 = 0$ de unde $\sin\frac{x-y}{2} = \pm\frac{1}{2}$, deci $x - y = 2k_1\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $k_1 \in \mathbf{Z}$.

2.164. Prima relație se mai scrie

$$10\sin a = 3\cdot 2\sin\frac{2a+b}{2}\cos\frac{b}{2} \tag{1}$$

$$4\sin a = 3\cdot 2\sin\frac{b}{2}\cos\frac{2a+b}{2} \tag{2}$$

Din (1) și (2) deducem $\frac{5}{2} = \operatorname{tg}\frac{2a+b}{2}\operatorname{ctg}\frac{b}{2} \to 2\operatorname{tg}\frac{2a+b}{2} = 5\operatorname{tg}\frac{b}{2}$.

Reciproc avem

$$5\operatorname{tg}\frac{b}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{b}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{2a+b}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{b}{2}.$$

$$5\operatorname{tg}\frac{b}{2} - 2\operatorname{tg}\frac{b}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{2a+b}{2} - 2\operatorname{tg}\frac{b}{2}, \text{ sau}$$

$$7\operatorname{tg}\frac{b}{2} = 2\frac{\sin(a+b)}{\cos\frac{2a+b}{2}\cos\frac{b}{2}} \text{ și } 3\operatorname{tg}\frac{b}{2} = 2\frac{\sin a}{\cos\frac{2a+b}{2}\cos\frac{b}{2}} \text{ sau}$$

$$7\sin a = 3\sin(a+b).$$

2.165. Avem $\frac{\sin(a+2b)}{\sin a} = \frac{5}{1}$; sau $\frac{\sin(a+2b)+\sin a}{\sin(a+2b)-\sin a} = \frac{5+1}{5-1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, dar

$$\frac{\sin(a+2b)+\sin a}{\sin(a+2b)-\sin a}=\frac{\sin(a+b)\cdot\cos b}{\cos(a+b)\cdot\sin b}=\frac{\operatorname{tg}(a+b)}{\operatorname{tg} b}=\frac{3}{2}\cdot$$

de unde $2\operatorname{tg}(a+b)=3\operatorname{tg} b$.

2.166. $E=\dfrac{\cos x+\cos(x+2y)}{\cos(x+y)+\cos(x+3y)}=\dfrac{a+c}{b+d}$, dar

$$E=\frac{2\cos(x+y)\cos y}{2\cos(x+2y)\cos y}=\frac{\cos(x+y)}{\cos(x+2y)}=\frac{d}{c}\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{b}{c}\cdot$$

2.167. Notăm $\dfrac{\cos\alpha}{a_1}=\dfrac{\cos 2\alpha}{a_2}=\dfrac{\cos 3\alpha}{a_3}\ \dfrac{\cos 4\alpha}{a_4}=\dfrac{1}{k}$ și avem

$$a_1=k\cos\alpha,\ a_2=k\cos 2\alpha,\ a_3=k\cos 3\alpha,\ a_4=k\cos 4\alpha.$$

Înlocuind în relația cerută se obține

$$k^2\cos\alpha\cos 3\alpha-k^2\cos 2\alpha=k^2\cos^2 2\alpha-k^2\cos^2 3\alpha$$

sau $\quad\cos 2\alpha(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha)=\cos 3\alpha(\cos\alpha+\cos 3\alpha)$

și transformînd sumele în produse se ajunge la

$$2\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha=2\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha.$$

2.163. Avem $\dfrac{a_0}{\sin x}=\dfrac{a_2}{\sin(x+2h)}=\dfrac{a_0+a_2}{2\sin(x+h)\cos(-h)}=$

$$=\frac{a_1}{\sin(x+h)}\text{ de unde}$$

$$a_0+a_2=2a_1\cos h. \tag{1}$$

$$\frac{a_1}{\sin(x+h)}=\frac{a_3}{\sin(x+3h)}=\frac{a_1+a_3}{2\sin(x+2h)\cos(-h)}=\frac{a_2}{\sin(x+2h)}$$

de unde

$$a_1+a_3=2a_2\cos h. \tag{2}$$

Din (1) și (2) obținem $a_1(a_1+a_3)=a_2(a_0+a_2)$.

2.169. $\sin a_k\sin(2a_1+2a_2+\ldots+2a_{k-1}+a_k)=\dfrac{1}{2}\cos(2a_1+2a_2+$

$+\ldots+2a_{k-1})-\dfrac{1}{2}\cos(2a_1+2a_2+\ldots+2a_k)$. Prin urmare:

$\sin a_2\sin(2a_1+a_2)+\sin a_3\sin(2a_1+2a_2+a_3)+\ldots+\sin a_{n-1}\sin(2a_1+$

$+2a_2+\ldots+2a_{n-2}+a_{n-1})=-\dfrac{1}{2}\cos 2a,-\dfrac{1}{2}\cos(2a_1+2a_2+\ldots+2a_{n-1},$

dar $2(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})=\pi-2a_n$ și deci $-\dfrac{1}{2}\cos(2a_1+2a_2+\ldots+$

$+2a_{n-1})=-\dfrac{1}{2}\cos(\pi-2a_n)=\dfrac{1}{2}\cos 2a_n$.

Înlocuind în relația din enunț se obține:

$$\sin^2 a_1+\frac{1}{2}\cos 2a_1+\frac{1}{2}\cos 2a_n+\sin^2 a_n=1,\text{ sau}$$

$\sin^2 a_1 + \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 a_1) + \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 a_n) + \sin^2 a_n = 1$, care este evidentă.

2.170. Din scăderea primelor două relații obținem $\operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = \frac{y}{x}$, deci $\sin\frac{a+b}{2} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\cos\frac{a+b}{2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Din adunarea primelor două relații obținem $x\cos\frac{a+b}{2} + y\sin\frac{a+b}{2} = \frac{p}{\cos\frac{a-b}{2}}$, deci $\cos\frac{a-b}{2} = \frac{p}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Înlocuim în a 3 — a relație din enunț și obținem

$$xx_0 + yy_0 = p^2.$$

2.171. Avem succesiv

$\cos^2(x-y) \leqslant 4(1 - \sin x\cos y - \cos x\sin y + \sin x\cos y\sin y\cos x)$,

$\cos^2(x-y) \leqslant 4[1 - \sin(x+y)] + 4\sin x\cdot\cos y\sin y\cos x$; sau $\cos^2 x\cdot\cos^2 y + 2\sin x\sin y\cos x\cos y + \sin^2 x\sin^2 y \leqslant 4[1 - \sin(x+y)] + 4\sin x\cos x\sin y\cos y$ sau $\cos^2(x+y) \leqslant 4[1 - \sin(x+y)]$, de unde $[\sin(x+y) - 3]\cdot[\sin(x+y) - 1] \geqslant 0$, egalitatea are loc pentru $\sin(x+y) = 1$, adică $x + y = 2k\pi + \pi/2$.

Notînd $\sin(x+y) = z$ avem $z^2 - 4z + 3 \geqslant 0$ sau $(z-1)(z-3) \geqslant 0$ care este evidentă deoarece $|z| \leqslant 1$.

2.172. $2\cos(x+y) + 2\sin x + 2\sin y - 3 \leqslant 0$,

$3 - 2\cos(x+y) - 2\sin x - 2\sin y \geqslant 0$,

$1 + 2[1 - \cos(x+y)] - 2\sin x + \sin y) \geqslant 0$,

$$1 + 2\cdot 2\sin^2\frac{x+y}{2} - 4\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \geqslant 0,$$

$$1 + 4\sin^2\frac{x+y}{2} - 4\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \geqslant 0,$$

$$\left(2\sin\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x-y}{2}\right)^2 - \cos^2\frac{x-y}{2} + \cos^2\frac{x-y}{2} + \sin^2\frac{x-y}{2} \geqslant 0,$$

$\left(2\sin\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x-y}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{x-y}{2} \geqslant 0$, ceea ce este evident.

2.173. $\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$. Inegalitățile se mai scriu

$-2 \leqslant -2\sin\frac{a+b}{2} \leqslant 0$ sau $0 \leqslant 2\sin\frac{a+b}{2} \leqslant 2$ care este verificată, valorile extreme pentru $\frac{a+b}{2} = 0$ și $\frac{a+b}{2} = \frac{\pi}{2}$.

2.174. $\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cdot\frac{2\cos\frac{a+b}{2}}{2\cos\frac{a+b}{2}}=\frac{\sin(a+b)}{1+\cos(a+b)}=$

$$=\frac{\sin a\cos b+\sin b\cos a}{1+\cos(a+b)}=\frac{\cos a\cos b(\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b)}{1+\cos(a+b)}$$

dar $$\frac{\cos a\cos b}{1+\cos(a+b)}\leqslant\frac{\cos a\cos b}{\cos(a-b)+\cos(a+b)}=\frac{1}{2},$$

de unde rezultă $\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\leqslant\frac{1}{2}(\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b)$, semnul egal are loc dacă $a=b$

Altă soluție. Trebuie arătat că

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{a}{2}+\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}+\frac{2\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{b}{2}}\right).$$

Notăm $\operatorname{tg}\frac{a}{2}=x$ și $\operatorname{tg}\frac{b}{2}=y$, unde x și $y\in[0,1)$. Obținem $\frac{x+y}{1-xy}\leqslant$

$\leqslant\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}$ sau $(x+y(1-x^2)(1-y^2)\geqslant(1-xy)^2(x+y)$.

Semnul egal poate avea loc dacă $x=y=0$ sau dacă $x=y$. Să mai arătăm că: $(1-x^2)(1-y)^2\leqslant(1-xy)^2$ adică $(1-x^2-y^2+x^2y^2\leqslant1+x^2y^2-$ $-2xy\Leftrightarrow-x^2-y^2\leqslant-2xy$ sau $x^2+y^2\geqslant2xy$, $(x-y)^2\geqslant0$, evident.

2.175. a) Deoarece $x_1,x_2\in(0,\pi/2)\Rightarrow x_1+x_2\in(0,\pi)\Rightarrow\frac{x_1+x_2}{2}\in$

$\in(0,\pi/2)$ și deci $\cos\frac{x_1+x_2}{2}>0$. Atunci $\frac{\cos x_1+\cos x_2}{2}-\cos\frac{x_1+x_2}{2}=$

$$=\cos\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2}-\cos\frac{x_1+x_2}{2}=\cos\frac{x_1+x_2}{2}\left(\cos\frac{x_1+x_2}{2}-1\right)=$$

$$=-2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}\leqslant0.$$

Rezultă $\frac{\cos x_1+\cos x_2}{2}\leqslant\cos\frac{x_1+x_2}{2}$.

b) Deoarece $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_8\in(0,\pi/2)$, atunci

$$\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_3+x_4}{2},\frac{x_5+x_6}{2},\frac{x_7+x_8}{2}\in(0,\pi/2)\text{ și}$$

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\frac{x_5+x_6+x_7+x_8}{4}\in(0,\pi/2)\text{ și}$$

$$\frac{x_2 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8}{8} \in (0, \pi/2).$$

Atunci $\sum_{i=1}^{8} \cos x_i = \cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3 + \cos x_4 + \cos x_5 + \cos x_6 +$

$$+ \cos x_7 + \cos x_8 \leqslant 2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2} + 2 \cos \frac{x_3 + x_4}{2} + 2 \cos \frac{x_5 + x_6}{2} +$$

$$+ 2 \cos \frac{x_7 + x_8}{2} \leqslant 4 \cos \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} + 4 \cos \frac{x_5 + x_6 + x_7 + x_8}{4} \leqslant$$

$$\leqslant 8 \cos \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8}{8}.$$

Relația se poate generaliza pentru orice $n = 2^k$, $k \in \mathbf{N}$.

2.176. Inegalitatea se mai scrie:

$$8 \cos x \cos y \sin x \sin y - 8 \sin^2 x \sin^2 y - 1 < 0,$$
$$8 \sin x \sin y \cos (x + y) - 1 < 0,$$
$$1 - 8 \sin x \sin y \cos (x + y) < 0;$$
$$1 + 4 \cos (x + y) [\cos (x + y) - \cos (x - y)] > 0;$$
$$1 + 4 \cos^2 (x + y) - 4 \cos (x + y) \cos (x - y) > 0;$$
$$[2 \cos (x + y) - \cos (x - y)]^2 + \sin^2 (x - y) > 0,$$

care este suma a două pătrate, deci pozitivă.

2.177. Avem $\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x = \dfrac{\cos x \cdot \sin 2x - \cos 2x \cdot \sin x}{\sin x \cdot \sin 2x} = \dfrac{1}{\sin 2x}$.

Folosind identitatea $\operatorname{ctg} kx - \operatorname{ctg} 2kx = \dfrac{1}{\sin 2kx}$, dăm lui k valorile 1, 2, ..., n și adunînd obținem relația din enunț.

2.178. $\left(\dfrac{1 - \cos \frac{\pi}{8}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1 - \cos \frac{3\pi}{8}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1 - \cos \frac{5\pi}{8}}{2}\right)^2 +$

$$+ \left(\frac{1 - \cos \frac{7\pi}{8}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[4 - 2\left(\cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{8} + \cos \frac{5\pi}{8} + \frac{7\pi}{8}\right) + \cos^2 \frac{\pi}{8} + \right.$$

$$\left. + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}\right] = \frac{1}{4}\left[4 - 2\left(2 \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{3\pi}{8} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2 \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{8}\right) + \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} + \frac{1 + \cos \frac{3\pi}{4}}{2} + \frac{1 + \cos \frac{5\pi}{4}}{2} + \frac{1 + \cos \frac{7\pi}{4}}{2}\right] =$$

$$= \frac{3}{2}.$$

$$2°)\ \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{12}}+\frac{1}{\cos^2\frac{5\pi}{12}}=\frac{2}{1+\cos\frac{\pi}{6}}+\frac{2}{1+\cos\frac{5\pi}{6}}=\frac{4}{2+\sqrt{3}}+$$

$$+\frac{4}{2-\sqrt{3}}=16.$$

3°) Să arătăm că $2\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24}\cdot 2\sin\frac{5\pi}{24}=\frac{1}{4}$ sau

$$\left(\cos\frac{5\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{5\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}\cdot$$

$$4°)\ 2\sin\frac{5\pi}{11}\cos\frac{2\pi}{11}=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{11}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{11}\right)=2\cos\frac{\pi}{22}\sin\frac{7\pi}{22},$$

$$5°)\ \frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=\frac{2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}}{2\cdot 2\sin\frac{\pi}{7}}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{2\cdot 4\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{8}\cdot$$

2.179. Se folosesc formulele $1+\sec 2a=\frac{\operatorname{tg}2a}{\operatorname{tg}a}$; $1+\sec 4a=-\frac{\operatorname{tg}4a}{\operatorname{tg}2a}$; ...

2.180. Avem $\operatorname{tg}(2k+1)x=\frac{\operatorname{tg}(2k-1)x+\operatorname{tg}2x}{1-\operatorname{tg}(2k-1)x\cdot\operatorname{tg}2x}$, sau

$$\operatorname{tg}(2k-1)x\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}(2k+1)x=\operatorname{tg}(2k+1)x-\operatorname{tg}(2k-1)x-\operatorname{tg}2x.$$

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{tg}(2k-1)x\cdot\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}(2k+1)x=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{tg}(2k+1)x-\sum_{k=1}^{n}\operatorname{tg}(2k-1)x-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}3x+\operatorname{tg}5x+\operatorname{tg}7x+\ldots+\operatorname{tg}(2n+1)x-\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}3x-$$

$$-\operatorname{tg}5x-\ldots-\operatorname{tg}(2n-1)x-n\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}(2n+1)x-\operatorname{tg}x-n\operatorname{tg}2x,$$

deci $S=\operatorname{tg}(2n+1)x-\operatorname{tg}x-n\operatorname{tg}2x$.

2.181. Înmulțind și împărțim cu $2\sin\frac{a}{2}$ și avem

$$S = \frac{1}{2\sin\frac{a}{7}}\left(2\sin\frac{a}{2}\sin a + 2\sin\frac{a}{2}\sin 2a + \ldots + 2\sin\frac{a}{2}\sin nx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}\left(\cos\frac{a}{2} - \cos\frac{3a}{2} + \cos\frac{3a}{2} - \cos\frac{5a}{2} + \ldots + \cos\frac{(2n-1)a}{2} -\right.$$

$$\left. -\cos\frac{(2n+1)a}{2}\right) = \frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}\left(\cos\frac{a}{2} - \cos\frac{(2n+1)a}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sin\frac{na}{2}\sin\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$$

2.182. În relația $\cos\left(a - \frac{h}{2}\right) - \cos(a+h) = 2\sin a \cdot \sin\frac{h}{2}$ schimbăm pe a în $a+h$, $a+2h$, $a+3h$, ..., $a+(n-1)h$, obținem:

$$\sin a = [\cos(a - h/2) - \cos(a + h/2)] : 2\sin(h/2),$$

$$\sin(a+h) = [\cos(a + h/2) - \cos(a + 3h/2) - \cos(a + 3h/2)] : 2\sin\frac{h}{2},$$

$$\sin(a+2h) = \left[\cos\left(a + \frac{3h}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{5h}{2}\right)\right] : 2\sin\frac{h}{3},$$

.....

$$\sin[a + (n-1)h] = \left[\cos\left(a + \frac{2n-3}{2}h\right) - \cos\left(a + \frac{2n-1}{2}h\right)\right] : 2\sin\frac{h}{2}.$$

Adunînd parte cu parte aceste egalități obținem

$$S = \left[\cos\left(a - \frac{h}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{2n-1}{2}h\right)\right] : \sin\frac{h}{2}, \text{ sau}$$

$$S = \sin\left(a + \frac{n-1}{2}h\right)\sin\frac{nh}{2} : \sin\frac{h}{2}.$$

2.183. Înmulțim ambii membri cu $2\sin(\pi/9)$ și obținem

$$\sin\frac{\pi}{19} + 2\sin\frac{\pi}{19}\left(\cos\frac{2\pi}{19} + \cos\frac{4\pi}{19} + \cos\frac{6\pi}{19} + \cos\frac{8\pi}{19}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{19}\left(\cos\frac{\pi}{19} + \cos\frac{3\pi}{19} + \cos\frac{5\pi}{19} + \cos\frac{7\pi}{19} + \cos\frac{9\pi}{19}\right),$$

sau transformînd produsele, obținem

$$\sin\frac{\pi}{19} + \sin\frac{3\pi}{19} - \sin\frac{\pi}{19} + \sin\frac{5\pi}{19} - \sin\frac{3\pi}{19} + \sin\frac{7\pi}{19} - \sin\frac{5\pi}{19} + \sin\frac{9\pi}{19} -$$

$$-\sin\frac{7\pi}{19}=\sin\frac{2\pi}{19}+\sin\frac{4\pi}{19}-\sin\frac{2\pi}{19}+\sin\frac{6\pi}{19}-\sin\frac{4\pi}{19}+\sin\frac{8\pi}{19}-\sin\frac{6\pi}{19}+$$
$$+\sin\frac{10\pi}{19}-\sin\frac{8\pi}{19}\cdot$$

egalitate evidentă deoarece $\sin\frac{9\pi}{19}=\sin\frac{10\pi}{19}$.

2.184. Folosind formula $\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x=\frac{\sin(2nx)}{2\sin x}$, $\sin x\neq 0$.

a) $2\left(\cos\frac{\pi}{14}+\sin\frac{2\pi}{14}+\cos\frac{3\pi}{14}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{14}+\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{5\pi}{14}\right)=$

$$=\frac{2\sin\frac{6\pi}{14}}{2\sin\frac{\pi}{14}}=\frac{\cos\frac{\pi}{14}}{\sin\frac{\pi}{14}}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{14}\cdot$$

b) $E=2\left(\cos\frac{\pi}{22}+\cos\frac{3\pi}{22}+\cos\frac{5\pi}{22}+\cos\frac{7\pi}{22}+\cos\frac{9\pi}{22}\right)=$

$$=\frac{2\sin\frac{10\pi}{22}}{2\sin\frac{\pi}{22}}=\frac{\cos\frac{\pi}{22}}{\sin\frac{\pi}{22}}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{22}\cdot$$

c) $2\sum_{k=1}^{6}\cos(2k-1)\frac{\pi}{26}=2\frac{\sin\frac{12\pi}{26}}{2\sin\frac{\pi}{26}}=\frac{\cos\frac{\pi}{26}}{\sin\frac{\pi}{26}}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{26}\cdot$

2.185. Se folosește identitatea $\operatorname{tg}x=\operatorname{ctg}x-2\operatorname{ctg}2x$, adică $\frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k}=\frac{1}{2^k}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^k}-\frac{1}{2^{k-1}}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{k-1}}$. Dăm lui k valorile 1, 2, 3, ..., n și se adună.

2.186. Folosim formulele $\sum_{k=0}^{n}\sin(x+kh)=$

$$=\frac{\cos\left(x-\frac{h}{2}\right)-\cos\left[x+\frac{(2n+1)h}{2}\right]}{2\sin\frac{h}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\cdot h\right)\sin\left(x+\frac{nh}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}\cdot$$

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(x+kh)=\frac{-\sin\left(x-\frac{h}{2}\right)+\sin\left[\frac{(2n+1)h}{2}+x\right]}{2\sin\frac{h}{2}}=$$

$$= \frac{\sin \frac{n+1}{2} h \cos\left(x + \frac{nh}{2}\right)}{\sin \frac{h}{2}}, \quad k \in \mathbf{Z},\ h \neq 2k\pi.$$

Prin urmare

$$\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{\cos \frac{\pi}{2(2n+1)} - \cos \frac{(2n+1)}{2(2n+1}}{2 \sin \frac{\pi}{2(2n+1)}} = \frac{\cos \frac{\pi}{2(2n+1)}}{2 \sin \frac{\pi}{2(2n+1)}} =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2(2n+1)}.$$

$$\text{b)} \sum_{k=0}^{n} \cos \frac{(2k+1)\pi}{4n+3} = \frac{-\sin 0° + \sin \frac{2(n+2)\pi}{4n+3}}{2 \sin \frac{\pi}{4n+3}} =$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2(4n+3)}\right)}{2 \sin \frac{\pi}{4n+3}} = \frac{\cos \frac{\pi}{2(4n+3)}}{4 \sin \frac{\pi}{2(4n+3)} \cdot \cos \frac{\pi}{2(4n+3)}} =$$

$$= \frac{1}{4 \sin \frac{\pi}{2(4n+3)}}.$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{2k\pi}{4n+1} = \frac{1}{2} + \frac{-\sin \frac{\pi}{4n+3} + \sin \frac{(2n+1)\pi}{4n+3}}{2 \sin \frac{\pi}{4n+3}} =$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2(4n+3)}\right)}{2 \sin \frac{\pi}{4n+3}} = \frac{1}{4 \sin \frac{\pi}{2(4n+3)}}.$$

$$\text{c)} \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{(2k-1)\pi}{4n+1} = \frac{-0 + \sin \frac{2\pi}{4n+1}}{2 \sin \frac{\pi}{4n+1}} = \frac{1}{4 \sin \frac{\pi}{2(4n+1)}}.$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{2k\pi}{4n+1} = \frac{1}{2} + \frac{-\sin \frac{\pi}{4n+1} + \sin \frac{(2n+1)\pi}{4n+1}}{2 \sin \frac{\pi}{4n+1}} =$$

$$= \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2(4n+1)}\right]}{2\sin\frac{\pi}{4n+1}} = \frac{\cos\frac{\pi}{2(4n+1)}}{2\sin\frac{\pi}{4n+1}} = \frac{1}{4\sin\frac{\pi}{2(4n+1)}}.$$

2.187. Suma S se mai scrie $S = \left(\sin^4\frac{\pi}{32} + \sin^4\frac{15\pi}{32}\right) + \left(\sin^4\frac{3\pi}{23} + \right.$

$$\left. + \sin^4\frac{13\pi}{32}\right) + \ldots + \left(\sin^4\frac{7\pi}{32} + \sin^4\frac{9\pi}{23}\right) = \left(\sin^4\frac{\pi}{32} + \cos^4\frac{\pi}{32}\right) +$$

$$+ \left(\sin^4\frac{3\pi}{32} + \cos^4\frac{3\pi}{32}\right) + \left(\sin^4\frac{5\pi}{32} + \cos^4\frac{5\pi}{32}\right) + \left(\sin^4\frac{7\pi}{32} + \cos^4\frac{7\pi}{32}\right) =$$

$$= 4 - 2\left(\sin^2\frac{\pi}{32}\cos^2\frac{\pi}{32} + \sin^2\frac{3\pi}{32}\cos^2\frac{3\pi}{32} + \sin^2\frac{5\pi}{32}\cos^2\frac{5\pi}{32} + \right.$$

$$\left. + \sin^2\frac{7\pi}{32}\cos^2\frac{7\pi}{32}\right) = 4 - \frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{16} + \sin^2\frac{3\pi}{16} + \sin^2\frac{5\pi}{16} + \sin^2\frac{7\pi}{16}\right) =$$

$$= 4 - \frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{16} + \cos^2\frac{\pi}{16} + \sin^2\frac{3\pi}{16} + \cos^2\frac{3\pi}{16}\right) = 4 - \frac{2}{2} = 3.$$

2.188. Ţinem seama de formulele $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ şi de formula $\cos a + \cos(a+r) + \cos(a+2r) + \ldots + \cos[a+(n-1)r] = \frac{\sin\frac{nr}{2}\cos\left[a + \frac{(n-1)r}{2}\right]}{\sin\frac{r}{2}}$. Obţinem

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(15 - \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{2\pi}{4} - \ldots - \cos\frac{15\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[15 - \frac{\sin\frac{15\pi}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{14\pi}{8}\right)}{\sin\frac{\pi}{8}}\right] = \frac{1}{2}\left[15 - \frac{-\sin\frac{\pi}{8}\cos 2\pi}{\sin\frac{\pi}{8}}\right] = 8.$$

Analog: $S_2 = \frac{1}{2}\left[15 + \frac{-\sin\frac{\pi}{8}\cos 2\pi}{\sin\frac{\pi}{8}}\right] = \frac{1}{2}(15-1) = 7.$

2.189. Folosim formula $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, şi la urmă

$$\sum_{k=1}^{n}\cos[a+(k-1)r] = \frac{\sin\frac{nr}{2}\cos\left[a + \frac{(n-1)r}{2}\right]}{\sin\frac{r}{2}}.$$

2.190. $\sum_{k=1}^{2n}\sin\left(y+\frac{k\pi}{n}\right)=\sin\left(y-\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(y+\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots+$

$+\sin\left[y+\frac{(n-1)\pi}{n}\right]+\sin(y+\pi)+\sin\left[y+\frac{(n+1\pi}{n}\right]+\ldots+$

$+\sin(y+2\pi)=\sin\left(y+\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(y+\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots+\sin(y+\pi)-$

$-\sin\left(y+\frac{\pi}{n}\right)-\ldots-\sin(y+\pi)=0$. Analog avem $\sum_{k=1}^{2n}\cos\left(y+\frac{k\pi}{n}\right)=0$.

Ţinem seama de relaţiile

$\cos^4 x=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{2\cos^2 2x}{2}=\frac{3}{8}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}$.

$\sin^4 x=\frac{3}{8}-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}$. Prin urmare

$$\sum_{k=1}^{16}\cos^4\left(x+\frac{k\pi}{8}\right)=\sum_{k=1}^{16}\left[\frac{3}{8}+\frac{\cos\left(2x+\frac{k\pi}{4}\right)}{2}+\frac{\cos\left(4x+\frac{k\pi}{2}\right)}{8}\right]=$$

$$=16\cdot\frac{3}{8}\sum_{k=1}^{16}\frac{\cos\left(2x+\frac{k\pi}{4}\right)}{2}+\sum_{k=1}^{16}\frac{\cos\left(4x+\frac{k\pi}{2}\right)}{8}=6+0+0=6.$$

$$\sum_{k=1}^{24}\sin^4\left(x+\frac{k\pi}{12}\right)=\sum_{k=1}^{24}\left[\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\cos\left(4x+\frac{k\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{k\pi}{6}\right)\right]=$$

$$=\frac{3}{8}\cdot 24-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{24}\cos\left(2x+\frac{k\pi}{6}\right)+\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{24}\cos\left(4x+\frac{k\pi}{3}\right)=9-0+0=9.$$

Generalizare. Să arătăm că

$$\sum_{k=1}^{8n}\cos^4\left(x+\frac{k\pi}{4n}\right)=3n;\ \sum_{k=1}^{8n}\sin^4\left(x+\frac{k\pi}{7n}\right)=3n.$$

Avem $\sum_{k=1}^{8n}\cos^4\left(x+\frac{k\pi}{4n}\right)=\frac{3}{8}\cdot 8n+\sum_{k=1}^{8n}\frac{\cos(4x+k\pi/n)}{8}+\sum_{k=1}^{8n}\frac{\cos(2x+k\pi/2n)}{2}$

$=\frac{3}{8}\cdot 8n+0+0=3n$. De asemenea

$$\sum_{k=1}^{8n}\sin^4\left(x+\frac{k\pi}{4n}\right)=\frac{3}{8}\cdot 8n+\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8n}\cos\left(4x+\frac{k\pi}{n}\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8n}\cos\left(2x+\frac{k\pi}{2n}\right)=$$

$$=\frac{3}{8}\cdot 8n+0+0=3n.$$

Soluţia II. Avem $\cos^4\left(x+\frac{k\pi}{8}\right)=\frac{1}{4}\left[1+\cos\left(2x+\frac{k\pi}{4}\right)\right]^2=$

$=\frac{1}{4}\cdot\left[1+2\cos\left(2x+\frac{k\pi}{4}\right)+\cos^2\left(2x+\frac{k\pi}{4}\right)\right]^2=\frac{1}{4}\left[1+2\cos\left(2x+\frac{k\pi}{4}\right)+\right.$

$$+\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(4x+\frac{k\pi}{2}\right)\right]=\frac{1}{8}\left[3+4\cos\left(2x+\frac{k\pi}{4}\right)+\cos\left(4x+\frac{k\pi}{2}\right)\right]=$$

$$S_1=\frac{1}{8}\left\{3\cdot 16+4\left[\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2x+\frac{2\pi}{4}\right)+\ldots+\cos\left(2x+\frac{16\pi}{4}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(4x+\frac{2\pi}{2}\right)+\ldots+\cos\left(4x+\frac{16\pi}{2}\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{8}\left(3\cdot 16+0+0\right)=6.$$

$$S_2=\sum\frac{1}{4}\left[1-2\cos\left(2x+\frac{k\pi}{4}\right)+\frac{1-\cos\left(4x+\frac{k\pi}{12}\right)}{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{8}[3\cdot 24-0-0]=9.$$

2.191. *Indicație.* Se rezolvă. analog cu problema precedentă și se obține $S_1=11$ și $S_2=12$.

Grafice de funcții trigonometrice. Funcții trigonometrice inverse. Aplicații. Identități parțiale. Ecuații și inecuații simple trigonometrice. Identități condiționate. Relații trigonometrice între unghiurile unui triunghi oarecare

PROBLEME

ENUNȚURI

3.1. Să se reprezinte graficul funcției

$$y = \sqrt{\sin^2 x}\cos x + \sqrt{\cos^2 x}\sin x.$$

3.2. Să se reprezinte graficul funcției,

$$f(x) = \frac{\sin 3x + \sin x}{\sqrt{1+\cos 2x}} + \frac{\cos x + \cos 3x}{\sqrt{1-\cos 2x}},\ x \in (0, 2\pi).$$ (G.M.B., 13 105, C.I.T.)

3.3. Să se reprezinte graficul funcției:

$$f(x) = \frac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}} - \frac{\cos 3x + \cos x}{\sqrt{1+\cos 2x}},\ x \in (0, 2\pi).$$ (G.M.B., 13 101, *C.I.T.*)

3.4. Să se studieze mișcarea rectilinie de ecuație orară $x = 5\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 5\sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{1}\right)$. Să se precizeze amplitudinea, perioada și faza inițială.

Unitățile sînt centimetrul și secunda

(Bacalaureat, Strasburg) iunie 1965.

3.5. Se consideră funcția

$$f(x) = \frac{\sin^2(3\pi/8 - x) - \sin^2(\pi/8 - x)}{\sin(\pi/4 - x)}$$

Să se arate că se poate scrie sub forma $f(x) = A\sin(\alpha + x)$, unde A este o constantă și α un arc pozitiv mai mic decît $\frac{\pi}{2}$.

3.6. Să se arate că $\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

3.7. Să se demonstreze că dacă $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z + \operatorname{arctg} t = \pi$, atunci $\frac{x+y+z+t}{xyzt} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}$ (x, y, z și t sînt numere reale diferite de zero). (G.M.B., 12 089, *I. Tomescu*)

3.8. Să se arate că:

$$\text{a) } \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{b) } \arccos \frac{5}{13} + \arccos \frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}.$$

3.9. Să se arate că $4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$.

3.10. Să se rezolve ecuația $2 \arcsin x = \arccos 2x$.

3.11. Să se arate că:

$$\arcsin \frac{4}{5} < \frac{\pi}{3}; \quad \arcsin \frac{5}{13} < \frac{\pi}{6};$$

$$0 < \arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} < \frac{\pi}{2}, \text{ iar}$$

$$\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} = \arccos \frac{16}{65}; \text{ iar}$$

$$\arcsin \frac{16}{65} + \arcsin \frac{63}{65} = \frac{\pi}{2}.$$

3.12. Pentru care valori ale lui x are sens $\arccos \left(\frac{\pi}{2} \arcsin x \right)$?

3.13. Să se arate că dacă $x > 0$, atunci $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$;

3.14. Să se arate că dacă $x > 1$, atunci $2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi$.

3.15. Să se arate că ținînd seama de formulele

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 + x^2}; \quad \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \text{ obținem relația}$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) = \frac{1 - xy}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+y^2}}.$$

3.16. Să se arate că $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x - 2\pi$ dacă $3\pi/2 < x < 5\pi/2$,

și $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = \operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(x - k\pi)]$ dacă $\frac{(2k-1)\pi}{2} < x < \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3.17. Să se arate că

a) $\arcsin(\sin x) = \pi - x) = \pi - x$ dacă $\pi/2 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$.

b) $\arcsin(\sin x) = x - 2\pi$ dacă $3\pi/2 \leqslant x \leqslant 5\pi/2$.

c) $\arcsin(\sin x) = -\pi - x$ dacă $-3\pi/2 \leqslant x \leqslant -\pi/2$.

3.18. Să se arate că $\sin\left(\frac{3}{2}\arcsin x\right) = \frac{x(1+2\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}}$

3.19. Să se arate că dacă $-1 \leqslant x \leqslant 1$ și $x \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, atunci

$\operatorname{tg}(2\arcsin x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$.

3.20. Să se arate că dacă $2x^2 < 1$, atunci $\arcsin x + 3\arccos x + \arcsin(2x\sqrt{1+x^2}) = 3\pi/3$.

3.21. Să se arate că $2\operatorname{arctg} 10 + \arcsin\frac{20}{101} = \pi$.

3.22. Să se calculeze $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3} + \arccos\frac{2}{3}\right)$.

3.23. Să se arate că avem relația $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right) = \sqrt{x^2/2(1-\sqrt{1-x^2})}$.

3.24. Să se rezolve ecuația $2\cos(4\arccos x) - 8\sin^2(\arccos x) + 7 = 0$.

3.25. Să se arate că dacă $a \in \left[\arcsin\frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{3}{5}\right]$, atunci

a) $3\sqrt{5-4\cos a-3\sin a} + 2\sqrt{2}\sqrt{5+3\cos a-4\sin a} = 5\sqrt{1+\sin a}$.

b) $3\sqrt{5+4\sin a-3\cos a} - 2\sqrt{2}\sqrt{5-3\sin a-4\cos a} = 5\sqrt{1+\cos a}$.

3.26. Să se arate că dacă $x \in [-1, 1]$, atunci există identitățile:

C.I.T.

a) $\sqrt{1 \pm x} + \sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{5 \pm 3x + 4\sqrt{1-x^2}}$,

b) $\sqrt{1 \pm \sqrt{1-x^2}} + \sqrt{2}\sqrt{1+|x|} = \sqrt{5 \pm 3\sqrt{1-x^2}+4|x|}$.

(G.M., 16 527, *C.I.T.*)

3.27. Se dau: $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{2t}{1-t^2}$, unde α și β sînt în intervalul $(0, \pi/2)$. Calculînd pe $\cos(\alpha - \beta)$ să se arate că $\alpha = \beta$.
(Institutul Politehnic București, 1988)

3.28. Să se rezolve ecuația $\sin 2x = \cos 2x$ și să se precizeze soluțiile ecuației care aparțin intervalului $(\pi, 2\pi)$. (Admitere în treapta a II-a, Caraș Severin, 1978)

3.29. Să se afle valorile reale ale lui x pentru care

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin x} + \sqrt[4]{2\sin x}} + \frac{1}{\sqrt{1-\sin x} - \sqrt{2\sin x}} + \frac{2}{\sqrt{1-\sin x}} = 0.$$

3.30. Să se arate că dacă $A + B + C = 180°$, atunci $\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C = 3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}$.

3.31. Folosind tabele trigonometrice să se exprime $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ pentru $x_1 = 1\,000°$, $x_2 = 1\,978°$, $x_3 = -2\,000°$.

3.32. Să se calculeze $\sin 947°33'20''$ cu ajutorul tabelelor.

3.33. În două triunghiuri dreptunghice ABC și $A_1B_1C_1$ cu unghiurile drepte în A respectiv A_1 mai avem relațiile:

$$\|AB \cdot AC\| + \|A_1B_1\| \cdot \|A_1C_1\| = 4\|AB^2\| = 4\|A_1C_1^2\|.$$

Să se arate că $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1 = 75°$, dacă $\|AB\| < \|AC\|$.
(G.M.B., 12 907 *C.I.Ț.*)

3.34. Fie punctele A, B, C așezate în linie dreaptă, B fiind la mijlocul distanței $|AC|$. Din A și C se duc perpendicularele $|AA_1|$ și $|CC_1|$ pe AC de aceeași parte. Știind că $\sphericalangle ACA_1 = 3\alpha$ și $\sphericalangle C_1AC = \alpha$ iar $\|AC\| = a$ să se calculeze $\|AA_1\|$ și $\|CC_1\|$.

Caz particular $\alpha = \pi/2$.

3.35. Să se arate că dacă o rază de lumină trece prin cîteva medii cu fețe plane, direcția razei ieșite nu depinde decît de direcția razei incidente și indicii de refracție ai primului și ultimului mediu.

3.36. Să se arate că într-un triunghi dreptunghic ABC cu $\sphericalangle A = \pi/2$ avem relațiile: $\operatorname{tg}^2\frac{B}{2} = \frac{a-c}{a+c}$; $\operatorname{tg}^2\frac{C}{2} = \frac{a-b}{a+b}$.

3.37. În triunghiul dreptunghic ABC cu $A = 90°$ perpendicularele duse din B și C respectiv pe BC și AC se taie în D. Să se arate că:

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}(DAC) = \frac{1}{\sin(2\sphericalangle ABC)}, \quad \operatorname{tg}(ADB) = \frac{\operatorname{tg}^3(ABC)}{1 + 2\operatorname{tg}^2(ABC)}.$$
(G.M.B., 13 398, *C.I.Ț.*)

3.38. Să se demonstreze că triunghiul în care $\sin B + \cos B = \sin C + \cos C$ este dreptunghi sau isocel. (Institutul Politehnic Galați, 1970)

3.39. Într-un triunghi oarecare ABC fie $|AA_1|$, $|BB_1|$, $|CC_1|$ înălțimile și H ortocentrul. Să se arate că $\|HA_1\| = a\cdot(\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C) = a\cos B\cos C/\sin A$ și analoagele.

3.40. Într-un triunghi ABC notăm cu $|AD|$ și $|AM|$ înălțimea și respectiv mediana duse din vîrful A. Știind că unghiurile $\widehat{BAD}$, $\widehat{DAM}$ și $\widehat{MAC}$ sînt egale și $\|AB\| < \|AC\|$ să se afle unghiurile triunghiului ABC. (G.M.B., 13 153, *C.I.Ț.*)

3.41. Fie triunghiul oarecare ABC, O centrul cercului circumscris, iar x, y, z distanțele de la O la laturi. Să se arate că $8(x+y+z)S \leqslant 3abc$, a, b, c fiind laturile și S aria triunghiului.

3.42. Să se afle valorile lui x cuprinse în intervalul $(0, \pi)$ care sînt soluțiile ale ecuației $\operatorname{ctg} 5x = -1/\sqrt{3}$.

3.43. Să se rezolve ecuația $8\sin^2 x + \cos^3 2x - 4 = 0$.

3.44. Să se afle valorile lui x din intervalul $[0°, 360°]$ pentru care $\sin 5x + \sqrt{1-\cos^2 5x} = 0$.

3.45. Să se rezolve ecuația $\cos x + 2\operatorname{tg} x - 1 = 0$.

3.46. Să se rezolve ecuația $\sin(2x + 30°) + 1 = 0$.

3.47. Să se afle valorile lui x pentru care $\operatorname{tg} x + \sqrt{1-\cos^2 x}/\sqrt{1-\sin^2 x} = 0$.

3.48. Să se afle valorile lui x pentru care $\operatorname{tg} x - \sqrt{\sec^2 x - 1} = 0$.

3.49. Să se afle valorile lui x din intervalul $[0°, 180°]$ pentru care $\sqrt{1-\cos^2 5x} + \operatorname{tg} 5x\sqrt{1-\sin^2 5x} = 0$.

3.50. Să se afle valorile lui x cuprinse în intervalul $[0°, 360°]$ pentru care $\operatorname{tg} 6x + \sqrt{\sec^2 6x - 1} = 0$.

3.51. Să se afle valorile lui x cuprinse în intervalul $[0°, 360°]$ pentru care $\sin\frac{x}{2} + \sqrt{1-\cos^2\frac{x}{2}} = 0$.

3.52. Să se rezolve ecuația $\dfrac{\sqrt{a+\sin x} - \sqrt{a-\sin x}}{\sqrt{a+\sin x} + \sqrt{a-\sin x}} = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$,

$x \neq 2k\pi + \pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

$-a < \sin x < a$. Discuție. (G.M.B., 14 356, *C.I.Ț.*)

3.53. Să se rezolve și să se dicute ecuația $(m-3)\sin x - 4\cos x = m - 5$, unde $m \in \mathbf{R}$. (G.M.B., 9 927, *C.I.Ț.*)

3.54. Să se afle valorile lui x cuprinse în intervalul $[0°, 360°]$, pentru care funcția $y = \sqrt{1+2\sin 2x} + \sqrt{1-2\cos 3x}$ are valori reale.

3.55. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încît ecuațiile $2x^2 \pm 2mx + (m-2)^2 = 0$, să admită ca rădăcini $x_1 = \cos a$ și $x_2 = \sin a$, apoi să se rezolve ecuațiile date. (G.M.B., 12 716, *C.I.Ț.*)

3.56. Să se arate că dacă $r \geqslant 0$ și $\cos a \neq \pm 1$, atunci

$$\sqrt{r/(1+\cos a)} + r/(1-\cos a) = \sqrt{2r}/|\sin a|.$$

3.57. Să se arate că:

$$|\sin a| + |\sin b| + |\sin c| \leqslant 1 + |\sin a \cdot \sin b| + |\sin b \cdot \sin c| + |\sin c \cdot \sin a|.$$

$$|\sin a| - 1 \leqslant -|\sin b||\sin c| + |\sin b| + |\sin c| \leqslant 1.$$

(S.G.M., T.C. 149, *C.I.Ț.*).

3.58. Să se rezolve ecuația $\operatorname{tg}(3x + 3\pi) + \operatorname{ctg}(2\pi - 2x) = 0$.

3.59. Să se rezolve ecuația $\sin 4x + \cos 4x = 0$.

3.60. Să se arate că $\operatorname{sgn} x = x/|x| = |x|/x = |-x|/x, \quad x \neq 0$.

Să se arate că $|\sin x|/x = \sin x/|x|$, unde $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$.

3.61. Pentru care valori ale lui x cuprinse între 0° și 180° avem: $\cos 2x < \sin x$? (G.M.B., 2 935, *C.I.Ț.*)

3.62. Ce relație există între x și y dacă $\operatorname{ctg} x \sin y - \sin x \operatorname{ctg} y = 0$?

3.63. Pentru care valori ale lui x cuprinse între 0° și 360°, avem $\sin 10x + 2 \sin 5x \sqrt{1 - \sin^2 5x} = 0$? (G.M.B., 3 905, *C.I.Ț.*)

3.64. Să se afle valorile lui x și y pentru care avem

$$\sin 3x + \sin 3y + \cos(3x + 3y) \leqslant 1{,}5.$$

Caz particular $x = y$, valori cuprinse în intervalul (0°, 360°).

3.65. Pentru care valori ale lui x cuprinse între 0° și 480° avem $\sin x < \sin 2x$? (G.M.B., 2 936, *C.I.Ț.*)

3.66. Să se arate că $E = (\sin^2 x + 1/\sin^2 x)(\cos^2 x + 1/\cos^2 x) \geqslant 6{,}25$. (G.M.B., 15 497, *C.I.Ț.*)

3.67. Să se rezolve ecuația $5 \sin(3x - 1) = 1$.

3.68. Să se rezolve ecuația $\operatorname{tg} 6x = 2 \cos 3x$ unde $x \in (0°, 360°)$. (G.M.B., 13 075, *C.I.Ț.*)

3.69. Să se rezolve ecuația $2 \cos(x^2 - 1) = 1$.

3.70. Să se rezolve ecuația $\sin 2x = \cos 2x$.

3.71. Să se rezolve ecuația $\sin 6x - 2 \cos 4x - 1 = 0$, pentru $x \in (0°, 360°)$. (G.M.B., 13 099, *C.I.Ț.*)

3.72. Să se rezolve ecuația $\cos^2 x = \sin x$.

3.73. Să se rezolve ecuația $\sin 3x + \cos(x + 7\pi/2) = 0$.

3.74. Să se rezolve ecuația $16 \cos^2 x = 7$.

3.75. Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația în x: $\cos x = x^2 - x + 1$.

3.76. Să se arate că ecuația $2 \cos \pi x - 6x + 1 = 0$, admite soluție unică $x = 1/3$.

3.77. Să se discute ecuația în x: $2 \sin^2 x + 3 \cos x - m - 2 = 0$, unde m este parametru real. (G.M.B., 10 499, Concurs)

3.78. Să se rezolve ecuația $\operatorname{tg}(x^2 - x) \operatorname{ctg} x = 1$.

3.79. Să se rezolve ecuația $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$.

3.80. Să se rezolve ecuația $2\sin^2 x + 3\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$.

3.81. Să se rezolve ecuația $3\sin^2 x + 4\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$.

3.82. Să se rezolve ecuația $\dfrac{1 + \cos x + \sin x}{1 + \sin x} = 3 - \operatorname{tg} x$.

3.83. Să se rezolve ecuația $\sec^4 x - \operatorname{tg}^4 x = 7$.

3.84. Să se rezolve ecuația $8\cos x = 1 - 4\sin^2 x$.

3.85. Să se rezolve ecuația $|\sin x^2| = 1$.

3.86. Să se rezolve ecuația $6x - 1 = 2\cos \pi x$.

3.87. Să se rezolve ecuația $2 - 3\operatorname{tg} x = \sqrt{(5 - 6\cos^2 x)/\cos^2 x}$.

3.88. Să se rezolve ecuația $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) \cdot \operatorname{tg}(\pi \operatorname{ctg} x) = 1$.

3.89. Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația $2\cos \dfrac{x}{4} = 3^x + 3^{-x}$.

3.90. Să se rezolve ecuațiile: $\sin^8 x + \cos^8 x = 1$; $\sin^8 x - \cos^8 x = 1$ și să se verifice soluțiile aflate *(C.I.T.)*

3.91. Să se rezolve ecuația $\sin 6x + \sqrt{3}/2 = 0$.

3.92. Să se rezolve ecuația: $\operatorname{tg}^2 x + \sec^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2 + \operatorname{cosec}^2 x$.

3.93. Să se rezolve ecuația $\cos^4 x + (1 + \cos x)^4 = 1/8$.

3.94. Să se rezolve ecuația $\operatorname{tg}^2 x + 2\sin^2 x = 2\cos^2 x + 1$.

3.95. Să se rezolve ecuația $\sin^2 2x + \sin^2 3x = 0$.

3.96. Să se rezolve ecuația $\dfrac{\sin^4 x + 1}{\sin^2 x} + \dfrac{\cos^3 x}{\sin x} - \dfrac{7}{4} = 0$.

3.97. Să se rezolve ecuația $2\sin x - 3\sin x = 0$.

3.98. a) Să se arate că $(\sin x)^3 + (\cos x)^3 \neq 1$ pentru $0 < x < \pi/2$.
b) Să se rezolve ecuația $|\sin x|^3 + |\cos x|^3 = 1$.
(I.P. București, 1976).

3.99. Să se rezolve ecuația $8\cos x = \sqrt{3}/\sin x + 1/\cos x$.
(A.S.E. București, 1971)

3.100. Să se rezolve ecuația:

$$\cos(\pi/2 + x) + \cos(2\pi - 2x) + \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x) = 0.$$

3.101. Să se rezolve ecuația $1{,}735\cos x + 0{,}380\sin x + 0{,}3765 = 0$.

3.102. Să se arate că dacă $a \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$, atunci:

$$x^2 - 2x\sin a \cos a + \sin^2 a \geqslant 0.$$

3.103. Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, 1)$, atunci avem

$$\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c} < 1 + \sqrt{1-a}\cdot\sqrt{1-b} + \sqrt{1-b}\cdot\sqrt{1-c} + \sqrt{1-c}\cdot\sqrt{1-a}.$$

$$\sqrt{1-a} > \sqrt{1-a}\,(\sqrt{1-b} + \sqrt{1-c}) - \sqrt{1-b}\cdot\sqrt{1-c} > \sqrt{1-a} - 1.$$
(C.I.T.)

3.104. a) Să se rezolve ecuația $\cos 3x - \sin(\pi/2 - 2x) = 0$.

b) Folosind rezultatul de la punctul precedent să se deducă valorile lui $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{5}$, $\cos\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{3\pi}{5\pi}$, $\sin\frac{\pi}{10}$, $\sin\frac{3\pi}{10}$.

(G.M.B., 11298, Concurs elevi, 1971, *C.I.T.*)

3.105. Să se rezolve ecuația $\cos(x+y)\cos(y+z)\cos(z+x)=1$.
(Concurs, elevi, 1975)

3.106. Să se rezolve ecuația

$$\frac{1}{\sqrt{\cos(4x+60^\circ)}+\cos(x+45^\circ)}+\frac{1}{1+\cos(x+45^\circ)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\cos(4x+60^\circ)}-\cos(x+45^\circ)}+\frac{1}{1-\cos(x+45^\circ)}.$$ (G.M.B., 9005, *C.I.T.*)

3.107. Să se rezolve înecuația $\operatorname{tg} x>\sqrt{3}$.

3.108. Să se rezolve inecuația $\frac{\cos x(2\cos x-1)}{2\cos^2 x-1}<0$.

3.109. Să se determine arcele x care satisfac inecuația

$$4\cos^2 x+2(\sqrt{3}-1)\sin x+\sqrt{3}>4.$$

3.110. Pentru care valori ale lui x în intervalul $(0^\circ, 360^\circ)$ avem

$$\sqrt{1+\sin 6x}+\sqrt{(1-\sin 6x}\geqslant\sqrt{2(1-\cos 6x)}?$$

În ce caz avem egalitate?

3.111. Să se rezolve inecuația $\left(\frac{3}{4}\right)^{\cos 3x}<\frac{2}{\sqrt{3}}$. Concurs elevi, Brașov, 1974)

3.112. Să se rezolve inecuația $\sin(\cos x)<0$.

3.113. Să se rezolve inecuația $\frac{1-2\cos x}{2-\cos x}\leqslant 0$.

3.114. Să se rezolve inecuațiile:

$$\sin^2 x-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}|\sin x|+\frac{\sqrt{6}}{4}<0,$$

$$\cos x\cdot\cos 3x>\cos 5x\cdot\cos 7x.$$ (Matematica v școle, 1978)

3.115. Să se arate că ecuația $x^3-3(2-\sqrt{3})x^2-3x+2-\sqrt{3}=0$ admite rădăcinile $x_1=\operatorname{tg}5^\circ$, $x_2=\operatorname{ctg}25^\circ$ și $x_3=-\operatorname{ctg}35^\circ$. (*C.I.T.*)

3.116. Să se rezolve ecuația: $[\sin^2 x+(\cos 2x-1)\cos^2 x]\sin^2(\pi+x)-[\sin^2 x(1+\cos 2x)-\cos^2 x]\sin^2(3\pi/2-x)=1/2$.
(Institutul Politehnic, Brașov, 1971)

3.117. a) Să se rezolve ecuația $\operatorname{tg}(x-\pi/4)=\operatorname{tg}2x+2$.
b) Să se calculeze $\sin 2x$ și $\cos 2x$, în funcție de valoarea pozitivă a lui $\operatorname{tg}x$ dată de ecuația precedentă.
(Institutul Politehnic, Iași, 1966).

3.118. Să se rezolve sistemul de inecuații $-1 \leqslant \operatorname{tg} \frac{x}{2} \leqslant 1$. (*C.I.Ț.*)

3.119. Să se rezolve ecuația: $2 \cdot 3^{2\cos 3x+1} + 4 \cdot 12^{\cos 3x} + 12^{\cos 3x} + \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot 4^{2\cos 3x+1} = 12^{\cos 3x+1} + 5 \cdot \sqrt{3} \cdot 12^{\cos 3x}$. (G.M.B., 14571, Maghiar Gh.)

3.120. a) Să se rezolve ecuația $\frac{\sin x}{\cos a} - \frac{\cos x}{\sin a} = 2$, unde $\sin 2a \neq 0$.

b) Să se precizeze valorile lui x pentru $a = 25°$. (G.M.B., 12408, *C.I.Ț.*)

3.121. Se dă ecuația $2^{\sin x+\cos^2 x} + 4^{\sin x+\cos^2 x} = 2(\sqrt[4]{2} + 2\sqrt{2})$.

a) Să se arate că $x = \pi/6$ este o soluție a ecuației.

b) Să se rezolve ecuația dată. (Admitere în treapta a II-a, Cluj-Napoca)

3.122. Să se arate că ecuația $x^3 - 3 \operatorname{tg} 15° \cdot x^2 - 3x + \operatorname{tg} 15° = 0$ admite rădăcina $x_1 = \operatorname{tg} 5°$, apoi să se exprime și celelalte două rădăcini. (*C.I.Ț.*)

3.123. Să se arate că

a) $\operatorname{tg} 5° \cdot \operatorname{ctg} 15° \cdot \operatorname{ctg} 25° \cdot \operatorname{ctg} 35° = 1$.

b) $\operatorname{tg} 5° + \operatorname{ctg} 25° = 3 \operatorname{tg} 15° + \operatorname{ctg} 35°$. (*C.I.Ț.*)

3.124. Să se arate că

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{20} + \operatorname{tg} \frac{9\pi}{20} + \operatorname{tg} \frac{13\pi}{20} + \operatorname{tg} \frac{17\pi}{20} = 4.$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{20} \cdot \operatorname{tg} \frac{9\pi}{20} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{20} \cdot \operatorname{tg} \frac{13\pi}{20} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{20} \cdot \operatorname{tg} \frac{17\pi}{20} +$$

$$+ \operatorname{tg} \frac{9\pi}{20} \operatorname{tg} \frac{13\pi}{20} + \operatorname{tg} \frac{9\pi}{20} \operatorname{tg} \frac{17\pi}{20} + \operatorname{tg} \frac{13\pi}{20} \operatorname{tg} \frac{17\pi}{20} = -14.$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{20} \cdot \operatorname{tg} \frac{9\pi}{20} \cdot \operatorname{tg} \frac{13\pi}{20} \cdot \operatorname{tg} \frac{17\pi}{20} = 1.$$ (G.M.B., 12338, *C.I.Ț.*)

3.125. Să se rezolve ecuația $3 \sin x + 4 \cos x = 5$.

3.126. Să se arate că $\frac{1 - |\cos x|}{1 + |\cos x|} \leqslant \sin^2 x$, egalitatea avînd loc pentru $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. (G.M.B., 6467, *C.I.Ț.*)

3.127. Să se rezolve ecuația $m \cos 2x + 2(m^2 + 3) \sin x - 7m = 0$, $m \in \mathbf{R}$. *Discuție.*

3.128. Să se arate că dacă $a + b + c = 180°$, atunci

$$\cos a + \cos b + \cos c = 1 + 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}.$$

3.129. Să se arate că în orice triunghi:

$$\frac{\cos B + \cos C - \sin B - \sin C}{1 - \sin A - \cos A} = \cos B - \sin B \cdot \operatorname{ctg} \frac{A}{2}.$$

(G.M., 4718, 1936, *C.I.Ţ.*)

3.130. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

3.131. Să se arate că dacă $a + b + c = \pi/2$, atunci

$$\Sigma[\cos a \sin (b - c)] = 0; \quad \Sigma[\cos a \sin (b - c) \cos 2a] = 0.$$

(G.M.B., 8432, *C.I.Ţ.*)

3.132. Să se arate că între unghiurile unui triunghi ABC:

$$\Sigma \sin 2A = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C.$$

3.133. Să se arate că dacă $A + B + C = \pi$, atunci

a) $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\cos B + \cos C}{\sin B + \sin C} = \frac{\sin C - \sin B}{\cos B - \cos C}$, unde $B \neq C$

b) $\operatorname{tg} A = \frac{m \sin A - \sin 2B - \sin 2C}{m \cos A + \cos 2B + \cos 2C}$, $m \in \mathbf{R}$, unde $A \neq \frac{\pi}{2}$

(S.G.M. VI: 231, *C.I.Ţ.*)

3.134. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC avem

$$\Sigma(\cos A \sin B \sin C) = 1 + \cos A \cos B \cos C.$$

3.135. Să se arate că dacă $a + b + c = 180°$, atunci:

$$4 \Sigma \operatorname{ctg} 2a + \Sigma \operatorname{tg} \frac{a}{2} = \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{c}{2} - 2 \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c.$$

(S.G.M. VI: 255, *C.I.Ţ.*)

3.136. Să se arate că în orice triunghi ABC avem

$$\Sigma (\sin A \cos B \cos C) = \sin A \sin B \sin C.$$

3.137. Să se arate că în orice triunghi

$$\Sigma \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{A}{8}\right) = \pi \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{A}{8}\right).$$ (Rev. Pitagora, *VI*: 47, *C.I.Ţ.*)

3.138. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC,

$$\left(\operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2}\right) \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \cos \frac{A}{2}.$$

3.139. Să se arate că într-un triunghi în care $A > B > C$ avem

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \cos^2 \frac{C}{2} + \cos \frac{A}{2} \cos\left(B + \frac{A}{2}\right) + \cos \frac{C}{2} \cos\left(A + \frac{C}{2}\right).$$

(R.M.F., 175, *C.I.Ţ.*)

3.140. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC,

$$\left(1 - \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \sin\frac{A}{2}.$$

3.141. Să se arate că într-un triunghi oarecare există relațiile:

$$(\cos A + \cos B \cdot \cos C)\sin A = (\cos B + \cos C \cdot \cos A)\sin B =$$

$$= (\cos C + \cos A \cdot \cos B)\sin C = \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C.$$

(R.M.F., 550, 1953, *C.I.Ț.*)

3.142. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC,

$$\left(1 - \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)\left(-1 + \operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)\sin B \sin C = 4\cos^2\frac{A}{2}.$$

3.143. Să se arate că în orice triunghi ABC, avem

$$E = \Sigma\left(\frac{\Sigma(\cos A \cdot \cos B) + \cos^2 A}{\Sigma(\sin A \cdot \sin B) + \sin^2 A)}\right) = 1 \quad \text{(Rev. Pitagora, } VI\text{:6 5, } C.I.Ț.\text{)}$$

3.144. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC,

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \frac{1}{4}\sec\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2} = \frac{\cos A + \cos B + \cos C}{\sin A + \sin B + \sin C}.$$

3.145. Să se arate că în orice triunghi ABC avem

$$\cos\frac{A}{2} < \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \text{ și analoagele.} \qquad \text{(S.G.M., } VI\text{: 390, } C.I.Ț.\text{)}$$

3.146. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC

$$\Sigma\frac{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B} = \Sigma\frac{\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{B}{2}}{\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2} + \operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}} = 1.$$

3.147. Să se arate că într-un triunghi oarecare avem

$$\cos^2\frac{A}{2} - \cos^2\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\left(B + \frac{C}{2}\right) + \cos\frac{C}{2}\cos\left(A + \frac{C}{2}\right).$$

(R.M.F., 175, 1951, *C.I.Ț.*)

3.148. Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

$$\frac{\cos A - \sin A + \cos B - \cos C + 1}{\cos A + \sin A - \sin B + \sin C - 1} = \operatorname{ctg}\frac{A}{2}. \qquad \text{(R.M.T., 1585, } C.I.Ț.\text{)}$$

3.149. Să se arate că dacă $A + B + C = \pi$, atunci $\sin\dfrac{A}{4}\sin\dfrac{B}{4}\sin\dfrac{C}{4} +$

$$+ \cos\frac{A}{4}\cos\frac{B}{4}\cos\frac{C}{4} + \Sigma\cos\frac{A}{4}\sin\frac{B}{4}\sin\frac{C}{4} + \Sigma\sin\frac{A}{4}\cos\frac{B}{4}\cos\frac{C}{4} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \Sigma\cos\frac{A}{2}.$$

(S.G.M., *VI*, 162, *C.I.Ț.*)

3.150. Să se arate că dacă A, B, C sînt unghiurile unui triunghi oarecare, atunci $\sin A \sin(A+\alpha) - \sin B \sin(B+\alpha) = \sin(A-B)\sin(A+B+\alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$. (R.M.F., 313, 1952, *C.I.Ţ.*)

3.151. Să se arate că între unghiurile unui triunghi avem relaţia

$$\operatorname{tg}^2 A + (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C) = \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \sec^2 A$$

(G.M.F.B., 1978, *V. Baltac*)

3.152. Să se arate că dacă $a + b + c = 90°$, atunci:

1) $\sin^2 a + \sin^2 b + \sin c \cdot \cos(a-b) = 1$,

2) $\cos^2 2a + \cos^2 2b + \cos 2c \cdot \cos(2a - 2b) = 1$,

3) $\sin^2 5a + \sin^2 5b + \sin 5c \cdot \cos(5a - 5b) = 1$,

4) $\cos^2 8a + \cos^2 8b - \cos 8c \cdot \cos(8a - 8b) = 1$.

(G.M.B., 9506, *C.I.Ţ.*)

3.153. Să se arate că dacă $a + b + c + d = 2\pi$, atunci

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} d = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} d + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} c \operatorname{tg} d + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \operatorname{tg} d.$$

3.154. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC,

$$(\cos A + \cos B)(1 + \cos C) = (\sin A + \sin B)\sin C.$$

(S.G.M., 7 1948, *C.I.Ţ.*)

3.155. Să se arate că un triunghi este isoscel sau dreptunghic dacă $\dfrac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} = \dfrac{\sin^2 B}{\sin^2 C}$.

3.156. Să se arate că dacă $x, y \in R_+$ $0 < x + y \leqslant \pi/2$ şi $m \in R$, atunci $(m^2 - 2m)\cos(x+y) + \cos(x-y) > 0$. (G.M.B., 7447, *C.I.Ţ.*)

3.157. Să se arate că într-un triunghi ABC avem: $8 \cos A \cos B \cos C \leqslant 1$.

3.158. Dacă între unghiurile unui triunghi avem $8 \cos A \cos B \cos C = 1$, atunci triunghiul este echilateral.

3.159. Să se arate că dacă A, B, C sînt unghiurile unui triunghi ascuţit unghi, atunci $\sin A + \sin B + \sin C + \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C > 2\pi$.

(Matematica v şcole, 2/1964)

3.160. Să se arate că într-un triunghi oarecare: $\Sigma \operatorname{cosec} A > \dfrac{9}{4}\pi \sec \dfrac{A}{2}$.

(G.M.B., 5278, *C.I.Ţ.*)

3.161. Să se arate că dacă într-un triunghi ABC avem

a) $\sin C = \cos A + \cos B$, atunci $\sphericalangle A = \pi/2$.

b) $\sin A = 2 \sin B \cos C$, atunci $B = C$.

3.162. Să se arate că într-un triunghi oarecare

$$\sin A \sin(A + \pi/4) - \sin B \sin(B + \pi/4) = \sin(A - B)\sin(C - \pi/4)$$

(R.M.F., 1951, *C.I.Ţ.*)

3.163. Să se arate că dacă între unghiurile unui triunghi ABC avem $\sin A + \sin C = 2 \sin B$, atunci $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = 2 \operatorname{ctg} \frac{B}{2}$.

3.164. Să se arate că dacă $xy + yz + xz = 1$, atunci

$$\frac{2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} + \frac{2y(1-y^2)}{(1+y^2)^2} + \frac{2z(1-z^2)}{(1+z^2)^2} \leqslant \frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2}.$$

(G.M.B., 8030, *C.I.T.*)

3.165. Să se arate că dacă $A + B + C = 18°$, atunci $E = \Sigma \sin 2A + \sqrt{3} \cos A + 2 \cos 6° = 8(\cos 12° \cdot \cos A \cos B \cos C - \sin 12° \cdot \sin A \sin B \sin C)$.

3.166. Să se arate că într-un triunghi ascuțitunghic:

$$\cos A \leqslant \sin B \sin C.$$

$$\cos A \cos B - \frac{1}{2} \sin C \sin 2C < \sin A \sin B \sin C + \cos A \cos B \cos C.$$

(Pitagora, S. 90 1937 (*C.I.T.*)

3.167. Să se arate că dacă $A + B + C = \pi/4$, există relația $\sin A \sin B \cdot \sin C + \cos A \cos B \cos C + \Sigma(\cos A \sin B \sin C) + \Sigma(\sin A \cos B \cos C) = \cos 45°(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C)$. (G.M. B., 2843, *C.I.T.*)

3.168. Să se arate că în orice triunghi ABC avem

$$2(\sin B + \sin C) \leqslant 3 + 2 \cos A.$$

În ce caz avem egalitate? (G.M.B., 10027, *C.I.T.*)

3.169. Să se arate că în orice triunghi ABC

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{B}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{C}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right) = \frac{2 \cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}.$$

(Pitagora, S. 164, *C.I.T.*)

3.170. Să se arate că în orice triunghi ABC avem $a \cos (B + x) + b \cos (A - x) = c \cos x$, unde $x \in \mathbf{R}$, apoi să se arate dcă dacă $A_1 + B_1 + C_1 = \pi/4$, atunci

$$\cos 2A_1 \sin (2B_1 - x) + \cos 2B_1 \sin (2A_1 + x) = \cos 2C_1 \cos x.$$

(Concurs elevi, 1941, *C.I.T.*)

3.171. Să se arate că dacă $A + B + C = \pi$, atunci

$$E = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geqslant 3/4.$$

3.172. Să se arate că într-un triunghi ABC avem

$$\sin \frac{A-B}{2} + \sin \frac{A-C}{2} + \sin \frac{3A}{2} \leqslant \frac{3}{2}.$$

(G.M.B., 10735, 1970, *C.I.T.*)

3.173. Să se arate că dacă într-un triunghi ABC există relația $\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B < 1$, atunci triunghiul ABC este obtuzunghic.

3.174. Să se arate că dacă $A + B + C = 5\pi/4$, atunci

$$1 + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \Sigma \operatorname{tg} A + \Sigma \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B. \qquad (C.I.T.)$$

3.175. Să se arate că dacă $a + b + c = \pi$ și $n \in \mathbf{N}$, atunci $\sin 2na + \sin 2nb + \sin 2nc = (-1)^{n+1} 4 \sin na \sin nb \sin nc$.

3.176. Să se arate că în orice triunghi ABC avem

$$E = \frac{\cos A + \cos C}{1 - \cos A} + \frac{\sin B (\cos B - \cos C)}{\sin B - \sin C} = \cos B. \quad (\text{R.M.T., 1593, } C.I.T.)$$

3.177. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC avem

$$27 \sin 2A \sin 2B \sin 2C \leqslant 64 \cos^3 \frac{A}{2} \cos^3 \frac{B}{2} \cos^3 \frac{C}{2}.$$

3.178. Să se arate că oricare ar fi m real și $x > 0$, $y > 0$, $x + y < \pi$ există relația $m(m-1) \sin (x + y) + m(\sin x - \sin y) + \sin y > 0$.

(G.M.B., 10032, $C.I.T.$)

3.179. Să se arate că într-un triunghi ascuțitunghic avem

$$1 + \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C} \leqslant 0. \qquad (\text{G.M.F.B., 3388, 1959, } C.I.T.)$$

3.180. Să se arate că dacă $a + b + c = \pi$, atunci

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c = 1.$$

3.181. Să se arate că în orice triunghi

$$\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{1 - \cos A}} + \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{1 - \cos B}} \geqslant \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{1 - \cos C}}.$$

(Pitagora, S. 141, $C.I.T.$)

3.182. Să se arate cîă într-un triunghi oarecare ABC avem

$$\cos^2 \frac{B - C}{2} \geqslant 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

3.183. Să se arate că $E = \sin a + \sin b + \cos a + \cos b + 2 \cos \dfrac{a - b}{2} =$

$$= 4\sqrt{2} \cos \frac{a - b}{2} \cos \frac{a + b}{4} \cos \frac{\pi - a - b}{4}.$$

3.184. Să se arate că într-un triunghi oarecare avem:

$$\Sigma \frac{\cos A \cos \dfrac{A}{2}}{\sin \dfrac{B}{2} \sin \dfrac{C}{2}} = 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

3.1. Perioada funcției este 2π. Funcția se mai scrie

$$y = |\sin x| \cos x + |\cos x| \sin x. \text{ Rezultă.}$$

$$y = \begin{cases} \sin 2x & \text{dacă } x \in [2k\pi,\ 2k\pi + \pi/2,\ k \in \mathbf{Z}. \\ 0 & \text{dacă } x \in [2k\pi + \pi/2,\ (2k+1)\pi] \cup [2k\pi + 3\pi/2,\ 2(k+1)\pi]. \\ -\sin 2x & \text{dacă } x \in (2k\pi + \pi,\ 2k\pi + 3\pi/2,\ k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

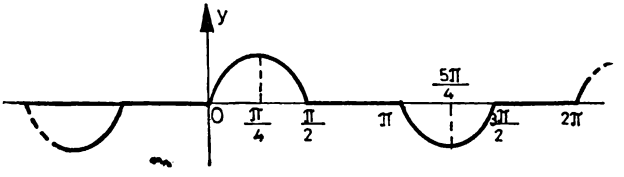

Fig.3.1.

Tabloul de variație pe intervalul $[0, 2\pi]$ este

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	2π
y	0	1	0	0	-1	0	0

3.2. Avem

$$\left.\begin{array}{l} 1 + \cos 2x \neq 0 \Rightarrow 2\cos^2 x \neq 0 \\ 1 - \cos 2x \neq 0 \Rightarrow 2\sin^2 x \neq 0 \end{array}\right\} \quad x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$$

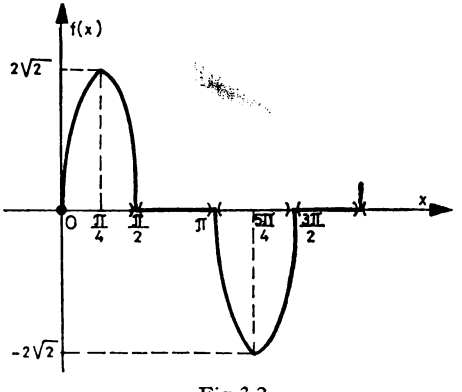

Fig.3.2.

$$f(x) = \frac{2\sin 2x \cos x}{\sqrt{2\cos^2 x}} + \frac{2\sin 2x \sin x}{\sqrt{2\sin^2 x}} = \sqrt{2}\sin 2x(\text{sign } \cos x) +$$

$$+ \sqrt{2}\sin 2x\ (\text{sign } x) =$$

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2}\sin 2x & , \text{ pentru } x \in (0, \pi/2) \\ 0 & , \text{ pentru } x \in (\pi/2, \pi) \\ -2\sqrt{2}\sin 2x & , \text{ pentru } x \in (\pi, 3\pi/2) \\ 0 & , \text{ pentru } x \in (3\pi/2, 2\pi). \end{cases}$$

Perioada funcției este 2π, iar $f(x) \in (-2\sqrt{2}, +2\sqrt{2})$.

3.3. Avem $\left.\begin{array}{l} 1 - \cos 2x \neq 0 \Rightarrow 2\sin^2 x \neq 0 \\ 1 + \cos x \neq 0 \Rightarrow 2\cos^2 x \neq 0 \Rightarrow \cos x = 0, \end{array}\right\} x \neq k\pi/2, \ k \in \mathbf{Z},$

$$f(x) = \frac{-2\sin x \cos 2x}{\sqrt{2}|\sin x|} - \frac{2\cos 2x \cos x}{\sqrt{2}\,|\cos x|} =$$

$$= \sqrt{2}\cos 2x(\operatorname{sign}\sin x) - \sqrt{2}\cos 2x\,(\operatorname{sign}\cos x)$$

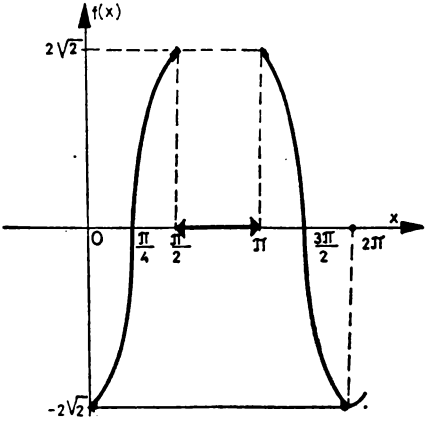

Fig. 3.3.

$$f(x) = \begin{cases} -2\sqrt{2}\cos x, & \text{pentru } x \in (0, \pi/2) \\ 0 & , \text{ pentru } x \in (\pi/2, \pi) \\ 2\sqrt{2}\cos x & , \text{ pentru } x \in (\pi, 3\pi/2) \\ 0 & , \text{ pentru } x \in (3\pi/2, 2\pi). \end{cases}$$

Perioada funcției este 2π, iar $f(x) \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

3.4. Avem $\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}t\right)$ și transformînd diferența de sinusuri în produs se obține $x = 5\cos(\pi/3 + \pi/3)$. Aceasta este elongația mișcării oscilatorii armonice a cărei amplitudine este $R = 5$ cm, a cărei perioadă este $T = 2\pi/\omega = 6s$; $(\omega = \pi/3)$ și a cărei fază inițială este $\alpha = \pi/3$ radiani.

3.5. Se cunoaște egalitatea $\sin^2 a - \sin^2 b = \sin(a + b)\sin(a - b)$

Deci $\sin^2\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

și astfel $f(x)= \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right),\ x\neq\frac{\pi}{4}\cdot$

Deci $A=\sqrt{2}$ și $\alpha=\pi/4$.

3.6. Notăm $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}=a$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=b$. Avem

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}=\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\cdot \text{ Deci } a+b=\operatorname{actg}\frac{1}{2}\cdot$$

3.7. Pornind de la formula

$$\operatorname{tg}(a+b+c)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b+\operatorname{tg}c-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b\operatorname{tg}c}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b-\operatorname{tg}b\operatorname{tg}c-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}c}$$

se deduce că $\operatorname{tg}(a+b+c+d)=\operatorname{tg}[(a+b+c)+d]=$

$$=\frac{\operatorname{tg}(a+b+c)+\operatorname{tg}d}{1-\operatorname{tg}(a+b+c)\operatorname{tg}d}=\frac{\Sigma\operatorname{tg}a-\Sigma\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b\operatorname{tg}c}{1-\Sigma\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b+\Sigma\operatorname{tg}a}\cdot$$

Dacă notăm $a=\operatorname{arctg}x$; $b=\operatorname{arctg}y$; $c=\operatorname{arctg}z$; $d=\operatorname{arctg}t$, rezultă că $\operatorname{tg}a=x$; $\operatorname{tg}b=y$; $\operatorname{tg}c=z$; $\operatorname{tg}t=d$ și $a+b+c+d=\pi$.

Înlocuind aceste valori în formula de mai sus se obține $tg\,\pi=0$ deci numărătorul este egal cu zero, adică $x+y+z+t=xyz+xyt+$

$$+xzt+yzt=xyzt\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)\cdot$$

3.8. a) Notăm $\arcsin\frac{5}{13}=a$, $\arcsin\frac{12}{13}=b$.

Să arătăm că $a+b=\pi/2$; $\sin(a+b)=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

$$\sin a\cos b+\cos a\sin b=\frac{5}{13}\cdot\frac{5}{13}+\frac{12}{13}\cdot\frac{12}{13}=\frac{25+144}{169}=1.$$

b) Notăm $\arccos\frac{5}{13}=b$ și $\arccos\frac{12}{13}=a$ și rezultă

$$\arcsin\frac{5}{13}=a \text{ și } \arcsin\frac{12}{13}=\arccos\frac{5}{13}=b,$$

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b=\frac{12}{13}\cdot\frac{5}{13}-\frac{5}{13}\cdot\frac{12}{13}=0=\cos\frac{\pi}{2}\cdot$$

3.9. Avem $4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = 2\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5}\right) = 2 \operatorname{arctg} \frac{2/5}{1 - 1/25} =$

$= 2 \operatorname{arctg} \frac{5}{12} = \operatorname{arctg} \frac{5}{12} + \operatorname{arctg} \frac{5}{12} = \operatorname{arctg} \frac{10/12}{1 - 25/144} = \operatorname{arctg} \frac{120}{119}$.

$$4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \operatorname{arctg} \frac{120}{119} + \operatorname{aerctg}\left(-\frac{1}{239}\right) =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119} \cdot \frac{1}{239}} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

3.10. Ţinem seama de relaţia $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ deci $2x = 1 - 2x^2$ sau $2x^2 + 2x - 1 = 0$, $\Rightarrow x = (\sqrt{3} - 1)/2$

3.11. Avem: $\arcsin \frac{4}{5} < \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$,

$\arcsin \frac{5}{13} < \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$.

$\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} < \frac{\pi}{2}$ sau $\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 < 1$.

$$\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} = \arcsin\left(\frac{4}{5}\sqrt{1 - \frac{25}{169}} + \frac{5}{13}\sqrt{1 - \frac{16}{25}}\right) =$$

$$= \arcsin\left(\frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5}\right) = \arcsin \frac{63}{65} < \frac{\pi}{2}.$$

$$\arcsin \frac{63}{65} = \arccos \sqrt{1 - \left(\frac{63}{65}\right)^2} = \arccos \frac{16}{63}.$$

Prin urmare $\arcsin \frac{16}{65} + \arcsin \frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$.

3.12. Trebuie să avem $-1 \leqslant \frac{\pi}{2} \arcsin x \leqslant 1$ de unde rezultă $-\sin \frac{2}{\pi} \leqslant$

$$\leqslant x \sin \frac{2}{\pi}.$$

3.13. Avem $\operatorname{arctg} x = \pi/2 - \operatorname{arcctg} x$. Notăm $\operatorname{arcctg} x = y$, deci $\operatorname{ctg} y = x$ şi $\operatorname{tg} y = 1/x$.

Dacă $x > 0$, atunci $0 < y < \pi/2$, deci $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arcctg} y$.

3.14. Notăm $2 \operatorname{arctg} x = y$, deci $\operatorname{tg} \frac{y}{2} = x$. Avem

$\sin y = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{y}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2}} = \frac{2x}{1 + x^2}$. Avem $\arcsin (\sin y) = \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}$. Pentru $x > 1$ avem

$\pi/4 < \operatorname{arctg} < \pi/2$ sau $\pi/2 < 2 \operatorname{arctg} x < \pi$ de unde $\pi/2 < y < \pi$. În acest caz avem $\arcsin \frac{2x}{1 + x^2} = \pi - y = \pi - 2 \operatorname{arctg} x$ sau $2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1 + x^2} = \pi$.

3.15. Avem $\cos (\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) =$

$= \cos (\operatorname{arctg} x) \cos (\operatorname{arctg} y) - \sin (\operatorname{arctg} x) \sin (\operatorname{arctg} y) =$

$= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} = \frac{1 - xy}{\sqrt{1 + y^2}\sqrt{1 + x^2}}$.

3.16. Avem $-\frac{\pi}{2} < x - 2\pi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$ și $-\frac{\pi}{2} < x - k\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{(2k-1)}{2} < x < \frac{(2k+1)\pi}{2}$.

3.17. a) Știind că $\arcsin (\sin x) = x$ dacă $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$

$\arcsin (\sin x) = \arcsin [\sin (\pi - x)] \Leftrightarrow -\pi/2 \leqslant \pi - x \leqslant \pi/2$ sau

$\pi/2 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$.

b) $\arcsin [\sin (x - 2\pi)] \Leftrightarrow -\pi/2 \leqslant x - 2\pi \leqslant \pi/2$ sau

$+ 3\pi/2 < x < 5\pi/2$.

c) $\arcsin [\sin(-\pi - x)] \Leftrightarrow -\pi/2 \leqslant -\pi - x \leqslant \pi/2$ sau

$-3\pi/2 \leqslant x \leqslant -\pi/2$.

În general, $\arcsin (\sin x) = (-1)^{k-1}(k\pi - x)$ dacă $\frac{(2k-1)\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{(2k+1)\pi}{2}$, deoarece

$\arcsin (\sin x) = \arcsin \{\sin [(-1)^{k-1}(k\pi - x)]\}$ deci

$-\frac{\pi}{2} \leqslant (-1)^{k-1}(k\pi - x) \leqslant \frac{\pi}{2}$, sau $\frac{(2k-1)\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.18. Avem $\sin \frac{3a}{2} = 3 \sin \frac{a}{2} - 4 \sin^3 \frac{a}{2} = \sin \frac{a}{2} \left(3 - 4 \sin^2 \frac{a}{2}\right) =$

$= \sin \frac{a}{2} (1 + 2 \cos a)$. Notăm $a = \arcsin x$, deci $\sin a = x$, unde $-\pi/2 \leqslant$

$\leqslant a \leqslant \pi/2$, deci $\cos a = + \sqrt{1 - x^2}$. Deoarece $-\pi/2 \leqslant a \leqslant \pi/2$ pentru $x > 0$,

avem $\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$, iar pentru $x < 0$ avem $\sin \frac{a}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$;

$\sin x = \varepsilon \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{2}} = \frac{|x|}{\sqrt{2(1 + \sqrt{1 - x^2})}}$. Înlocuim $\cos a$ și $\sin \frac{a}{2}$ în

formula $\sin \frac{3a}{2} = \sin \frac{a}{2} (1 + 2 \cos a)$ și obținem

$$\sin\left(\frac{3}{2} \arcsin x\right) = \frac{x(1 + 2\sqrt{1 - x^2})}{\sqrt{2(1 + \sqrt{1 - x^2})}}.$$

3.19. Avem succesiv $\operatorname{tg}(2 \arcsin x) = \frac{2 \operatorname{tg}(\arcsin x)}{1 - \operatorname{tg}^2(\arcsin x)} =$

$= \frac{2x/\sqrt{1 - x^2}}{1 - x^2/(1 - x^2)} = \frac{2x\sqrt{1 - x^2}}{1 - 2x^2}$

cu restricțiile impuse în enunț.

3.20. Notăm $\arcsin x = y$, deci $\sin y = x$, $\sin 2y = 2 \sin y \cos y =$

$= 2x\sqrt{1 - x^2}$. Dacă $2x^2 < 1$, atunci $-\frac{1}{\sqrt{2}} < \pi < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{\pi}{4} < y < \frac{\pi}{4}$,

$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Rezultă $2y = \arcsin (2x\sqrt{1 - x^2})$ sau $2 \arcsin x = \arcsin (2x\sqrt{1 - x^2})$. Relația din enunț devine:

$$\arcsin x + 3 \arccos x + 2 \operatorname{arsin} x = 3 (\arcsin x) + \arccos x) = 3\pi/2.$$

3.21. Avem $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ dacă $-\pi/2 < x < \pi/2$, dar

$\operatorname{arctg} 10 > \pi/4$; $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x + \pi$ dacă $-\pi/2 < x + \pi <$

$< \pi/2$ adică $-3\pi/2 < x < \pi/2$. Mai avem

$$2 \operatorname{arctg} 10 = \operatorname{arctg} 10 + \operatorname{arctg} 10 = \pi + \operatorname{arctg} \frac{10 + 10}{1 - 10 \cdot 10} = \pi - \operatorname{arctg} \frac{20}{99}.$$

Notăm $\arcsin \frac{20}{101} = x$; $\sin x = \frac{20}{101}$ $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{+\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{20}{\sqrt{101^2 - 20^2}} =$

$= \frac{20}{99} \Rightarrow x = \operatorname{arctg} \frac{20}{99}$.

Deci

$$2 \operatorname{arctg} 10 + \arcsin \frac{20}{101} = \pi - \operatorname{arctg} \frac{20}{99} + \operatorname{arctg} \frac{20}{99} = \pi.$$

3.22. Folosim formula $\arcsin x + \operatorname{arscsin} y = \arcsin (x\sqrt{1-y^2} +$

$+ y\sqrt{1-x^2})$; $\arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2}$; dacă $x > 0$. Prin urmare

$$\arccos \frac{2}{3} = \arcsin \frac{\sqrt{5}}{3}; \quad \sin\left(\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{\sqrt{5}}{3}\right) =$$

$$= \sin\left[\arcsin\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{\sqrt{8}}{3}\right)\right] =$$

$$= \sin\left\{\arcsin\left[\frac{2}{9}(1 + \sqrt{10})\right]\right\} = \frac{2}{9}(1 + \sqrt{10}).$$

3.23. Notăm $\arcsin x = a$, unde $-\pi/2 < a < \pi/2$. Avem

$$\cos \frac{a}{2} = + \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} \text{ și } \cos a = + \sqrt{1 - \sin^2 a} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Rezultă: $\cos\left(\frac{1}{2} \arcsin x\right) = \cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{2}} =$

$$= \sqrt{x^2} / \sqrt{2(1 - \sqrt{1 - x^2})}$$

3.24. Fie $\cos x = y$ și ținem seama de relațiile

$$\cos 4y = 2\cos^2 2y - 1; \quad 2\sin^2 y = 1 - \cos 2y.$$

Ecuația dată devine $4\cos^2 2y + 4\cos 2y + 1 = 0$ sau $(2\cos 2y + 1)^2 = 0$,

de unde $\cos 2y = -\frac{1}{2}$; $\cos y = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2y}{2}} = \pm \frac{1}{2}$ deci $2y = 2k\pi \pm$

$\pm \frac{2\pi}{3}$ adică $y = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$. Rezultă că $x = \cos y = \pm \frac{1}{2}$, după cum k este

par sau impar, $k \in \mathbf{Z}$.

3.25. Dacă $x = \arcsin \frac{3}{5} \Rightarrow \sin x = \frac{3}{5}$, $\cos x = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$.

Notăm $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{1}{3} : \frac{x}{2} \in \left[\operatorname{arctg}\frac{1}{3},\ \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}\right]$;

$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 2$. Avem

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2};\ \frac{x}{2} \in \left[\operatorname{arctg}\frac{1}{3},\ \operatorname{arctg} 2\right],\ \text{deci}$$

$t \in \left[\frac{1}{3},\ 2\right]$.

Înlocuim $\cos x$ și $\sin x$ în funcție de t și înmulțim cu $\sqrt{1+t^2}$.

a) Pentru prima relație obținem

$$3\sqrt{5 + 5t^2 - 4 + 4t^2 - 6t} + 2\sqrt{2}\sqrt{5 + 5t^2 + 3 - 3t^2 - 8t} = 5\sqrt{1 + t^2 + 2t}$$

sau $3(3t - 1) + 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}(2 - t) = 5(1 + t)$ deci $5(1 + t) = 5(1 + t)$.

b) Pentru a doua relație obținem

$$3\sqrt{5 + 5t^2 + 8t - 3 + 3t^2} - 2\sqrt{2}\sqrt{5 + 5t^2 - 6t - 4 + 4t^2} = 5\sqrt{2}$$

sau $3\sqrt{2}(2t + 1) - 2\sqrt{2}(3t - 1) = 5\sqrt{2}, \Leftrightarrow 5\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

3.26. a) Facem substituția $\sin y = \pm x,\ y \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ întrucît $\pm x \in [-1,\ 1]$. Avem $\cos y \geqslant 0$, $\cos\frac{y}{2} > 0$.

Identitatea dată se mai scrie:

$$\sqrt{1 + \sin y} + \sqrt{2}\sqrt{1 + \cos y} = \sqrt{5 + 3\sin y + 4\cos y} \qquad (1)$$

Identitatea (1) se mai scrie ținînd seama că $\cos\frac{y}{2} \geqslant \left|\sin\frac{y}{2}\right|$ întrucît $\frac{y}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]$, astfel:

$$\sqrt{\sin\frac{2y}{2}\cos^2\frac{y}{2} + 2\cos\frac{y}{2}\sin\frac{y}{2}} + \sqrt{2}\sqrt{2\cos^2\frac{y}{2}} =$$

$$= \sqrt{1 + (4 + 4\cos y) + 3\sin y}\ \text{sau}$$

$$\left|\cos\frac{y}{2} + \sin\frac{y}{2}\right| + 2\left|\cos\frac{y}{2}\right| = \sqrt{1 + 8\cos^2\frac{y}{2} + 6\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}}\ \text{sau}$$

$\cos\frac{y}{2}+\sin\frac{y}{2}+2\cos\frac{y}{2}=\sqrt{9\cos^2\frac{y}{2}+6\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}+\sin^2\frac{y}{2}}$ sau

$3\cos\frac{y}{2}+\sin\frac{y}{2}=\left|3\cos\frac{y}{2}+\sin\frac{y}{2}\right|$ care se verifică întrucît

$3\cos\frac{y}{2}+\sin\frac{y}{2}>0.$

b) Făcînd substituția $\sin y=\pm\sqrt{1-x^2}\in[-1,\ 1]$ obținem identitatea (1), $\left(y\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\cos y=|x|\right)$

3.27. Condițiile $\alpha,\ \beta\in(0,\ \pi/2)$ implică $0<\frac{1-t^2}{1+t^2}<1, 0<\frac{2t}{1-t^2}<\infty,$ adică $t\in(0,\ 1)$. Cu această precizare, avem

$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=t=\frac{2t}{1+t^2},\ \sin\beta=$

$=\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}=\frac{2t}{1+t^2}.$

Rezultă $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}=1.$

Această relație împreună cu $\alpha,\ \beta\in(o,\ \pi/2)$ implică $\alpha=\beta$.

3.28. Avem $2x-2k\pi=\pi/2-2x$ sau $4x=2k\pi+\pi/2,$ deci $x=$ $=k\pi/2+\pi/8,\ k\in\mathbf{Z}.$

$k=0,\ x_1=\frac{\pi}{8}, k=1,\ x_2=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}=\frac{5\pi}{8}, k=2,\ x_3=\frac{9\pi}{8}, k=3,\ x_4=$

$=\frac{13\pi}{8},\ k=4,\ x=\frac{17\pi}{8}>2\pi$

deci $x\in\left\{\frac{\pi}{8},\ \frac{5\pi}{8},\ \frac{9\pi}{8},\ \frac{13\pi}{8}\right\}.$

3.29. Avem $\sin x\geqslant 0$ și notăm $\sin x=t\in[0,\ 1];$

$$\sqrt{1-t}+\sqrt{2t}\neq 0;1-t\neq 2t,\ t\neq 1/3.$$

Aducem la același numitor și eliminăm numitorii: $2\sqrt{1-t}\sqrt{1=t}+2(1-$ $-t-2t)=0$ sau $|1-t|+1-3t=0,$ deci $t=\frac{1}{2};$ $\sin x=\frac{1}{2},$ de unde $x=360°k+90°+60°;\ k\in\mathbf{Z}.$

3.30. Din relația $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$ avem $\sin^3 A = \frac{3 \sin A - \sin 3A}{4}$, deci:

$$\Sigma \sin^3 A = \frac{1}{4}(3\Sigma \sin A - \Sigma \sin 3A) = \frac{1}{4}\left[3 \cdot 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \right.$$

$$\left. + 4 \cos \frac{3C}{2} \cos \frac{3A}{2} \cos \frac{3B}{2}\right] = 3 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{3A}{2} \cos \frac{3B}{2} \cos \frac{3C}{2} \cdot$$

deoarece $\Sigma \sin 3A = 2 \sin \frac{3(A+B)}{2} \cos \frac{3(A-B)}{2} + 2 \sin \frac{3C}{2} \cos \frac{3C}{2} =$

$$= 2 \sin \frac{3(180° - C)}{2} \cos \frac{3(A-B)}{2} + 2 \sin \frac{3C}{2} \cos \frac{3C}{2} = 2 \sin \left(270° - \frac{2C}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot \cos^3 \frac{(A-B)}{2} + 2 \sin^3 \frac{3C}{2} \cos \frac{3C}{2} = 2 \cos \frac{3C}{2} \cos \frac{3(A-B)}{2} + 2 \sin \frac{3C}{2} \cdot$$

$$\cdot \cos \frac{3C}{2} = 2 \cos \frac{3C}{2}\left[-\cos \frac{3(A-B)}{2} + \sin \frac{(3(180° - A - B]}{2}\right] =$$

$$= 2 \cos \frac{3C}{2}\left[\sin (270° - \frac{3(A+B)}{2} - \cos \frac{3(A-B)}{2}\right] =$$

$$= 2 \cos \frac{3C}{2}\left[\cos \frac{3(A+B)}{2} + \cos \frac{3(A-B)}{2}\right] = -4 \cos \frac{3C}{2} \cos \frac{3A}{2} \cos \frac{3B}{2}.$$

3.31. $1\,000° = 360° \cdot 2 = 280°$; $280° - 360° = -80°$;

$$\sin (-80°) = -\sin 80° = -\cos 10°.$$

$$\sin 1\,000° = 0{,}98481; \quad \cos 1\,000° = \cos 80° = \sin 10° =$$

$$= 0{,}17365; \quad \operatorname{tg} x_1 = -\operatorname{tg} 80° = -\operatorname{ctg} 10° = -5{,}67128;$$

$$1\,978° = 5 \cdot 360° + 178°, \text{ deci}$$

$$\sin x_2 = \sin 178° = \sin (180° - 178°) = \sin 2° = 0{,}03490.$$

$$\cos x_2 = \cos (180° - 178°) = -\cos 2° = -0{,}99985.$$

$$\operatorname{tg} x_2 = \operatorname{tg} 178° = -\operatorname{tg} 2° = 0{,}03492; \quad 2\,000° = 360 \cdot 5 + 200°.$$

$$\sin x_3 = \sin (-200)° = \sin [180° - (-200°)] = \sin 20° = 0{,}36397.$$

$$\cos x_3 = \cos (360° - 200°) = \cos 160° = -\cos 20° = -0{,}93969,$$

$$\operatorname{tg} x_3 = -\operatorname{tg} 20° = -0{,}36397.$$

3.32. Avem $\sin 947°33'20'' = \sin 227°33'20'' = \sin 47°33'20'' =$

$$= -\cos 42°26'40'' = 0{,}7364.$$

3.33. $\|AB\| = \|A_1C_1\|$; $\|AB\|(\|AC\| + \|A_1B_1\|) = 4\,|AB|^2$;

$$\Rightarrow \|AB\| + \|A_1B_1\| = 4\|AB\| = 4\|A_1C_1\| \text{ sau}$$

$$\frac{\|AC\|}{\|AB\|} + \frac{\|A_1B_1\|}{\|A_1C_1\|} = 4 \Rightarrow \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C_1 = 4, \text{ dar } \operatorname{tg} C_1 = \operatorname{ctg} B,$$

$$\operatorname{tg} B + \frac{1}{\operatorname{tg} B} = 4 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 B - 4 \operatorname{tg} B + 1 = 0, \quad \operatorname{tg} B = 2 \pm \sqrt{3},$$

de unde rezultă $B = 75°$, $C = 15°$, $A = 90°$.

3.34. Avem $\|CC_1\| = a \operatorname{tg} \alpha$ și $\|AA_1\| = a \operatorname{tg} 3\alpha$. Rezultă că

$$\frac{\|AA_1\|}{\|CC_1\|} = \frac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha (1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \frac{3 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Pentru $\alpha = \pi/12$ avem $\dfrac{\|AA_1\|}{\|CC_1\|} = \dfrac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}} = \dfrac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}} = \dfrac{1}{2 - \sqrt{3}} = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{1}$.

3.35. Avem relațiile

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 = \ldots = n_m \sin i_m \text{ sau}$$

$$n_1 \sin i_1 = n_m \sin i_m, \text{ deci } \sin i_m = \frac{n_i \sin i_1}{n}.$$

3.36. Avem: $\operatorname{tg}^2 \dfrac{B}{2} = \dfrac{1 - \cos B}{1 + \cos B} = \dfrac{1 - c/a}{1 + c/a} = \dfrac{a - c}{a + c}$.

$$\operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} = \frac{1 - \cos C}{1 + \cos C} = \frac{1 - b/a}{1 + b/a} = \frac{a - b}{a + b}.$$

3.37. Notăm $\sphericalangle DAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = B$, $\sphericalangle ADC = \beta$, $\sphericalangle ADC = m$, $\|AB\| = c$, $\|AC\| = b$, $\|BC\| = a$. Avem

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\|CD\|}{c} \text{ dar } \|CD\| = \frac{a}{\cos B} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha \; \frac{a}{\|AC\| \cdot \cos B} = \frac{1}{\sin B \cdot \cos B} =$$

$$= 2 \sin B, \quad \text{sau } \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sin 2B}.$$

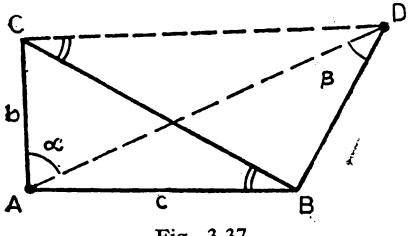

Fig. 3.37.

$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} (\widehat{CDB} - m)$. Avem

$$\frac{\operatorname{tg}^3 (90° - B)}{1 + 2\operatorname{tg}^2 (90° - B)} = \frac{\operatorname{ctg}^2 B}{1 + 2 \operatorname{ctg}^2 B} =$$

$$= \frac{c^3/b^3}{1 + 2(c^3/b^3)} = \frac{c^3}{b(b^2 + 2c^2)}.$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}(CDB) - \operatorname{tg} m}{1 + \operatorname{tg}(CDB)\operatorname{tg} m} = \frac{a^2c - b^2c}{b(a^2 + c^2)} = \frac{c(a^2 - b^2)}{b(b^2 + c^2 + c^2)} = \frac{c^3}{b(b^2 + 2c^2)}.$$

3.38. Relația o scriem: $\sin B + \sin(\pi/2 - B) = \sin C + \sin(\pi/2 - C)$.

$$\text{sau } 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(B - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(C - \frac{\pi}{4}\right);$$

$\cos(B - \pi/4 = \cos(C - \pi/4)$; și de aici sau $B - \pi/4 = C - \pi/4 \Rightarrow B = C$ și triunghiul este isoscel, sau $B - \pi/4 = -(C - \pi/4) \Rightarrow B + C = \pi/2$ și triunghiul este dreptunghic, cu unghiul drept în A.

3.39. Avem $a = \|BA_1\| + \|A_1C\| = \|HA_1\|(\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)$ de unde

$$\|HA_1\| = \frac{a}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} = \frac{a\cos B \cdot \cos C}{\sin(B + C} = \frac{a\cos B \cdot \cos C}{\sin A}.$$

3.40. Triunghiul BAM este isoscel, $|AD|$ fiind înălțimea dusă pe $|BM|$ Notăm $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAM = \sphericalangle MAC = x$; iar $\|BD\| = \|DM\| = a$ și $\|MC\| = 2a$. Avem $\|AD\| = a\operatorname{ctg} x$; $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{3a}{\|AD\|} = \dfrac{3a}{a\operatorname{ctg} x} = \dfrac{3}{\operatorname{ctg} x}$.

Deci $\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{ctg} x = 3$ sau $\operatorname{tg} 2x = 3\operatorname{tg} x$. Deci $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 3\operatorname{tg} x$, de unde $\operatorname{tg} x = 0$ care nu convine și $2 = 3 - 3\operatorname{tg}^2 x$ adică $\operatorname{tg}^2 x = 1/3$; $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}/3$ și convine $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}/3$ adică $x = 30°$. Deci $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle B = 90° - 30° = 60°$ și $\sphericalangle C = 30°$.

3.41. Avem $x = R\cos A$, $y = R\cos B$ și $z = R\cos C$. Relația devine $8RS\,\Sigma\cos A \leqslant 3abc$ dar $abc = 4RS$ deci rămîne de arătat că $\Sigma\cos A \leqslant 3/2$. Folosim relațiile:

$$\cos A + \cos 60° = 2\cos(A/2 + 30°)\cos(A/2 - 30°) \leqslant 2\cos(A/2 + 30°);$$

$$\cos B + \cos C = 2\cos\frac{B + C}{2}\cos\frac{B - C}{2} \leqslant 2\cos\frac{B + C}{2}. \text{ Deci}$$

$$\cos 60° + \Sigma\cos A \leqslant 2\cos\left(\frac{A}{2} + 30°\right) + 2\cos\frac{B + C}{2} = 4\cos\left(\frac{A}{4} + \frac{B}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{C}{4} + 15°\right)\cos\left(\frac{A}{4} + 15° - \frac{B}{4} - \frac{C}{4}\right) \leqslant 4\cos\frac{A + B + C + 60°}{4}$$

$$= 4\cos\frac{180° + 60°}{4} = 2.$$

Rezultă $\Sigma\cos A \leqslant 2 - \cos 60° = 2 - 1/2 - 3/2$. Egalitatea are loc cînd $A = B = C = 60°$.

3.42. Avem $5x = \operatorname{arctg}(-1/\sqrt{3}) + k\pi = 2\pi/3 + k\pi$, de unde $x = 2\pi/15 + k\pi/5$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$x_1 = \frac{2\pi}{15}, \quad x_2 = \frac{2\pi}{15} + \frac{\pi}{5} = \frac{5\pi}{15} = \frac{\pi}{3}; \quad x_3 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{5} = \frac{8\pi}{15};$$

$$x_4 = \frac{8\pi}{15} + \frac{\pi}{5} = \frac{11\pi}{15}, \quad x_5 = \frac{11\pi}{15} + \frac{\pi}{5} = \frac{14\pi}{15}.$$

În grade sexagesimale în intervalul $(0°, 180°)$ avem

$$x \in \{24°, 60°, 96°, 132°, 168°\}.$$

3.43. Ecuația dată se mai scrie $\cos^3 2x - 4\cos 2x = 0$ sau $\cos 2x(\cos 2x + 2)(\cos 2x - 2) = 0$. Ținînd seama că parantezele: $\cos 2x + 2 \neq 0$ și $\cos 2x - 2 \neq 0$ rămîne $\cos 2x = 0$ de unde $x = \frac{(2k+1)\pi}{4} = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.44. Avem $1 - \cos^2 5x = -\sin 5x \geqslant 0$, deci $\sin 5x \leqslant 0$.

$$180° + 360°k \leqslant 5x \leqslant 360°k + 360°, \quad k \in \mathbf{Z}, \text{ sau}$$

$$36° + 72°k \leqslant x \leqslant 72°k + 72°, \text{ deci}$$

$$x \in [36°, 72°] \cup [108°, 144°] \cup [180°, 216°] \cup [252°, 288°] \cup 324°, 360°].$$

3.45. Ecuația se mai scrie $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$ cu rădăcina acceptabilă dată de $\cos x = 1$, $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.46. $\sin(2x + 30°) = \sin(360° - 90°)$ sau $x = 180°k - 60°$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.47. Avem $\operatorname{tg} x + |\operatorname{tg} x| = 0$ deci $\operatorname{tg} x \leqslant 0$ sau $x \in (\pi/2 + k\pi, (k+1)\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.48. Avem $\operatorname{tg} x - |\operatorname{tg} x| = 0$, deci $\operatorname{tg} x \geqslant 0$ de unde $k\pi \leqslant x < \pi/2 + k\pi$ și $\pi + k\pi < x < 3\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.49. Relația se mai scrie

$|\sin 5x| + \operatorname{tg} 5x |\cos 5x| = |\sin 5x| + \frac{\sin 5x}{\cos 5x} |\cos 5x| = 0$, care este verificată numai dacă $\operatorname{tg} 5x \leqslant 0$, sau $180°k \leqslant 5x < 180°k + 90°$ sau $36°k \leqslant x < 36°k + 18°$, $k \in \mathbf{Z}$. Rezultă

$$x \in [0°, 18°] \cup [36°, 54°) \cup [72°, 90°) \cup [154°, 172°).$$

3.50. Deoarece $\sqrt{\sec^2 x - 1} \geqslant 0$, rezultă $\operatorname{tg} 6x \leqslant 0$, de unde $90° + 180°k < 6x \leqslant 180° + 360°k$, $k \in \mathbf{Z}$ sau $15° + 30°k < x \leqslant 30° + 30°k$, $k \in \mathbf{Z}$. Rezultă $x \cup (15°, 30°] \cup (45°, 60°] \cup (75°, 90°] \cup (105°, 120°] \cup (135°, 150°] \cup \cup (165°, 180°] \cup (195°, 210°] \cup (225°, 240°] \cup (255°, 270°] \cup (285°, 300°] \cup \cup (315°, 330°] \cup (345°, 360°]$, adică sînt 12 intervale din $(0°, 360°]$.

3.51. Este necesar ca $\sin(x/2)$ să fie negativ, deoarece $\sqrt{1-\cos^2(x/2)}$ este pozitiv, deci $180° + 360°k < x/2 \leqslant 360° + 360°k$ sau $360° + 720°k \leqslant x \leqslant 720° + 720°k$. Se constată că $x \geqslant 360°$, deci nici o valoare din intervalul $(0°, 360°)$ nu satisface relația dată.

3.52. Folosim proprietățile proporțiilor derivate:

$$\frac{2\sqrt{a+\sin x}}{2\sqrt{a-\sin x}} = \frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right), \text{ deci } \frac{a+\sin x}{a-\sin x} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right);$$

Avem de asemenea $\frac{-2\sin x}{2a} = \frac{1-\operatorname{tg}^2(\pi/2 - x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\pi/4 + x/2)} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ sau $\sin x = a\sin x \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \sin x = \sin x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ sau $\sin x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi$, deoarece $x \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Observație. Arătăm direct că pentru $a = 1$ avem o identitate amplificînd cu conjugata numitorului de unde se obține $\frac{1-\cos x}{\sin x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Pentru $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, verificarea este evidentă.

3.53. Facem substituția $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$;

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Avem $(m-3)\frac{2t}{1+t^2} - 4\frac{1-t^2}{1+t^2} = m-5$ sau $(m-9)t^2 - 2(m-3)t + m - 1 = 0$.

Dacă $m = 9$ avem $t = 2/3$, deci $x = 2\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Dacă $m \neq 9$ avem $t = \frac{m-3 \pm 2\sqrt{m}}{m-9}$ și rezultă: pentru $m > 0$ obținem $x = 2\operatorname{arctg}\frac{m-3\pm 2\sqrt{m}}{m-9} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ecuația mai are și soluția $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ dacă $4 = m - 5$, adică pentru $m = 9$.

3.54. Avem sistemul $1 + 2\sin 2x \geqslant 0$; $1 - 2\cos 3x \geqslant 0$ sau $\sin 2x \geqslant -1/2$; $\cos 3x \geqslant 1/2$.

$\sin 2x > -1/2$ ne dă $x_1 \in (180°k - 105°;\ 180°k - 15°)$ iar

$\cos 3x > 1/2$ ne dă $x_2 \in (120°k - 20°;\ 120°k + 20°)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Rezultă: $x \in x_1 \cap x_2$ deci $x \in (0°, 20°) \cup (220°, 260°) \cup (345°, 360°)$.

3.55. Avem $x_2^2 + x_2^2 = \cos^2 a + \sin^2 a = 1$ și $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = m^2 - (m-2)^2 = 1$ deci $m = 5/4$. Mai observăm că rădăcina $x_1 = \cos\alpha$ și $x_2 = \sin\alpha$, unde $m = 5/4$ deoarece $x_1^2 + x_2^2 = m^2 - (m-2)^2 = 1 \Rightarrow m = 5/4$.

Pentru $m = 5/4$ ecuația $2x^2 + 2xm + (m-2)^2 = 0$ devine $2x^2 + \frac{10}{4}x + \frac{9}{16} = 0$ sau $32x^2 + 40x + 9 = 0$ cu rădăcinile

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{8} \in (-1, 1) \Rightarrow a \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right).$$

Ecuația $2x^2 - 2mx + (m-2)^2 = 0$ pentru $m = \frac{5}{4}$ devine $2x^2 - \frac{10}{4}x + \frac{9}{16} = 0$ sau $32x^2 - 40x + 9 = 0$ cu rădăcinile $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{8} \in (0, 1) \Rightarrow \alpha \in (0, \pi/2)$.

3.56. Aducem la același numitor și obținem

$$\sqrt{\frac{r}{1+\cos a} + \frac{r}{1-\cos a}} = \sqrt{\frac{2r}{1-\cos^2 a}} = \frac{\sqrt{2r}}{|\sin a|}.$$

3.57. Prima inegalitate se mai poate scrie $-|\sin a| \cdot |\sin b| \cdot |\sin c| \leqslant (1 - |\sin a|)(1 - |\sin b|)(1 - |\sin c|)$ care se verifică întrucît $-|\sin a| \cdot |\sin b| \cdot |\sin c| \leqslant 0$ și $(1 - |\sin a|)(1 - |\sin b|)(1 - |\sin c|) \geqslant 0$ oricare ar fi a, b, c.

A doua inegalitate se mai scrie $|\sin a| + |\sin b| \cdot |\sin c| \leqslant 1 + |\sin b| + |\sin c|$ care se verifică întrucît $|\sin a| \leqslant 1$, $|\sin c| \geqslant 0$ și $|\sin b|\,|\sin c| \leqslant |\sin b|$ întrucît $|\sin c| \leqslant 1$.

A treia inegalitate se mai scrie $(1 - |\sin b|)(1 - |\sin c|) \geqslant 0$ care se verifică deoarece $1 - |\sin b| > 0$, $1 - |\sin c| \geqslant 0$.

3.58. Perioadele funcțiilor tg x și ctg x sînt π, deci ecuația dată se mai scrie $\operatorname{tg} 3x + \operatorname{ctg}(-2x) = 0$ sau $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{ctg} 2x$ de unde $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}(\pi/2 - 2x)$.

Rezultă $3x = \pi/2 - 2x + k\pi$ sau $5x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ deci $x = \pi/10 + k\pi/5$, $k \in \mathbf{Z}$. Soluțiile reprezentative, adică stricte în intervalul $(0, 2\pi)$, sînt

$$x = \left\{\frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, \frac{13\pi}{10}, \frac{3\pi}{2}, \frac{17\pi}{10}, \frac{19\pi}{10}\right\}$$

adică situate în vîrfurile unui decagon regulat înscris în cercul trigonometric.

3.59. Dacă am avea $\cos 4x = 0$, atunci $\sin 4x \neq 0$, iar suma lor nu este deci zero, prin urmare $\cos 4x \neq 0$. Împărțim cu $\cos 4x$ obținem ecuația $\operatorname{tg} 4x + 1 = 0$, deci $\operatorname{tg} 4x = -1 = \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$. Rezultă $4x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ deci $x = \frac{3\pi}{16} + k\frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$. Soluțiile cuprinse în intervalul $(0, 2\pi)$ sînt: $x_1 = 3\pi/16$, $x_2 = 7\pi/16$, $x_3 = 11\pi/16$, $x_4 = 15\pi/16$; $x_5 = 19\pi/16$, $x_6 = 23\pi/16$, $x_7 = 27\pi/16$ și $x_8 = 31\pi/16$ care sînt așezate în vîrfurile unui octogon regulat înscris în cercul trigonometric.

3.60. 1) Dacă $x > 0$, atunci $\frac{x}{|x|} = 1$, $\frac{|x|}{x} = 1$; $\frac{|-x|}{x} = 1$, iar dacă $x < 0$, atunci $\frac{x}{|x|} = -1$; $\frac{|x|}{x} = -1$, $\frac{|-x|}{x} = -1$.

2) Dacă $x \in (0, \pi]$, atunci $\frac{|\sin x|}{x} = \frac{\sin x}{x}$; $\frac{\sin x}{|x|} = \frac{\sin x}{x}$. Dacă $x \in (-\pi, 0) \Rightarrow \frac{|\sin x|}{x} = \frac{-\sin x}{x}$; $\frac{\sin x}{|x|} = \frac{\sin x}{-x}$.

3.61. Folosim relația $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. Avem $2\sin^2 x + \sin x - 1 > 0$ de unde $\sin x_1 = -1$ și $\sin x_2 = 1/2$. Inegalitatea are loc dacă $\sin x - 1 > 0$ de unde $\sin x_1 = -1$ și $\sin x_2 = 1/2$ Inegalitatea are loc dacă $\sin x \in (1/2, 1)$ de unde $x \in (30°, 150°)$.

3.62. În ipoteza că $x \neq k\pi$ și $y \neq k\pi$ relația devine $\cos x(1 - \cos^2 y) - \cos y(1 - \cos^2 x) = 0$ sau $(\cos x - \cos y)(1 + \cos x \cos y) = 0$.

Obținem singura soluție acceptabilă $\cos x - \cos y = 0$, adică $x + y = k_1\pi$, unde $x \neq k_2\pi$, $y_2 \neq k_3\pi$; $k_1, k_2, k_3 \in \mathbf{Z}$.

3.63. Notăm $5x = y$ și în acest caz $y \in (0°, 1800°)$. Relația dată se ma scrie $\sin 2y + 2\sin y|\cos y| = 0$ sau $\sin 2y = -2\sin y|\cos y|$ dar $\sin 2y = 2\sin y \cos y$ deci se impune $\cos y < 0$, adică y este în cadranul II și III. Prin urmare $y \in [90°, 270°] \cup [450°, 630°] \cup [810°, 990°] \cup [1170°, 1350°] \cup \cup [1530°, 1710°]$; $x = y/5$. Deci $x \in [18°, 54°] \cup [90°, 126°] \cup [162°, 198°] \cup \cup [234°, 270°] \cup 306°, 360°]$.

3.64. Inegalitatea dată se mai scrie:

$$2\sin\frac{3x+3y}{2}\cos\frac{3x-3y}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{3x+3y}{2} - \frac{3}{2} \leqslant 0.$$

Notăm $\sin\frac{3x+3y}{2} = m$, și obținem $4m^2 - 4m\cos\frac{3x-3y}{2} + 1 \geqslant 0$ cu discriminantul $\Delta_m = 4\left(\cos^2\frac{3x-3y}{2} - 1\right) \leqslant 0$. Inegalitatea este satisfăcută pentru orice m real, deci $\Delta = 0$ sau

$$\cos^2\frac{3x-3y}{2} = 1; \quad \frac{3x-3y}{2} = 180k,$$

$$3(x-y) = 360k; \quad x - y = 120k_1 \ (k_1 \text{ întreg}).$$

Inegalitatea propusă devine $4m^2 - 4m + 1 \geqslant 0$ sau $(2m-1)^2 \geqslant 0$. Semnul egal este valabil cînd $m = 1/2$ adică $\sin\frac{3x+3y}{2} = \frac{1}{2}$, de unde $\frac{3x+3y}{2} = 360°k + 90° \pm 60°$, sau $x + y = 240°k + 60° \pm 40°$, însă $x - y = 120°k$; $x = 120°k_2 + 60°k_1 + 30° + 20°$ și $y = x - 120°k_1 = 120°k_2 - 60k_1 + 30 \pm 20°$. În cazul $x = y$, $k_1 = 0$ și obținem $x = y = 120k + 30x \pm 20$: $x = y = 10°, 50°, 130°, 170°, 250°, 290°$.

3.65. Inegalitatea dată se mai scrie $\sin 2x - \sin x > 0$ sau $2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} > 0$.

Să aflăm variația semnului pentru $\sin \frac{3x}{2}$ și pentru $\cos \frac{x}{2}$. Dacă $\sin \frac{3x}{2} = 0$, atunci $\frac{3x}{2} = 180°k$, $k \in \mathbf{Z}$ sau $x = \frac{360°k}{3} = 120°k$, deci în intervalul $(0°, 480°)$ se anulează $\sin \frac{3x}{2}$ pentru $x = 0°, 120°, 240°, 360°, 480°$. Rezultă că $\sin \frac{3x}{2} > 0$ pentru $x \in (0°, 120°) \cup (240°, 360°)$ și $\sin \frac{3x}{2} < 0$ pentru $x \in (120°, 240°) \cup (360°, 480°)$. Pentru $\cos \frac{x}{2} = 0$ avem $\frac{x}{2} = 180°k$ sau $x = 360°k + 180°$, deci $\cos \frac{x}{2}$ se anulează pentru $x = 180°$ și $x = 540°$, iar în intervalul $(90°, 270°)$ $\cos x < 0$ deci în intervalul $(180°, 540°)$ $\cos \frac{x}{2}$ este negativ. Prin urmare ca produsul $\sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}$ să fie pozitiv știind că semnul lui $\cos \frac{x}{2}$ este negativ trebuie să avem și $\sin \frac{3x}{2} < 0$ adică inegalitatea din enunț pe intervalul $(0°, 480°)$ are loc pentru $x \in (120°, 240°) \cup (360°, 480°)$.

3.66. Inegalitatea se mai scrie $4 \cdot \frac{\sin^4 x + 1}{\sin^2 x} \cdot \frac{\cos^4 x + 1}{\cos^2 x} \geqslant 25$ sau

$4(\sin^4 x \cos^4 x + \sin^4 x + \cos^4 x + 1) > 25 \sin^2 x \cos^2 x$ de unde $4\left(\frac{1}{16} \sin^4 2x + 2 - \frac{1}{2} \sin^2 2x\right) \geqslant \frac{25}{4} \sin^2 2x$ sau $\sin^4 2x - 33 \sin^2 2x + 32 \geqslant 0$. Notăm $\sin^2 2x = y \in (0, 1]$.

$$y^2 - 33y + 32 \geqslant 0 \Rightarrow y \in (-\infty, 1] \cup [32, +\infty), \text{ dar pentru}$$

$y \in (0, 1)$ este deci satisfăcută inegalitatea. Semnul egal are loc pentru $\sin^2 2x = 1$, adică $\sin x = \cos x = \pm \sqrt{2}/2$ sau $x = k\pi/2 \pm \pi/4$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.67. $3x - 1 = (-1)^k \arcsin \frac{1}{5} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(-1)^k \arcsin \frac{1}{5} + \frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

3.68. Avem $\frac{2 \sin 3x \cos 3x}{\cos 6x} - 2 \cos 3x = 0 \Rightarrow \cos 3x = 0 \Rightarrow x_1 =$

$= k\pi/3 + \pi/6$, dar $6x \neq \pi/2 + k\pi$ adică $x_0 \neq \pi/12 + k\pi/6$, $k \in \mathbf{Z}$. (1)

Mai avem $\sin 3x - \cos 6x = 0$ sau $2\sin^2 3x + \sin 3x - 1 = 0$,

$\sin 3x = -1$, $3x = 2k\pi + 3\pi/2 \Rightarrow x_2 = 2k\pi/3 + \pi/2$.

$\sin 3x = 1/2$, $3x = 2k\pi + \pi/6 \Rightarrow x_3 = 2k\pi/3 + \pi/18$, sau

$x_1 = 30° + 60°k$, $x_2 = 90° + 120°k$, $x_3 = 10° + 120°k$,

$x_4 = 50° + 120°k$ și $x_0 \neq 15° + 30°k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Rezultă $x \in \{10°, 30°, 50°, 90°, 130°, 150°, 170°, 210°, 250°, 270°, 290°, 330°\}$ adică 12 valori distincte.

3.69. Avem $x^2 - 1 = 2k\pi \pm \pi/3$, $k \in \mathbf{Z}$.

$x^2 = 1 + 2k\pi \pm \pi/3 > 0$, $x = \pm\sqrt{1 + 2k\pi \pm \pi/3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.70. Ecuația se mai scrie $\operatorname{tg} 2x = 1$, $\cos 2x \neq 0$,

$2x = k\pi + \pi/4$, unde $\cos 2x \neq 0 \Rightarrow x = k\pi/2 + \pi/8$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.71. Avem $3\sin 2x - 4\sin^3 2x = 2\cos 4x + 1$ sau

$3\sin 2x - 4\sin^3 2x = 2(1 - 2\sin^2 2x) + 1$;

$4\sin^3 2x - 4\sin^2 2x - 3\sin 2x + 3 = 0$;

$4\sin^2 2x(\text{son } 2x - 1) - 3(\sin 2x - 1) = 0$, deci

$\sin 2x = 1 \Rightarrow x = k\pi + \pi/4$.

$4\sin^2 2x = 3 \Rightarrow \sin 2x = \pm\sqrt{3/2} \rightarrow 2x = k\pi + \pi/3$, $k \in \mathbf{Z}$.

$x = k\pi/2 \pm \pi/6$, $k \in \mathbf{Z}$.

În intervalul $(0°, 360°)$ obținem $x \in \{0°, 30°, 45°, 60°, 120°, 150°, 210°, 225°, 240°, 300°, 330°\}$.

3.72. Ecuația se mai scrie $1 - \sin^2 x = \sin x$ sau $\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$. Rezultă $\sin x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}6180 \approx \sin 38°10'$, deci $x_1 = 38°10' + 360°k$, $k \in \mathbf{Z}$, $\sin x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} = -1{,}618$ nu convine fiind în afara intervalului $[-1, 1]$.

3.73. Ecuația se mai scrie $\sin 3x = -\cos(x + 3\pi/2)$ sau $\sin 3x = \cos(x + \pi/2)$, de unde $\sin 3x = \sin(-x) = -\sin x$.

Rezultă $3x = -x + 2k\pi \Rightarrow x_1 = k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$ sau $3x = (2k+1)\pi + x \Rightarrow x_2 = k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$.

Se observă că x_2 este cuprins în x_1 deci soluția generală este $x = k\pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.74. Avem $(4\cos x - \sqrt{7})(4\cos x + \sqrt{7}) = 0$.

Pentru $4\cos x - \sqrt{7} = 0$ avem $\cos x = \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{2{,}6458}{4} = 0{,}66145$

$4\cos x + \sqrt{7} = 0$, avem $\cos x = -\sqrt{7}/4 = -0{,}66145$.

$\cos 48° = 0{,}66913$ $\qquad \Delta = 0{,}01307$

$\cos x = 0{,}66145$ $\qquad \Delta' = 0{,}00768$ pentru Δx

$\cos 49° = 0{,}65606$

$$\frac{\Delta x}{60°} = \frac{768}{1307} \Rightarrow \Delta x \approx 35'15'' \text{ deci } x_1 = 48°35'15'';$$

$x_2 = 360° - 48°35'15'' = 311°24'45''$, iar pentru $\cos x = -\sqrt{7}/4$ rezultă $x_3 = 180° - 48°35'15'' = 131°24'45''$ și $x_3 = 180° + 48°35'15'' = 228°35'15''$.

În general, $x_1 = 360°k + 48°35'15''$, $k \in \mathbf{Z}$, $x_2 = 360°k + 311°24'45'$, $x_3 = 360°k + 131°24'45''$ și $x_4 = 360°k + 228°35'15''$, $k \in \mathbf{Z}$.

Prescurtat mai putem scrie $x = 180°k + 48°35'15''$, $k \in \mathbf{Z}$ care cuprinde toate soluțiile problemei.

3.75. Din $x^2 - x + 1 - \cos x = 0 \Rightarrow \sqrt{1 - 4 + 4\cos x} \in \mathbf{R}$, de unde $\cos x = x^2 - x + 1 > 3/4$.

Deci ca să avem soluții trebuie ca $3/4 \leqslant x^2 - x + 1 \leqslant 1$, adică $x \in [0, 1]$.

Graficele funcțiilor $f(x) = \cos x$ și $g(x) = x^2 - x + 1$ se intersectează în două puncte: $A(0, 1)$ deci o soluție $x_1 = 0$ și un alt punct $B(a, b)$ care dă a doua soluție $x_2 = a$.

3.76. Considerăm funcțiile: $g(x) = 2\cos \pi x$ și $g(x) = 6x - 1$. Graficele acestor două funcții se intersectează într-un singur punct cu abscisa x în intervalul $(0, \pi/2)$. Pentru $x = 1/3$ avem $2\cos \frac{\pi}{3} - \frac{6}{3} + 1 = 0$, deci se verifică.

3.77. Ecuația se mai scrie $-2\cos^2 x + 3\cos x - m = 0$ sau $2\cos^2 x - 3\cos x + m = 0$. Fie

$$-1 \leqslant \frac{3 - \sqrt{9 - 8m}}{4} \text{ și } \frac{3 + \sqrt{9 - 8m}}{4} \leqslant 1, \Delta = 9 - 8m \geqslant 0, \; m \leqslant 9/8, \qquad (1)$$

$$-4 \leqslant 3 - \sqrt{9 - 8m}, \; 7 \geqslant \sqrt{9 - 8m}; \; 49 \geqslant 9 - 8m; \; 40 \geqslant -8m, \; m \geqslant -5, \qquad (2)$$

$$3 + \sqrt{9 - 8m} \leqslant 4; \sqrt{9 - 8m} \leqslant 1; \; 9 - 8m \leqslant 1; \; 8 \leqslant 8m; \; m \geqslant 1 \qquad (3)$$

Intersectînd condițiile date de (1), (2) și (3) constatăm că ecuația are ambele rădăcini cuprinse între -1 și $+1$ dacă $m \in [1, 9/8]$; $x_1 = x_2$ dacă $m = 9/8$. Să presupunem: $-1 \leqslant \cos x_1 < 1$, atunci pe lîngă (1) și (2) mai trebuie $\frac{3 - \sqrt{9 - 8m}}{4} \leqslant 1$, sau $-\sqrt{9 - 8m} \leqslant 1$ care este cuprinsă în (1) și

(2). Rezultă că $x_1 = \arccos \frac{3 - \sqrt{9 - 8m}}{4}$ este singura rădăcină admisă dacă $m \in [-5, 1)$. Rădăcina $x_2 = \arccos \frac{3 + \sqrt{9 - 8m}}{4}$ nu poate fi singura rădăcină admisă pentru nici o valoare a lui m. Rădăcina dublă este $x = \arccos \frac{3}{4}$.

3.78. Avem $\operatorname{tg}(x^2 - x) = \operatorname{tg} 6$ deci $x^2 - x = 6 + k\pi$ sau $x^2 - x - (6 + k\pi) = 0$ Rezultă $x = \frac{1 \pm \sqrt{25 - 4k\pi}}{2}$ cu condiția $25 - 4k\pi \geqslant 0 \Rightarrow k \geqslant -1$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.79. Împărțim cu $\cos^2 x = 0$ și obținem $\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$, $\operatorname{tg} x_1 = 1$, $x_1 = 180°k + 45°$, $k \in \mathbf{Z}$ și $\operatorname{tg} x_2 = -3$; $x_2 = 180°k - 71°30'$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.80. Avem $\cos x \neq 0$. Ecuația se mai scrie $2 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x + 1 = 0$ de unde $\operatorname{tg} x_1 = -1$ și $\operatorname{tg} x_2 = -1/2$ deci $x_1 = k\pi - \pi/4$ și $x_2 = k\pi - \operatorname{arctg} 1/2$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.81. În ipoteza $\cos x \neq 0$ ecuația se mai scrie $3 \operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x + 1 = 0$, de unde $\operatorname{tg} x_1 = -1$ deci $x_1 = k\pi - \pi/4$, $k \in \mathbf{Z}$, și $\operatorname{tg} x_2 = -1/3$ deci $x_2 = \operatorname{arctg}(-1/3) + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.82. Avem $\frac{1 + \cos x + \sin x}{1 + \sin x} = \frac{3 \cos x - \sin x}{\cos x}$, unde $1 + \sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$

$\cos x + \cos^2 x + \sin x \cos x = 3 \cos x - \sin x + 3 \sin x \cos x - \sin^2 x$.

$1 + \sin x - 2 \cos x - 2 \sin x \cos x = 0$.

$1 + \sin x - 2 \cos x (1 + \sin x) = 0$, sau

$(1 + \sin x)(1 - 2 \cos x) = 0$, dar $1 + \sin x \neq 0$, deci avem

$\cos x = 1/2$; $x = 2k\pi \pm \pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.83. Ținînd seama că $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ avem

$(\sec^4 x - \operatorname{tg}^4 x) = (\sec^2 x + \operatorname{tg}^2 x)(\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x) = 1 + 2 \operatorname{tg}^2 x$.

Rezultă $\operatorname{tg}^2 x = 3$ sau $\operatorname{tg} x = \pm \sqrt{3}$ de unde $x = k\pi + \operatorname{arctg} \sqrt{3}$.

3.84. Ecuația se mai scrie $8 \cos x = 1 - 4(1 - \cos^2 x)$ sau $4 \cos^2 x - 8 \cos x - 3 = 0$, $\cos x = \frac{4 \pm 2}{4}$; numai $\cos x = \frac{1}{2}$, deci $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.85. Ecuația dată conduce la ecuațiile $\sin x^2 = 1$ și $\sin x^2 = -1$ adică $\sin^2 x^2 = 1$ de unde $x^2 = k\pi = \pi/2$ deci $x = \pm \sqrt{2(2k + 1)\pi}$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.86. Deoarece $2\cos \pi x \in [-2, 2]$ rezultă $6x - 1 \in [-2, 2]$ sau $x \in [-1/6, 1/2]$, deci $\pi x \in [-\pi/6, \pi/2]$ sau $\cos \pi x \in [0, 1]$ sau $6x - 1 \in [0, 2] \Rightarrow x \in [1/6, 1/2]$. În intervalul $[1/6, 1/2]$ funcția $f(x) = 6x - 1$ este crescătoare dar funcția $g(x) = 2\cos \pi x$ este descrescătoare. Rezultă că pentru $x < 1/3$ avem $f(x) < f(1/3) = 1$, iar $g(x) > g(1/3) = 1$; de unde $f(x) \leqslant 1 \leqslant g(x)$. Pentru $x > 1/3$ avem $f(x) > 1 > g(x)$.

Deci $x = 1/3$ este singura soluție deoarece $f(x) = g(x) = 1$.

3.87. Ecuația mai poate fi scrisă:

$$2 - 3\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{5\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x}} \quad \text{sau} \quad 2 - 3\operatorname{tg} x = \sqrt{5\operatorname{tg}^2 x - 1}, \quad \cos x \neq 0.$$

Notăm $y = \operatorname{tg} x$. Ecuația devine $2 - 3y = \sqrt{5y^2 - 1}$ cu condițiile de existență a soluțiilor reale: $2 - 3y \geqslant 0$ de unde $y \leqslant 2/3$ și $5y^2 - 1 \geqslant 0$ de unde $y \in (-\infty, -1/\sqrt{5}] \cup [1/\sqrt{5}, \infty)$. Ridicăm la pătrat și obținem: $4y^2 - 12y + 5 = 0$ cu soluțiile $y_1 = 5/2$ (nu convine) și $y_2 = 1/2$ care convine. Rezultă $\operatorname{tg} x = 1/2$ de unde $x = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.88. Ecuația se mai scrie $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) = \operatorname{ctg}(\pi \operatorname{ctg} x)$ sau $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) = \operatorname{tg}(\pi/2 - \pi \operatorname{ctg} x)$ de unde $\pi \operatorname{tg} x = k\pi + \pi/2 - \pi \operatorname{ctg} x$ sau $\operatorname{tg} x + k + 1/2 - \operatorname{ctg} x$, deci $\operatorname{tg} x = k + 1/2 - 1/\operatorname{tg} x$ sau $\operatorname{tg}^2 x - (k + 1/2)\operatorname{tg} x + 1 = 0$. Rezultă $\operatorname{tg} x = \dfrac{2k + 1 \pm \sqrt{(2k+1)^2 - 16}}{4}$.

Condiția ca $\operatorname{tg} x \in \mathbf{R}$ este $(2k + 1)^2 \geqslant 16$ sau $|2k + 1| \geqslant 4$; de aici rezultă pentru k inegalitățile $k \neq 0$, $k \neq \pm 1$, $k \neq -2$, $k \in \mathbf{Z}$, adică avem $k \in \{\pm 3, \pm 4, \pm 5, \ldots\}$.

3.89. Avem $3^x + 3^{-x} = 3^x + 1/3^x \geqslant 2$, iar $2\cos \dfrac{x}{4} \leqslant 2$. Rezultă soluția unică $x = 0$.

3.90. Ecuația $\sin^8 x + \cos^8 x = 1$ are soluția $x = k\pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$ deoarece în acest caz avem $\sin^8 x = 0$, $\cos^8 x = 1$ pentru k par sau $\sin^8 x = 1$ și $\cos^8 x = 0$ pentru k impar.

Pentru $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{k\pi}{2}\right\}_{k \in \mathbf{Z}}$ avem $\sin^8 x + \cos^8 x < \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Ecuația a doua se mai scrie $\cos^8 x = \sin^8 x - 1$; dar $\cos^8 x \leqslant 1$ și $\sin^8 x - 1 \leqslant 0$, $\cos^8 x \geqslant 0$ deci rezultă: $\cos^8 x = \sin^8 x - 1 = 0$, adică $x = \dfrac{(2k + 1)\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.91. Notăm $6x = y \Rightarrow \sin y = -\sqrt{3}/2$; $y = (-1)^k \arcsin(-\sqrt{3}/2) + k + \pi - (-1)^k(-\pi/3) + k\pi = (-1)^{k+1}(\pi/3) + k\pi$, unde $k \in \mathbf{Z}$. Rezultă $x = (-1)^{k+1}(\pi/18 + k\pi/6)$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.92. Ecuația se mai scrie $\operatorname{tg}^2 x + 1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2 + 1 + \operatorname{ctg}^2 x$ sau $\operatorname{tg}^2 x = 1$ de unde $x = k\pi \pm \pi/4$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.93. Notăm $u = -\cos x$ și $v = 1 + \cos x$. Dar $u + v = 1$ și $u^4 + v^4 = 1/8$; $u^4 + v^4 = (u^2 + v^2)^2 - 2u^2v^2 = (1 - 2uv) - 2u^2v^2 = 1 - 4uv + 2u^2v^2$ sau $16u^2v^2 - 32uv + 7 = 0$.

$uv = \dfrac{16 \pm \sqrt{144}}{16} = \dfrac{16 \pm 12}{16}$; avem sistemul $u + v = 1$ și $uv = 7/4$ și sistemul $u + v = 1$ și $uv = 1/4$ cu soluțiile $u = v = 1/2$,
de unde $\cos x = -1/2$, adică

$$x = \pm 2\pi/3 + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

3.94. Ținînd seama că $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, ecuația dată se mai scrie $\operatorname{tg}^2 x + 1 = 4\cos^2 x$ sau $1/\cos^2 x = 4\cos^2 x$ deci $\cos^4 x = 1/2$ sau $\cos x = \pm\sqrt{2}/2$. Rezultă $x = \pi/2 + k\pi/2,\ k \in \mathbf{Z}$.

3.95. Se impune să avem simultan $\sin 2x = 0$ și $\sin 3x = 0$. Ecuația $\sin 2x = 0$ are soluția $x_1 = k_1\pi/2,\ k \in \mathbf{Z}$, $3x_1 = 3k_1\pi/2$; $\sin \dfrac{3k_1\pi}{2} = 0$, numai pentru k_1 par, deci $k_1 = 2k,\ k \in \mathbf{Z}$. În acest caz ecuația este verificată de $x = 2k\pi/2 = k\pi$, unde $k \in \mathbf{Z}$.

3.96. Ecuația se mai scrie $\sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\sin x} - \sin x - \dfrac{7}{4} = 0$.

Notăm $\sin x - \dfrac{1}{\sin x} = t$ de unde $t^2 = \sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x} - 2$. Ecuația din enunț devine $t^3 + 2 = t + 7/4$ sau $(t - 1/2)^2 = 0$, deci $t = 1/2$ sau $\sin x - 1/\sin x = 1/2$, $2\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$, $\sin x = (1 \pm \sqrt{17})/4$ $x = (-1)^{k+1} \arcsin(\sqrt{17} - 1)/4 + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

3.97. Avem $\cos x \neq 0$, Ecuația se mai scrie $2\operatorname{tg} x = 3$, $\operatorname{tg} x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow x =$
$= \operatorname{arctg} \dfrac{3}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

3.98. a) Pentru $0 < x < \pi/2$, avem $0 < \sin x < 1$ și $0 < \cos x < 1$ Deci $0 < \sin^3 x < \sin^2 x$ și $0 < \cos^3 x < \cos^2 x$, de unde, prin adunare:

$$0 < \sin^3 x + \cos^3 x < \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Așadar $\sin^3 x + \cos^3 x \neq 1$.

b) Rezolvăm ecuația pe $[0, 2\pi]$, soluția generală aflîndu-se, apoi, imediat. Distingem următoarele cazuri:

1) $x \in [0, \pi/2]$; ecuația devine $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$ și ea are ca soluții $x = 0$, $x = \pi/2$.

2) $x \in [\pi/2, \pi]$; ecuația devine $\sin^3 x - \cos^3 x = 1$, sau $\sin^3(\pi - x) - \cos^3(\pi - x) = 1$. Făcînd substituția $\pi - x = u$, găsim $u \in [0, \pi/2]$ și $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$ are soluțiile $u = 0$, $u = \pi/2$. Deci $x = \pi$, $x = \pi/2$.

3) $x \in [\pi, 3\pi/2]$; ecuația devine $-\sin^3 x - \cos^3 x = 1$ sau $\sin^3(x - \pi) + \cos^3(x - \pi) = 1$. Făcînd substituția $x - \pi = v$, găsim $xv \in [0, \pi/2]$ și

ecuația $\sin^3 v + \cos^3 v = 1$, are rădăcinile $v = 0$, $v = \pi/2$. Deci $x = \pi$, $x = 3\pi/2$.

4) $x \in [3\pi/2, 2\pi]$; ecuația se scrie $-\sin^3 x + \cos^3 x = 1$ sau $\sin^3(2\pi - x) + \cos^3(2\pi - x) = 1$. Făcînd substituția $2\pi - x = w$ avem $w \in [0, \pi/2]$ și ecuația devine $\sin^3 w + \cos^3 w = 1$; deci conform punctului 1), $w = 0$, $w = \pi/2$, Deci $x = 3\pi/2$, $x = 2\pi$.

Așadar, mulțimea soluțiilor este $\left\{k\,\frac{\pi}{2}\right\}_{k \in \mathbf{Z}}$.

3.99. Soluțiile ecuațiilor $\sin x = 0$, $\cos x = 0$ nu convin astfel că facem ipoteza $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$. Înmulțind ecuația cu $\cos x$ avem:

$$8\cos^2 x = \sqrt{3}\operatorname{ctg} x + 1 \text{ sau } \frac{8}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \sqrt{3}/\operatorname{tg} x + 1 \Rightarrow \operatorname{tg}^3 x + \sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x - 7\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0.$$

care se constată că are rădăcina $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ și împărțind polinomul trigonometric cu $\operatorname{tg} x - \sqrt{3}$, obținem cîtul $\operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1$, care egalat cu zero, dă celelalte rădăcini $\operatorname{tg} x_1 = 2 - \sqrt{3}$ și $\operatorname{tg} x_2 = -2 - \sqrt{3}$.

Din

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \pi/2 \; k\pi, \; k \in \mathbf{Z}. \tag{1}$$

Din $\operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{2(2 - \sqrt{3})}{-6 + 4\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ și deci

$$2x = \frac{\pi}{6} + + k\pi; \; x = \frac{\pi}{12} + k\,\frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Din $\operatorname{tg} x = -2 - \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg}(\pi - x) = 2 + \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} 2(\pi - x) =$

$$= \frac{2(2 + \sqrt{3})}{-6 - 4\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ și deci}$$

$$2(\pi - x) = \frac{5\pi}{6} + k_1\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k_1\,\frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

Dar mai putem scrie

$$x = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{2} + (k_1 + 1)\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12} + (k_1 + 1)\frac{\pi}{2}, \; k_1 \in \mathbf{Z}. \tag{4}$$

care ne arată că soluțiile (3) sînt cuprinse în soluțiile (2). Deci avem soluțiile: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ și $x = \dfrac{\pi}{12} + k\,\dfrac{\pi}{2}$, unde $k \in \mathbf{Z}$.

3.100. Ecuația se mai scrie:

$$-\sin x + \cos 2x + \sin x - \cos x = 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

$\cos x = 1$, și $\cos x = -\dfrac{1}{2}$, deci $x_1 = 360°k$ și $x_2 = 360°k + 180° \pm 60.°$

3.101. Notăm $\operatorname{tg} a = \dfrac{0{,}380}{1{,}733} \Rightarrow a = 12°21'$.

$$\cos \alpha = -\frac{0{,}380 \cos a}{1{,}735} \Rightarrow \alpha = 102°14'.$$

$\cos (x - \alpha) = +102°14' + 360°k$, $x = -89°53'$.

3.102. Avem realizantul $\Delta = \sin^2 x \cos^2 a - \sin^2 a = -\sin^4 a \leqslant 0$, deci inegalitatea este adevărată, semnul egal fiind pentru $a = k\pi$, unde $k \in \mathbf{Z}$.

3.103. Notăm $a = \cos^2 x$, $a = \cos^2 y$, $c = \cos^2 z$; $x, y, z \in (0, \pi/2)$. Prima inegalitate se mai scrie:

$$\sin x + \sin y + \sin z < 1 + \sin x \sin y \sin y \sin z + \sin z \sin x.$$

$$0 < 1 - \sin x - \sin y - \sin z + \sin x \sin y + \sin y \sin z + \sin z \sin x -$$

$$- \sin x \sin y \sin z + \sin x \sin y \sin z, \text{ sau}$$

$0 < (1 - \sin x)(1 - \sin y)(1 - \sin z) + \sin x \sin y \sin z$, evident.

A doua inegalitate se mai scrie $\sin y \sin z > \sin x (\sin y + \sin z - 1)$. Dacă $\sin x + \sin z - 1 \geqslant 0$, atunci produsul este maxim cînd $\sin x = 1$ deci $\sin y + \sin z - 1 > \sin x (\sin y + \sin z - 1)$, dar $(1 - \sin y)(1 - \sin z) > 0$ adică $\sin y \sin z > \sin y + \sin z - 1 > \sin x (\sin y + \sin z - 1)$.

Dacă $\sin y + \sin z - 1 < 0$, atunci inegalitatea este evidentă deoarece $\sin x$, $\sin y$, $\sin z > 0$, şi deci $\sin y \sin z > 0 > \sin x (\sin y + \sin z - 1)$.

A treia inegalitate se mai scrie $1 - \sin y \sin z > \sin x (1 - \sin y - \sin z)$.

Dacă $1 - \sin y - \sin z < 0$, atunci ţinînd seama că $0 < \sin y < 1$, $0 < \sin z < 1$ obţinem $1 - \sin y \sin z > 0 > \sin x (1 - \sin y - \sin z)$.

Dacă $1 - \sin y - \sin z \geqslant 0$, atunci produsul $(1 - \sin y - \sin z) \sin x$ este maxim cînd $\sin x$ este egal cu 1, deci $1 - \sin y - \sin z > \sin x (1 - \sin y - \sin z)$, dar $1 > (1 - \sin y)(1 - \sin z)$ şi deci

$$1 - \sin y \sin z > 1 - \sin y - \sin z > \sin x (1 - \sin y - \sin z).$$

3.104. a) Ecuaţia dată se mai scrie $\cos 3x = \cos 2x$ de unde $x = 2k\pi/5$, $k \in \mathbf{Z}$.

b) Folosim relaţiile $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$; $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$. Rezultă ecuaţia $4 \cos^3 x - 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$, de unde $\cos x = 1$, $x = 2k\pi$ care este cuprins în soluţia $x = 2k\pi/5$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$\cos x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = \cos \frac{2\pi}{5} \text{ căci } \cos \frac{2\pi}{5} > 0; \quad \cos x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} =$$

$$= \cos \frac{4\pi}{5} < 0. \text{ Mai avem: } \cos \frac{\pi}{5} = -\cos \frac{4\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4};$$

$$\cos \frac{3\pi}{5} = -\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}; \quad \sin \frac{\pi}{10} = \cos \frac{4\pi}{10} = \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \text{ şi}$$

$$\sin \frac{3\pi}{10} = \cos \frac{\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

3.105. *Cazul I.* Fiecare cosinus egal cu $+1$.

$$\cos(x+y)=1 \Rightarrow x+y=2k_1\pi,\ \cos(y+z)=1 \Rightarrow y+z=2k_2\pi,$$

$$\cos(z+x)=1 \Rightarrow z+x=2k_3\pi,\ k_1,\ k_2,\ k_3 \in \mathbf{Z},$$

de unde $x=(k_1+k_3-k_2)\pi$, $y=(k_1-k_2+k_3)\pi$ și $z=(k_2+k_3-k_1)\pi$

Cazul II. $\cos(x+y)=1$, $\cos(y+z)=1 \Rightarrow y+z=(2k_2+1)\pi$; $\cos(z+x)=-1 \Rightarrow z+x=(2k_3+1)\pi$ de unde rezultă $x=(k_1-k_2+k_3-1)\pi$; $y=(k_1+k_2-k_3+1)\pi$ și $z=(k_2+k_3-k_1+1)\pi$. Mai pot fi cazurile III și IV cînd numai $\cos(y+z)=1$ și cînd numai $\cos(z+x)=1$, celelalte două egale cu -1. Rezultatele fiind analoage.

3.106. Se raționalizează numitorii fracțiilor cu radicali. Obținem soluțiile $x_1=k\pi+\pi/4$, $x_2=k\pi/2-5\pi/36$ și $x_3=k\pi+\pi/12$, $k\in Z$.

3.107. Avem $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, $\operatorname{tg}\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{3}=\sqrt{3}$.

$\operatorname{tg} x>0$ în cadranul I dacă $x\in(\pi/3,\ \pi/2)$; iar în cadranul III dacă $x\in(4\pi/3,\ 3\pi/2)$. Rezultă

$$x\in(2k\pi+\pi/3,\ 2k\pi+\pi/2)\cup(2k\pi+4\pi/3,\ 2k\pi+3\pi/2),\ k\in\mathbf{Z}.$$

3.108. Studiem pe intervalul $(0,\ 2\pi)$.

$$\cos x=0 \Rightarrow x_1=\pi/2,\ x_2=3\pi/2;\ 2\cos x-1=0,\ x_3=\pi/3,$$

$$x_4=5\pi/3;\ 2\cos^2 x-1=0,\ x_5=\pi/4,\ x_6=3\pi/4;\ x_7=5\pi/4;$$

$$x_8=7\pi/4.$$

Avem:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$f(x)$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$	

Rezultă $x\in\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\{(2k\pi+\pi/4,\ 2k\pi+\pi/3)\cup(2k\pi+\pi/2,\ 2k\pi+3\pi/4)\cup$

$\cup(2k\pi+5\pi/4,\ 2k\pi+3\pi/2)\cup(2k\pi+5\pi/3,\ 2k\pi+7\pi/4)$.

3.109. Inecuația se mai scrie $-\sin^2 x+2(\sqrt{3}-1)\sin x+\sqrt{3}>0$. Notăm $\sin x=y$ deci $-y^2+2(\sqrt{3}-1)y+\sqrt{3}>0$. Rezultă: $2k\pi-\pi/6<x<2k\pi+\pi/6$, $k\in\mathbf{Z}$ sau $2k\pi+2\pi/3<x<2k\pi+7\pi/6$, $k\in\mathbf{Z}$.

3.110. Ridicăm la pătrat și obținem $x+2|\cos 6x|\geqslant 2-2\cos 6x$ sau $|\cos 6x|\geqslant-\cos 6x$.

Inegalitatea are loc dacă $6x$ este în cadranul I și IV.

Egalitatea are loc dacă avem $\cos 6x = 0$ adică $6x = 180°k + 90°$, $k \in \mathbf{Z}$ sau $x = 30°k + 15°$, adică dacă $x = \{15°, 45°, 75°, ..., 315°, 345°\}$. Inegalitatea are loc pentru

$$\begin{cases} 360°k < 6x < 360°k + 90° \text{ și} \\ 360°k + 270° < 6x < 380°(k+1) \text{ sau} \end{cases}$$

$$60°k < x < 60°k + 15° \text{ și } 60°k + 45° < x < 60°(k+1),\ k \in \mathbf{Z}.$$

3.111. $(2/\sqrt{3})^{-2\cos 3x} < 2/\sqrt{3}$ sau $-2\cos 3x < 1$; $\cos 3x > -1/2$, $x \in (-2\pi/3, 2\pi/3)$ sau în general $3x \in (2k\pi - 2\pi/3, 2k\pi + 2\pi/3)$, $k \in \mathbf{Z}$, de unde rezultă $x \in \left(\frac{2k}{3} - \frac{2\pi}{9}, \frac{2k\pi}{3} + \frac{2\pi}{9}\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.112. Avem $-1 \leqslant \cos x < 0 \Rightarrow 2k\pi + \pi/2 < x < 2k\pi + 3\pi/2$, unde $k \in \mathbf{Z}$.

3.113. Deoarece $2 - \cos x > 0$ urmează să avem $1 - \cos x \leqslant 0 \Rightarrow \cos x \geqslant 1/2$, deci $x \in \{-\pi/3 + 2k\pi;\ 2\pi/3 + 2k\pi\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.114. Prima inecuație se mai scrie $(|\sin x| - \sqrt{3}/2)(|\sin x| - \sqrt{2}/2) < 0$ sau $\sqrt{3}/2 > |\sin x| > \sqrt{2}/2$ de unde

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{\left(k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(k\pi + \frac{2\pi}{3}, k\pi + \frac{3\pi}{4}\right)\right\}.$$

A doua inecuație se mai scrie $\cos 2x + \cos 4x > \cos 2x + \cos 12x$ sau $\sin 8x \sin 4x > 0$, de unde rezultă sistemele:

$$1°)\ \begin{cases} \sin 8x > 0 \\ \sin 4x > 0 \end{cases} \text{ de unde } x \in \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{\left(\frac{2k\pi}{4}, \frac{(2k+1)\pi}{4}\right) \cap \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left(\frac{2k\pi}{8}, \frac{(2k+1)\pi}{8}\right)\right\}, \text{ sau}$$

$$2°)\ \begin{cases} \sin 8x < 0 \\ \sin 4x < 0 \end{cases} \text{ de unde } x \in \left(\frac{(4k+1)\pi}{8}, \frac{(4k+2)\pi}{8}\right),\ k \in \mathbf{Z}.$$

3.115. Folosim egalitatea $\operatorname{tg} 15° = 2 - \sqrt{3}$ care se deduce din relația $\operatorname{tg} 15° = \sqrt{\frac{1 - \cos 30°}{1 + \cos 30°}} = 2 - \sqrt{3}$.

Ecuația din enunț se mai scrie $x^3 - 3\operatorname{tg} 15° \cdot x^2 - 3x + \operatorname{tg} 15° = 0$ de unde $\operatorname{tg} 15° + \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$, dar $\operatorname{tg} 15° = \frac{3\operatorname{tg} 5° - \operatorname{tg}^3 5°}{1 - 3\operatorname{tg}^2 5}$ și rezultă $x_1 = \operatorname{tg} 5°$. Mai ținem seama că

$$\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(180°k + 15°) = \frac{3\operatorname{tg}(60°k + 5°) - \operatorname{tg}^3(60°k + 5°)}{1 - 3\operatorname{tg}^2(60°k + 5°)},\ k \in \mathbf{Z}.$$

Pentru $k = 1$ obținem $x_2 = \operatorname{tg} 65° = \operatorname{ctg} 25°$, iar pentru $k = 2$ obținem $x_3 = \operatorname{tg} 125° = -\operatorname{tg} 55° = -\operatorname{ctg} 35°$.

3.116. Avem succesiv $(\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos^2 x)\sin^2 x - (\sin^2 x \cdot 2\cos^2 x - \cos^2 x)\cos^2 x = \frac{1}{2}$, sau $\sin^4 x(1-2\cos^2 x) - \cos^4 x(2\sin^2 x - 1) = 1/2$;

$$-\sin^4 x \cos 2x + \cos^4 x \cos 2x = \cos 2x \cdot \cos 2x \cdot 1 = 1/2.$$

de unde, $\cos^2 2x = 1/2 \Rightarrow \cos 2x = \pm\sqrt{2}/2$; $2x = k\pi \pm \pi/4$, $k \in \mathbf{Z}$ sau $x = k\pi/2 + \pi/8$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.117. a) Ecuația se mai poate scrie $\frac{\operatorname{tg} x - 1}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 2$ de unde $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$; $x = k\pi \pm \pi/3$.

b) $\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = -\frac{1}{2}$.

3.118. Avem $x/2 \in \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} [k\pi - \pi/4, k\pi + \pi/4]$ sau $x \in \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} [2k\pi - \pi/2, 2k\pi + \pi/2]$.

3.119. Notînd $3^{\cos 3x} = u$ și $4^{\cos 3x} = v$, ecuația devine

$$6u^2 + 4uv + 2\sqrt{3}uv + 4\sqrt{3}v^2 = 12uv + 5\sqrt{3}uv.$$

Ordonînd termenii și împărțind prin $v^2 (v \neq 0)$ rezultă:

$$6\left(\frac{u}{v}\right)^2 - (8 + 3\sqrt{3})\frac{u}{v} + 4\sqrt{3} = 0$$

cu soluțiile $4/3$ și $\sqrt{3}/2$. Revenind la substituție, rezultă ecuațiile trigonometrice $\cos 3x = -1$ și $\cos 3x = 1/2$ cu soluțiile $x = (2k+1)\pi/2$ și $x =$

$$= \pm\frac{\pi}{9} + 2k\frac{\pi}{3}, \text{ unde } k \in \mathbf{Z}.$$

3.120. a) Avem $\sin x \cos a - \cos x \cos a = 2\sin a \cos a$ sau $-\cos(x + a) = \sin 2a$, de unde $\cos(\pi - x - a) = \cos(\pi/2 - 2a)$, deci

$\pi/2 - 2a - \pi + x + a = 2k_1\pi \Rightarrow x_1 = 2k_1\pi + \pi/2 + a$, $k \in \mathbf{Z}$.

$\pi/2 - 2a + \pi - x - a = 2k_2\pi \Rightarrow x_2 = 2k_2\pi + 3\pi/2 - 3a$, $k \in \mathbf{Z}$.

b) Pentru $a = 25°$ avem

$x_1 = 360°k + 90° + 25° = 260°k = 115°$

$x_2 = 360°k + 270° - 75° = 360°k + 195°$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.121. Notăm $2^{\sin x + \cos^2 x} = y$. Avem

$$y^2 + y - 2(\sqrt[4]{2} + 2\sqrt{2}) = 0.$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8(\sqrt[4]{2} + 2\sqrt{2})}}{2} = \frac{-1 \pm (1 + 4\sqrt[4]{2})}{2}$$

Convine numai $y_1 = \frac{4\sqrt[4]{2}}{2} = 2\sqrt[4]{2} = (2)^{\frac{5}{4}}$. Deci $\sin x + \cos^2 x = 5/4$ sau $\sin^2 x - \sin x + 1/4 = 0$.

Rezultă $\sin x = 1/2$ deci $x + 2k\pi + \pi/2 \pm \pi/3$, $k \in \mathbf{Z}$. Pentru $k = 0$, $x_1 = \pi/2 - \pi/3 = \pi//6$ și $x_2 = \pi/2 + \pi/3 = 5\pi/6$.

3.122. Avem $\operatorname{tg} 15° = \dfrac{3 \operatorname{tg} 5° - \operatorname{tg}^3 5°}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 5°}$ sau $\operatorname{tg} 15° - 3 \operatorname{tg} 15° \operatorname{tg}^2 5° - 3\operatorname{tg} 5° + \operatorname{tg}^3 5° = 0$. Notăm $\operatorname{tg} 5° = x$ și avem $x^3 - 3 \operatorname{tg} 15° \cdot x^2 - 3x + \operatorname{tg} 15° = 0$ adică ecuația din enunț. $\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(15° + 180°k) = \dfrac{3 \operatorname{tg}(5° + 60°k) - \operatorname{tg}^3(5° + 60°k)}{1 - 3 \operatorname{tg}^2(5° + 60°k)}$, $k \in \mathbf{Z}$, deoarece $\operatorname{tg} 3x = \dfrac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}$.

Pentru $k = 0$ avem $x_1 = \operatorname{tg} 5°$, pentru $k = 1$ avem $x_2 = \operatorname{tg} 65°$, iar pentru $k = 2$, avem $x_3 = \operatorname{tg} 125°$; apoi se repetă rădăcinile de exemplu pentru $k = 3$ avem $x = \operatorname{tg} 185° = \operatorname{tg} 5°$.

3.123. În problema precedentă s-a arătat că ecuația $x^3 - 3 \operatorname{tg} 15° \cdot x^2 - 3x + \operatorname{tg} 15° = 0$ admite rădăcinile $x_1 = \operatorname{tg} 5°$, $x_2^2 = \operatorname{ctg} 25°$, $x_3 = -\operatorname{ctg} 35°$. Avem relațiile $x_1 x_2 x_3 = \operatorname{tg} 15°$ sau $\operatorname{tg} 5° \cdot \operatorname{ctg} 25° (-\operatorname{ctg} 35°) = -\operatorname{tg} 15° = -\dfrac{1}{\operatorname{ctg} 15°}$ deci $\operatorname{tg} 5° \cdot \operatorname{ctg} 15° \cdot \operatorname{ctg} 25 \operatorname{ctg} 35° = 1$; $x_1 + x_2 + x_3 = 3 \operatorname{tg} 15°$ sau $\operatorname{tg} 5° + \operatorname{ctg} 25° - \operatorname{ctg} 35° = 3 \operatorname{tg} 15°$, deci $\operatorname{tg} 5° + \operatorname{ctg} 25° = 3 \operatorname{tg} 15° + \operatorname{ctg} 35°$.

3.125. Notăm $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t$. Ecuația devine $9t^2 - 6t + 1 = 0$ sau $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{3}$; $\dfrac{x}{2} = k\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{3}$, $x = 2k\pi + 2 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \operatorname{arctg} \frac{3}{4}.$$

3.126. Deoarece $0 < |\cos x| < 1$ rezultă $0 \leqslant 1 - |\cos x| \leqslant 1 - |\cos x|^2 = \sin^2 x$ de unde $0 < \dfrac{1 - |\cos x|}{1 + |\cos x|} \leqslant \sin^2 x$, egalitate pentru $\cos x = \cos^2 x$ adică pentru $\cos x = \pm 1$ și $\cos x = 1$ deci $x = 90\, k$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.127. $m(1 - 2\sin^2 x) + 2(m^2 + 3) \sin x - 7m = 0$ sau $2m \sin^2 x - 2(m^2 + 3) \sin x + 6m = 0$, de unde $\sin x_1 = 2m^2/2m = m$ cu condiția $|m| \leqslant 1$, $\sin x_2 = 3/m$ cu condiția $3 \leqslant |m|$.

Observație. Ecuația nu admite simultan rădăcinile x_1 și x_2, iar dacă $|m| \in (1, 3)$, ecuația nu admite rădăcini.

3.128. Avem succesiv

$$(\cos a + 1) + (\cos b + \cos c)\, t = -2 \sin^2 \frac{a}{2} + 2 \cos \frac{b+c}{2} \cos \frac{b+c}{2} =$$

$$= -2 \sin^2 \frac{a}{2} + 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{b-c}{2} = 2 \sin \frac{a}{2} \left(\cos \frac{b-c}{2} - \sin \frac{a}{2} \right) =$$

$$= 2 \sin \frac{a}{2} \left(\cos \frac{b+c}{2} - \cos \frac{b-c}{2} \right) = 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}.$$

3.129. Avem $\dfrac{\cos B + \cos C - \sin B - \sin C}{1 - \sin A - \cos A} =$

$$= \frac{\cos B - \sin B - \cos (A + B) - \sin (A + B)}{1 - \sin A - \cos A} =$$

$$= \frac{\cos B(1 - \sin A - \cos A) - \sin B (1 - \sin A + \cos A)}{1 - \sin A - \cos A} =$$

$$= \cos B + \sin B \frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1},$$

însă $\operatorname{ctg} \dfrac{A}{2} = \dfrac{1 + \cos A}{\sin A} = \dfrac{\sin A}{1 - \cos A} = \dfrac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1}$ și rezultă astfel relația din enunț.

3.130. $\sin A + \sin B + \sin C = 2 \sin \dfrac{A + B}{2} \cos \dfrac{A - B}{2} \sin (A + B) =$

$$= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A - B}{2} + 2 \cos \frac{A + B}{2} \sin \frac{A + B}{2} = 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A - B}{2} + \right.$$

$$\left. + \cos \frac{A + B}{2} \right) = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

3.131. 1° Avem $\cos a = \sin (b + c)$ deci $\Sigma [\sin (b + c) \sin (b - c)] =$

$$= \frac{1}{2} (\cos 2c - \cos 2b + \cos 2a - \cos 2c + \cos 2b - \cos 2a) = 0.$$

2°. Relația a doua devine $\dfrac{1}{2}$ $(\cos 2c \cos 2a - \cos 2b \cos 2a + \cos 2a \cdot \cos 2b - \cos 2c \cos 2b + \cos 2b \cos 2c - \cos 2a \cos 2c) = 0.$

3.132. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2 \sin (A + B) \cos (A - B) - 2 \sin (A + B) \cos (A + B) = -2 \sin (A + B) \cos (A + B) - \cos (A - B) = 2 \cdot 2 \sin (A + B) \sin A \sin B = 4 \sin A \sin B \sin C.$

3.133. Avem

a) $$\frac{\cos B + \cos C}{\sin B + \sin C} = \frac{2 \cos \dfrac{B + C}{2} \cos \dfrac{B - C}{2}}{2 \sin \dfrac{B + C}{2} \cos \dfrac{B - C}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{B + C}{2} = \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

$$\frac{\sin C - \sin B}{\cos B - \cos C} = \frac{2 \sin \dfrac{C - B}{2} \cos \dfrac{C + B}{2}}{2 \sin \dfrac{C - B}{2} \sin \dfrac{B + C}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{B + C}{2} = \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

b) $\operatorname{tg} A = \dfrac{m \sin A}{m \cos A}$; $\quad \dfrac{\sin 2B + \sin 2C}{\cos 2B + \cos 2C} = \dfrac{2 \sin (B + C) \cos (B - C)}{2 \cos (B + C) \cos (B - C)} =$

$= -\operatorname{tg} A.$

$$\operatorname{tg} A = \frac{m \sin A}{m \cos A} = \frac{-\sin 2B - \sin 2C}{\cos 2B + \cos 2C} = \frac{m \sin A + \sin 2B - \sin 2C}{m \cos A + \cos 2B + \cos 2C}.$$

3.134. Avem $\cos (A + B + C) = \cos 180° = -1 = \cos (A + B) \cos C - \sin (A + B) \sin C = \cos A \cos B \cos C - \sin A \sin B \cos C - \sin A \sin C \cos B - \sin B \cdot \cos A \cdot \sin C$ care se mai scrie $\Sigma \sin A \sin B \cos C = \cos A \cos B \cos C + 1$.

3.135. Avem $\operatorname{ctg} 2a = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{2 \operatorname{tg} a} = \dfrac{1}{2} \operatorname{ctg} a - \dfrac{1}{2} \operatorname{tg} a$ şi deci $\operatorname{ctg} a =$

$= \dfrac{1}{2} \operatorname{ctg} \dfrac{a}{2} - \dfrac{1}{2} \operatorname{tg} \dfrac{a}{2}$. Deci

$$4 \Sigma \operatorname{ctg} 2a = 2 \Sigma \operatorname{ctg} a - 2 \Sigma \operatorname{tg} a = \Sigma \operatorname{ctg} \frac{a}{2} - \Sigma \operatorname{tg} \frac{a}{2} - \Sigma \operatorname{tg} a.$$

Mai ţinem seama că $\Sigma \operatorname{ctg} \dfrac{a}{2} = \operatorname{ctg} \dfrac{a}{2} \operatorname{ctg} \dfrac{b}{2} \operatorname{ctg} \dfrac{c}{2}$ şi $\Sigma \operatorname{tg} a =$

$= \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c$, deci $4 \Sigma \operatorname{ctg} 2a + \Sigma \operatorname{tg} \dfrac{a}{2} = \operatorname{ctg} \dfrac{a}{2} \operatorname{ctg} \dfrac{b}{2} \operatorname{ctg} \dfrac{2}{c} - 2 \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c.$

3.136. Avem $\sin (A + B + C) = \sin 180° = 0 = \sin (A + B) \cos C + \sin C \cos (A + B) = \Sigma \sin A \cos B \cos C - \sin A \sin B \sin C$ sau $\sin A \sin B \sin C = \Sigma (\sin A \cos B \cos C)$.

3.137. Notăm $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{A}{8} = \dfrac{a}{2}$; $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{B}{8} = \dfrac{b}{2}$; $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{c}{8} = c/2$, deci $\dfrac{a+b+c}{2} =$

$= \dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{A + B + C}{8} = \dfrac{4\pi}{8} = \dfrac{\pi}{2}$, deci $a + b + c = \pi$, iar relaţia

$$\Sigma \operatorname{ctg} \frac{a}{2} = \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \text{ este cunoscută.}$$

3.138. $\left(\operatorname{tg} \dfrac{B}{2} + \operatorname{tg} \dfrac{C}{2}\right) \cos \dfrac{B}{2} \cos \dfrac{C}{2} = \dfrac{\sin \left(\dfrac{B}{2} + \dfrac{C}{2}\right) \cos \dfrac{B}{2} \cos \dfrac{C}{2}}{\cos \dfrac{B}{2} \cos \dfrac{C}{2}} =$

$$= \cos \frac{A}{2}.$$

3.139. Relația se mai poate scrie

$$\cos\frac{A}{2}\left[\cos\frac{A}{2}-\cos\left(B+\frac{A}{2}\right)\right]=\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(A+\frac{C}{2}\right)+\cos\frac{C}{2}\right].$$

Transformăm în produse $\cos\frac{A}{2}\cdot 2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B}{2}=$

$=\cos\frac{C}{2}\cdot 2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A}{2}$, însă $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$ și $\cos\frac{A+C}{2}=$

$=\sin\frac{B}{2}$.

3.140. $\left(1-\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=$

$$=\frac{\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}.$$

3.141. Relațiile rezultă, făcînd înlocuirile:

$$\cos A=-\cos(B+C)=\sin B\sin C-\cos B\cos C;$$
$$\cos B=-\cos(A+C)=\sin A\sin C-\cos A\cos C;$$
$$\cos C=-\cos(A+B)=\sin A\sin B-\cos A\cos B$$

și se obține valoarea comună $\sin A\sin B\sin C$.

3.142. $\left(1-\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)\left(-1+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)\sin B\sin C=$

$$=\frac{\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\left(-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)\sin B\sin C}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=$$

$=4\cos^2\left(\frac{B+C}{2}\right)=4\cos^2\frac{A}{2}$, deoarece $\sin B=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$.

3.143. $E=\Sigma\dfrac{\cos A(\cos B+\cos A)+\cos C(\cos A+\cos B)}{\sin A(\sin B+\sin A)+\sin C(\sin A+\sin C)}=$

$$=\Sigma\frac{(\cos A+\cos B)(\cos A+\cos C)}{(\sin A+\sin B)(\sin A+\sin C)}=$$

$$=\Sigma\frac{4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}}{4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}}=$$

$$= \Sigma \frac{\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+C}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+C}{2}} = \Sigma \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = 1.$$

3.144. $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \frac{1}{4}\sec\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2} =$

$$= \frac{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\right)+1}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

$$= \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} + 1 - 2\cos^2\frac{B+C}{2}}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{\Sigma\cos A}{\Sigma\sin A}.$$

3.145. $\cos\frac{A}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2} - \frac{C}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right) = \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} +$

$+ \cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$

Deoarece $1 > \sin\frac{B}{2}$, $1 > \sin\frac{C}{2}$, $\cos\frac{B}{2}, \cos\frac{C}{2} > 0$. rezultă $\cos\frac{B}{2} >$

$> \sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}$, $\cos\frac{C}{2} > \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$, deci $\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} > \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} +$

$+ \sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}$, adică inegalitatea din enunț. La fel și pentru ana-

loagele. Deoarece $\cos\frac{A}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$, $\cos\frac{C}{2}$ sînt numere pozitive și fiecare din ele este mai mic decît suma celorlalte două rezultă că ele pot fi totdeauna laturile unui triunghi.

3.146. Pentru calculul primei părți se ține seama că $\operatorname{tg} A = -\operatorname{tg}(B+C)$ $\operatorname{ctg} A = -\operatorname{ctg}(B+C)$ apoi că $\operatorname{tg} x = 1/\operatorname{ctg} x$. Se obține valoarea 1. Pentru a doua parte se consideră un alt triunghi $A_1B_1C_1$ în care $A_1 = \pi/3 + \pi/6 - A/2$ și analoagele, deoarece $A_1 + B_1 + C_1 = \pi$ și partea întîia se transformă în partea a doua.

4.147. Relația se mai poate scrie

$$\cos\frac{A}{2}\left[\cos\frac{A}{2} - \cos\left(B + \frac{A}{2}\right)\right] = \cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{C}{2} + \cos\left(A + \frac{C}{2}\right)\right].$$

Transformăm în produse și obținem

$$\cos\frac{A}{2}\cdot 2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{C}{2}\cdot 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A}{2}.$$

Ţinem seamă că $A + B + C = 180°$, deci $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$ şi $\cos \frac{A+C}{2} = \sin \frac{B}{2}$, relaţia este verificată.

3.148. Ţinem seama de relaţia $\frac{\cos A + 1}{\sin A} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$. Relaţia cerută devine

$$\frac{\cos A - \sin A + \cos B - \cos C + 1}{\cos A + \sin A - \sin B + \sin C - 1} = \frac{\cos A + 1}{\sin A}, \qquad (1)$$

sau

$\cos A \sin A - \sin^2 A + \sin A \cos B - \sin A \cos C + \sin A = \cos^2 A +$
$+ \sin A \cos A - \sin B \cos A + \sin C \cos A - \cos A + \cos A + \sin A -$
$- \sin B + \sin C - 1$ de unde $-\sin^2 A + \sin (A + B) + \sin B = -1 +$
$+ \cos^2 A + \sin (A + C) + \sin C$ care se mai scrie $\sin (A + B) + \sin B =$
$= \sin (A + C) + \sin C$ sau $\sin C + \sin B = \sin B + \sin C$, deci relaţia cerută este adevărată în orice triunghi ABC.

3.149. Dacă în relaţia $\Sigma \sin A_1 = 4 \cos \frac{A_1}{2} \cos \frac{B_1}{2} \cos \frac{C_1}{2}$, vezi problema **3.130.** facem notaţiile $A_1 = \pi/2 - A/2$; $B_1 = \pi/2 - B/2$; $C_1 = \pi/2 - C/2$, unde $A + B + C = \pi$. obţinem relaţia din enunţ.

3.150. $\sin A \sin (A + \alpha) - \sin B \sin (B + \alpha) = \sin^2 A \cos \alpha +$
$+ \sin A \cos A \sin \alpha \sin^2 B \cos \alpha - \sin B \cos B \sin \alpha = \cos \alpha (\sin A + \sin B)(\sin A -$
$- \sin B) + \sin \alpha \left(\frac{\sin 2A - \sin 2B}{2}\right) = 4 \cos \alpha \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \sin$
$\frac{A-B}{2} \cdot \cos \frac{A+B}{2} + \sin \alpha \sin (A - B) \cos (A + B)$ sau $\cos \alpha \sin (A + B) \cdot$
$\cdot \sin (A - B) + \sin \alpha \sin (A - B) \cos (A + B) =$
$= \sin (A - B) \sin (A + B + \alpha)$.

3.151. Avem $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \sec^2 A = \frac{\sin B \sin C}{\cos^2 A \cos B \cos C} =$

$= \frac{\sin (A + C) \sin (A + B)}{\cos A \cos C \cos A \cos B} = (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C)(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B) = \operatorname{tg}^2 A +$
$+ (\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C) \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C (\operatorname{ctg} A +$
$\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C)$. Dar în orice triunghi $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$, deci $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \sec^2 A = \operatorname{tg}^2 A + (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C) \cdot (\operatorname{ctg} A +$
$\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C)$..

3.152. Relația se mai scrie

$$\sin^2 a + \sin^2 b + \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2b) = 1 \text{ sau}$$

$1 + \sin^2 a + \sin^2 b + (-\sin^2 a) + (-\sin^2 b) = 1$, evident.

2° Relația devine

$\cos^2 2a + \cos^2 2b + [-\cos(2a + 2b)\cos(2a - 2b)] = 1$, sau

$$\frac{1 + \cos 4a}{2} + \frac{1 + \cos 4b}{2} - \frac{\cos 4a + \cos 4b}{2} = 1, \text{ evident.}$$

3° Relația cerută se mai scrie:

$$\frac{1 - \cos 10a}{2} + \frac{1 - \cos 10b}{2} + \cos(5a + 5b)\cos(5a - 5b) = 1 \text{ sau}$$

$$1 - \frac{\cos 10a}{2} - \frac{\cos 10b}{2} + \frac{\cos 10a + \cos 10b}{2} = 1, \text{ evident.}$$

4°. Relația cerută se mai scrie

$$\frac{1 + \cos 16a}{2} + \frac{1 + \cos 16b}{2} - \frac{\cos 16a + \cos 16b}{2} = 1.$$

3.153. Folosim relația $\operatorname{tg}(a + b + c + d) = \dfrac{\Sigma \operatorname{tg} a - \Sigma \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}{1 - \Sigma \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$,

și în condiția din enunț numărătorul este nul.

3.154. Avem $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A + B}{2}\cos\dfrac{A - B}{2} =$

$= 2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A - B}{2}$; $1 + \cos C = 2\cos^2\dfrac{C}{2}$; $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A + B}{2}$

$\cos\dfrac{A - B}{2} = 2\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A - B}{2}$; $\sin C = 2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}$. Relația din enunț

devine $4\sin\dfrac{C}{2}\cos^2\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A - B}{2} = 4\sin\dfrac{C}{2}\cos^2\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A - B}{2}$, evident.

3.155. Egalitatea dată se mai scrie

$$\frac{\sin B}{\cos B}\cdot\frac{\cos C}{\sin C} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C} \Rightarrow \frac{\cos C}{\cos B} = \frac{\sin B}{\sin C} \Rightarrow \sin 2B = \sin 2C.$$

Această egalitate are loc dacă $B = C$ adică dacă triunghiul ABC este isoscel sau dacă $2B + 2C = \pi$ sau $B + C = \pi/2$ deci triunghiul este dreptunghic.

3.156. Din $0 < x + y = \pi/2$ deducem $\cos(x + y) \geqslant 0$ deci $\cos x \cdot \cos y \geqslant \sin x \sin y$. Inegalitatea se mai scrie $(m^2 - 2m)\cos x \cos y - (m^2 - 2m)\sin x \sin y + \cos x \cos y + \sin x \sin y > 0$ sau $(m - 1)^2 \cos x \cos y +$

$+ (1 - m^2 + 2m) \sin x \sin y \geqslant (m-1)^2 \sin x \sin y + (1 - m + 2m) \sin x \cdot \sin y = (m^2 - 2m + 1 + 1 - m + 2m) \sin x \sin y = 2 \sin x \sin y > 0.$

3.157. $\cos A \cos B \cos C = \frac{1}{2} [\cos (A - B) - \cos C] \cos C = k.$

Notînd $\cos C = x$, obținem $x^2 - \cos (A - B)x + 2k = 0$

$\Delta = \cos^2 (A - B) - 8k \geqslant 0$, de unde $k \leqslant \frac{1}{2} \cos^2 (A - B) \leqslant \frac{1}{8}$.

3.158. Relația se mai scrie $4 \cos A[\cos(B - C) - \cos A] = 1$. Notăm $B - C = x$ și obținem $4 \cos^2 A - 4 \cos x \cos A + 1 = 0$, de unde $\cos A = \frac{\cos x \pm i \sin x}{2}$, deci $\sin x = 0$, $x = 0$, $B = C$.

Analog, dacă formăm o ecuație în $\cos B$ obținem $A = C$, deci $A = B = C$.

3.159. Folosim inegalitatea $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$, $(0 < x < \pi/2)$, deoarece $\sin x + \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1+t^2} + \frac{2t}{1-t^2} = \frac{4t}{1-t^4} > 4t > 4\frac{x}{2}$, $E > 2A + 2B + 2C = 2\pi$

3.160 Relația se mai poate scrie:

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geqslant \frac{9}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \text{ sau}$$

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geqslant \frac{9}{\sin A + \sin B + \sin C},$$

unde $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ sînt numere pozitive, inegalitatea fiind cunoscută.

3.161. a) Relația $\sin C = \cos A + \cos B$ poate fi scrisă

$2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$, iar folosind faptul că $A + B + C = \pi$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \sin \frac{C}{2} \neq 0$, obținem $\cos \frac{C}{2} = \cos \frac{A-B}{2}$, de unde rezultă că $A = B + C$.

b) Deoarece $A + B + C = \pi$, avem $A = \pi/2$, $\sin A = \sin (B + C) = 2 \sin B \cos C$ de unde obținem imediat că $B = C$.

3.162. Relația devine $\frac{1}{2}\left[\cos \frac{\pi}{4} - \cos\left(2A + \frac{\pi}{4}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\cos \frac{\pi}{4} - \cos\left(2B + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\left(2B + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(2A + \frac{\pi}{4}\right)\right] =$

$$= \sin (A - B) \sin \left(A + B + \frac{\pi}{4}\right) = \sin (A - B) \sin\left(C - \frac{\pi}{4}\right).$$

3.163. Relația de condiție se mai scrie succesiv:

$$\sin A - \sin B = \sin B - \sin C, \text{ sau}$$

$$2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} = 2 \sin \frac{B-C}{2} \cos \frac{B+C}{2};$$

$$\sin \frac{A-B}{2} \sin \frac{C}{2} = \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{A}{2};$$

$$\left(\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}\right) \sin \frac{C}{2} = \left(\sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}\right) \sin \frac{A}{2}.$$

Împărțim cu $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ obținem $\operatorname{ctg} \frac{B}{2} - \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \operatorname{ctg} \frac{C}{2} -$

$- \operatorname{ctg} \frac{B}{2}$ de unde relația cerută.

3.164. Notăm $x = \operatorname{tg} \frac{A}{2}$, $y = \operatorname{tg} \frac{B}{2}$, $z = \operatorname{tg} \frac{C}{2}$ și inegalitatea devine $\Sigma \sin 2A < \Sigma \sin A$. Avem $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}$. Prin înmulțirea acesteia cu $4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$, obținem

$$4 \sin A \sin B \sin C \leqslant 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Dar, în orice triunghi $4 \sin A \sin B \sin C = \Sigma \sin 2A$; $4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} =$

$= \Sigma \sin A$ și astfel inegalitatea este demonstrată.

3.165. $E = 2[\Sigma \cos (30° - 2A) + \cos 6°] = 4 \cos (30° - A - B) \cos (A -$
$- B) + 4 \cos (18° - C) \cdot \cos (12° - C) = 4[\cos 12° \cos C - \sin 12° \sin C]$
$\cos A \cos B + \sin A \sin B] + 4[\cos A + \cos B - \sin A \sin B] [\cos 12° \cos C +$
$+ \sin 12° \sin C] = 8 (\cos 12° \cos A \cos B \cos C - \sin 12° \sin 12° \sin A \sin B$
$\sin C]$.

3.166. $\cos A = -\cos (B + C) = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \leqslant \sin A$
$\sin B, \cos A \cos B + \frac{1}{2} \sin C \sin 2C = -\cos A \cos (A + C) + \frac{1}{2} \sin C \sin 2C =$

$= -\cos^2 A \cos C + \cos A \sin A \sin C + \frac{1}{2} \sin C \sin 2C = -\cos^2 A \cdot$

$\cdot \cos C + \frac{1}{2} \sin C (\sin 2C + \sin 2A) = -\cos^2 A \cos C + \sin C \sin (A + C) \cdot$
$\cdot \cos (A - C) = -\cos^2 A \cos C + \sin C \sin B \cos (A - C) = \sin A \sin B \sin^2 C$
$+ \cos A \cos C (\sin B \sin C - \cos A) = \sin A \sin B \sin C + \cos A \cos B \cos^2 C.$

Inegalitatea devine $\sin A \sin B \sin^2 C + \cos A \cos B \cos^2 C - \sin A \sin B \sin C - \cos A \cos B \cos C = \sin A \sin B \sin C (\sin C - 1) + \cos A \cos B \cos (\cos C - 1) < 0$, deoarece $(\sin C - 1)$ și $(\cos C - 1)$ sînt negative sau cel mult zero, nu însă simultan nule.

3.167. Partea a doua devine succesiv

$$E = \cos\frac{\pi}{4} \Sigma \cos 2A = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[2\cos(A+B)\cos(A-B) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2A - 2B\right)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}[2\cos(A+B)\cos(A-B) + 2\sin(A+B)\cos(A+B).$$

Ținem seama că $A + B = \pi/4 - C$, $E = \sqrt{2}\cos(\pi/4 - C)$ $[\cos(A-B) + \sin(A+B)] = \cos C + \sin C)(\cos A \cos B + \sin A \sin B + \sin A \cos B + \sin B \cos A) = \sin A \sin B \sin C + \cos A \cos B \cos C + \Sigma(\cos A \sin B \sin C) + \Sigma(\sin A \cos B \cos C)$.

3.168. Inegalitatea cerută se mai scrie

$$4 \sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} \leqslant 1 + 4\sin^2\frac{B+C}{2} \tag{1}$$

deoarece $3 + 2\cos A = 1 + 2(1 + \cos A) = 1 + 2 \cdot 2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + 4\sin^2\frac{B+C}{2}$.

Din $4\sin^2\frac{B+C}{2} - 4\sin\frac{B+C}{2} + 1 = \left(2\sin^2\frac{B+C}{2} - 1\right)^2 \geqslant 0$ se deduce că $1 + 4\sin^2\frac{B+C}{2} \geqslant 4\sin\frac{B+C}{2}$, iar $\cos\frac{B-C}{2} \leqslant 1$ deci $1 + 4\sin^2\frac{B+C}{2} \geqslant 4\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$, adică (1) ceea ce trebuie arătat.

Semnul egal are loc numai dacă $\sin\frac{B+C}{2} = \frac{1}{2}$ și $\cos\frac{B-C}{2} = 1$ adică $B = C = \frac{\pi}{6}$ și $A = \frac{2\pi}{3}$.

3.169. Folosim relația $\operatorname{ctg} a - \operatorname{tg} a = 2\operatorname{ctg} 2a$ și avem

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{B}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{B}{2}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right) =$$

$$= 2\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = 2\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)\right.$$

3.170. Avem $a\cos(B+x)+b\cos(A-x)=a\cos B\cos x-$ $-a\sin B\sin x+b\cos A\cos x+b\sin A\sin x=\cos x(a\cos B+b\cos A)+$ $+\sin x(b\sin A-a\sin B)=c\cos x$. Relația a doua devine

$$\cos\frac{A}{2}\sin\left(\frac{B}{2}-x\right)+\cos\frac{B}{2}\sin\left(\frac{A}{2}+x\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{A+B}{2}-x\right)+\sin\left(\frac{B-A}{2}-x\right)+\sin\left(\frac{A+B}{2}+x\right)+\right.$$

$$\left.+\sin\left(\frac{A-B}{2}+x\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{A+B}{2}-x\right)+\sin\left(\frac{A+B}{2}+x\right)\right]=$$

$$=\sin\frac{A+B}{2}\cos x=\cos\frac{C}{2}\cos x.$$

3.171. Avem $E=\cos^2 A+\frac{1+\cos 2B}{2}+\frac{1+\cos 2C}{2}\cos^2 A+1+$ $+\cos(B+C)\cos(B-X)=\cos^2 A+\cos(\pi-A)\cos(B-C)+1=$ $=\cos^2 A-\cos(B-C)\cos A+1$ de unde $\cos^2 A-\cos(B-C)\cos A+$ $+1-E=0$.

Realizantul ecuației în $\cos A$ este $\Delta=\cos^2(B-C)-4(1-E\geqslant)0$ sau $4(1-E)\leqslant\cos^2(B-C)$ adică $1-E\leqslant 1/4$ sau $E\geqslant 3/4$ iar $E=3/4$ cînd $A=B=C=\pi/3$.

3.172. Inegalitatea devine $2\sin\frac{2A-B-C}{4}\cos\frac{B-C}{4}+\sin\frac{3A}{2}=$

$$=2\sin\frac{2\pi-3(B+C)}{4}\cos\frac{B-C}{2}+\sin\frac{3\pi-3(B+C)}{2}=$$

$=2\cos\frac{3(B+C)}{4}\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{3(C+B)}{2}\leqslant\frac{3}{2}$ sau $1-\cos^2\frac{3(B+C}{4}+$ $+2\cos\frac{3(B+C)}{4}\cos\frac{B-C}{4}-\frac{3}{2}\leqslant 0$. Notăm $\cos\frac{3(B+C)}{4}=x$ și obținem $2x^2-2\cos\frac{B-C}{4}x+\frac{1}{2}\geqslant 0$, $\Delta=\cos^2\frac{B-C}{2}-1\leqslant 0$.

Minimul trinomului în x este cînd $x=\frac{1}{2}\cos\frac{B-C}{4}$; $\Delta=0$, $\cos^2\frac{B-C}{2}=1$, deci $\frac{B-C}{2}=0$, sau $\frac{B-C}{2}=\pi$ (imposibil).

Pentru $x=1/2$, trinomul se anulează. $(2/4-2/3+1/2=0)$, $B=C$. $x=\cos\frac{3(B+C)}{4}=\cos\frac{3B}{2}=\frac{1}{2}$ deci $\frac{3B}{2}=\frac{\pi}{3}$, $B=C=\frac{2\pi}{9}$ și $A=\frac{5\pi}{9}$.

3.173. Inegalitatea $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B < 1$ se mai scrie

$$\frac{\sin A \sin B - \cos A \cos B}{\cos A \cos B} < 0 \text{ sau } \frac{-\cos(A+B)}{\cos A \cos B} = \frac{\cos C}{\cos A \cos B} < 0.$$

Rezultă că este necesar și suficient ca unul din unghiuri să fie obtuz, al cărui cosinus să fie negativ.

3.174. Avem $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} = 1$ deci $1 = \operatorname{tg}(A+B+C) =$

$$= \frac{\Sigma \operatorname{tg} A - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}{1 - \Sigma \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B},$$ de unde $1 - \Sigma \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = \Sigma \operatorname{tg} A - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$.

3.175. Partea întîi devine succesiv:

$$2 \sin n(a+b) \cos n(a-b) + 2 \sin nc \cdot \cos nc = 2n(\pi - c) \cdot \cos n(a-b) +$$
$$+ 2 \sin nc \cdot \cos n[\pi - (a+b)] = 2 \cos n\pi \sin n\pi \cdot \cos n(a-b) +$$
$$+ 2 \sin nc \cdot \cos n\pi \cdot \cos n(a+b) = -2 \cos n\pi \cdot \sin n\pi[\cos n(a-b) -$$
$$- \cos n(a+b)] = (-1)^{n+1} 4 \sin na \cdot \sin nb \cdot \sin nc.$$

3.176. Avem $E = \dfrac{2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{E-C}{2}}{2 \sin^2 \frac{A}{2}} - \dfrac{2 \sin B \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2}}{2 \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2}} =$

$$= \frac{\cos \frac{B-C}{2} - \sin B \sin \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{B+C}{2}},$$ dar numărătorul semai scrie

$$\cos\left(B - \frac{B+C}{2}\right) - \sin B \sin \frac{B+C}{2} = \cos B \cos \frac{B+C}{2}.$$

3.177. Inegalitatea se mai scrie $E = \dfrac{\sin 2A \sin 2B \sin 2C}{\cos^3 \frac{A}{2} \cos^3 \frac{B}{2} \cos^3 \frac{C}{2}} \leqslant \frac{64}{27}$. Mai putem scrie: $E = 8^3 \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C \cdot \operatorname{tg}\frac{A}{2} \operatorname{tg}\frac{B}{2} \operatorname{tg}\frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \geqslant$

$\geqslant \dfrac{64}{27}$.

Ținem seama de relația:

$$\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} C \operatorname{ctg} A = 1. \quad (1)$$

Dacă triunghiul este obtuzunghic, inegalitatea este evidentă. Dacă triunghiul este ascuțitunghic, atunci produsul $(\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B) \cdot \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C) \cdot (\operatorname{ctg} C \operatorname{ctg} A)$ este maxim cînd factorii sînt egali deoarece suma lor din (1) este constantă, deci:

$$\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C \leqslant \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}\right)^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

De asemenea, $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} \leqslant \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ deoarece:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1.$$

Maximul produsului $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ este, de asemenea, cînd $A = B = C = \pi/3$ pe baza teoremei:

Un arc pozitiv inferior lui π împărțit în n părți astfel ca produsul sinusurilor lor să fie maxim trebuie împărțit în părți egale, deci $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. Prin urmare avem $E \leqslant 8^3 \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{8} = \frac{64}{27}$.

3.178. Inegalitatea cerută se mai scrie:

$$m^2 \sin(x+y) + m[\sin x - \sin y - \sin(x+y)] + \sin y > 0. \qquad (1)$$

Realizantul ecuației în m este:

$$\Delta_{(m)} = [\sin x - \sin y - \sin(x+y)]^2 - 4\sin y \sin(x+y).$$

Notăm $A = x$, $B = y$, $C = \pi - (x+y)$, unde A, B, C sînt unghiurile unui triunghi oarecare verificînd relațiile de condiție din enunț. Deci $\Delta_{(m)} = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin A \sin B - 2\sin A \sin C - 2\sin B \sin C$, dar $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ fiind proporționale cu laturile a, b, c ale triunghiului ABC avem $\sin A < \sin B + \sin C$ sau $\sin^2 A < \sin A \sin B + \sin A \sin C$ și analoagele, deci $\Sigma\sin^2 A < \Sigma(\sin A \sin B + \sin A \sin C)$ sau $\Sigma\sin^2 A - 2\Sigma \sin A \sin B < 0$ adică $\Delta_{(m)} < 0$ și rezultă că relația (1) cît și cea din enunț este adevărată oricare ar fi m real.

3.179. Avem relațiile $\Sigma \sin 2A = 4\sin A \sin B \sin C$.

$$\Sigma \sin 4A = \sin 4A + \sin 4B + \sin 4[180^\circ - (A+B)] =$$

$$= \sin 4A + \sin 4B - \sin 4(A+B) = \sin 4A + \sin 4B -$$

$$- \sin[180^\circ - 4[A+B)] = 4\sin\frac{4A}{2}\sin\frac{4B}{2}\cos\frac{180^\circ - 4(A+B)}{2} =$$

$$= 4\sin 2A \sin 2B \sin 2(A+B) = 4\sin 2A \sin 2B \sin(360^\circ - 2C) =$$

$$= -\sin 2A \sin 2B \sin 2C.$$

Înlocuind în inegalitatea din enunț obținem

$$1 - \frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin 2A \sin 2B \sin 2C} \leqslant 0 \quad \text{sau} \quad \sin 2A \sin 2B \sin 2C \leqslant \sin A \sin B \sin C,$$

deci $8\cos A \cos B \cos C \leqslant 1$, deoarece $\sin A \sin B \sin C > 0$. Ultima inegalitate este cunoscută; egalitatea are loc cînd $A = B = C = \pi/3$.

3.180. Partea întîi devine succesiv:

$$\frac{1+\cos 2a}{2}+\frac{1+\cos 2b}{2}+\cos^2 c+[\cos(a-b)+\cos(a+b)]\cos c=$$

$$=1+\cos(a+b)\cos(a-b)+\cos(a+b)\cos c+$$

$$+\cos(a-b)\cos c+\cos^2 c=1+\cos(a+b)[\cos(a-b)+$$

$$+\cos c]+\cos c[\cos(a-b)+\cos c]=$$

$$=1+[\cos(a-b)+\cos c][\cos(a+b)+\cos c]=$$

$$=1+[\cos(a-b)+\cos c][\cos(\pi-c)+\cos c]=$$

$$=1+[\cos(a-b)+\cos c][-\cos c+\cos c)=1.$$

3.181. Ținînd seama de relațiile $1-\cos A=2\sin^2\frac{A}{2}$; $1-\cos B=$ $=2\sin^2\frac{B}{2}$; $1-\cos C=2\sin^2\frac{C}{2}$ inegalitatea din enunț devine

$$\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}}+\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{2}\sin\frac{B}{2}}\geqslant\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$\text{sau}\quad\sqrt{1+\sin\frac{A}{2}}+\sqrt{1+\sin\frac{B}{2}}\geqslant\sqrt{1+\sin\frac{C}{2}}$$

inegalitate evidentă, ținînd seama că arcele $A/2$, $B/2$, $C/2$ sint mai mici decît $90°$ și deci $\sqrt{1+\sin\frac{A}{2}}+\sqrt{1+\sin\frac{B}{2}}\geqslant 2$; $\sqrt{1+\sin\frac{C}{2}}\leqslant 2$.

3.182. Avem $\sin\frac{A}{2}$, $\sin\frac{B}{2}$, $\sin\frac{C}{2}\in R^+$. Din inegalitatea mediilor obținem

$$\sin\frac{A}{2}+2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\geqslant 2\sqrt{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}},$$

$$\left(\sin\frac{A}{2}+2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^2\geqslant 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}. \qquad (1)$$

Ținem seama că $\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B+C}{2}=\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, inegalitatea (1) devine:

$$\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^2\geqslant 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\quad\text{sau}\quad\cos^2\frac{B-C}{2}\geqslant$$

$$\geqslant 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Observație. Deoarece $\cos^2 \frac{B-C}{2} \leqslant 1$ mai rezultă că

$8 \sin\frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leqslant 1.$

3.183. Partea întii se mai scrie

$$E = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} = 2 \cos \frac{a-b}{2}\left(\sin \frac{a+b}{2} + \right.$$

$$\left. + \cos \frac{a+b}{2} + 1\right).$$ Ținem seama că $1 = \sin \frac{\pi}{2}$, $\cos \frac{a+b}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{a+b}{2}\right)$,

deci

$$E = 2 \cos \frac{a-b}{2}\left[\sin \frac{a+b}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{a+b}{2}\right) + \sin \frac{\pi}{2}\right].$$

Deoarece $\frac{a+b}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi$ și știind că dacă $A + B + C = \pi$, atunci aplicăm formula:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Rezultă: $E = 8 \cos \frac{a-b}{2} \cdot \operatorname{ocs} \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{\pi - a - b}{2} \cos \frac{\pi}{4} =$

$$= 4\sqrt{2} \cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{4} \cos \frac{\pi - a - b}{4}.$$

3.184. Înmulțim ambele părți cu $4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ și obținem relația $\Sigma \sin 2A = 4 \sin A \sin B \sin C$.

Rezolvarea trigonometrică a triunghiurilor, patrulaterelor și poligoanelor. Aplicații la calculul de distanțe și în fizică. Aplicații ale trigonometriei la geometria în spațiu

PROBLEME

ENUNȚURI

4.1. Să se rezolve triunghiul dreptunghic ABC cunoscînd ipotenuza $\|BC\| = a$ și bisectoarea $\|AM\| = l$.

4.2. Dacă M este un punct oarecare pe ipotenuza $|BC|$ a unui triunghi dreptunghic ABC, există relația: $\|MC\|^2 \cdot \|AB\|^2 + \|MB\|^2 \cdot \|AC\|^2 = \|AM\|^2 \cdot \|BC\|^2$.

4.3. Să se arate că dacă $A + B + C = 180°$ și $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, atunci $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ și analoagele.

4.4. Dacă între laturile și unghiurile unui triunghi ABC avem relația $\frac{2b - c}{2c - b} = \frac{\cos C}{\cos B}$, unghiul A are $60°$.

4.5. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC avem

$$\frac{a \cos A - b \cos B}{a \cos B - b \cos A} + \cos C = 0.$$

4.6. Să se rezolve triunghiul în care se cunosc $\sphericalangle C = 30°$, $c = 6(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ cm și $a + b = 12\sqrt{3}$ cm. (Facultatea de matematică, Timișoara, 1967)

4.7. Să se calculeze aria unui triunghi ABC cunoscînd $\sphericalangle A = 3\ °40'$, $\sphericalangle B = 70°20'$ și latura $\|AC\| = b = 3\,070$ folosind tabelele de logaritmi cu cinci zecimale.

4.8. Să se rezolve triunghiul ABC cunoscînd latura a, înălțimea h_b și înălțimea h_c. Caz numeric: $a = 127$ m, $h_b = 105$ m, $h_c = 97$ m.

4.9. Să se rezolve triunghiul ABC cunoscînd latura $\|BC\| = a$, mediana m_a și înălțimea h_a. Caz numeric: $a = 75$ m, $m_a = 71$ m și $h_a = 63$ m.

4.10. Să se rezolve un triunghi cunoscînd pe a, A și $b - c = d$.

4.11. Să se arate că distanța de la centrul cercului circumscris unui triunghi pînă la piciorul înălțimii dusă din A este dată de $R\sqrt{1 - \sin 2B \sin 2C}$.

4.12. Într-un semicerc de rază R să se înscrie un patrulater de arie maximă.

4.13. Într-un sector circular AOB de rază R și cu $\sphericalangle AOB = 2\alpha > < 180°$, să se înscrie un dreptunghi $CDEF$, unde $C \in |AO|$ și $D \in |OB|$, $CD \parallel AB$, de arie maximă și să se exprime maximul ariei dreptunghiului.

4.14. Să se rezolve un triunghi ABC în care $a^2 - b^2 = 24$, unghiul $C = 30°$ și aria $S = 8{,}75\ m^2$.

4.15. Fie d_a, d_b, d_c distanțele centrului cercului circumscris unui triunghi ascuțitunghic ABC la laturile triunghiului. Să se arate că $d_a + \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = d_b + \frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = d_c + \frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

4.16. Să se arate că în orice triunghi avem $2S = \frac{a^2}{\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C}$ și analoagele.

4.17. Să se arate că într-un triunghi oarecare $a(b\cos C - c\cos B) = b^2 - c^2$, $b\cos B + c\cos C = a\cos(B - C)$.

4.18. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC avem relația: $a = \frac{p\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$, p fiind semiperimetrul.

4.19. Să se arate că $\frac{b-a}{c} = \frac{\sin\frac{B-A}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$; $\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$;

4.20. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC avem

$$\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right) = \frac{\sin(A-B)\sin(B-C)\sin(C-A)}{\sin A\sin B\sin C} < 1.$$

4.21. Să se arate că într-un triunghi ABC avem $\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$.

4.22. Să se arate că într-un triunghi oarecare avem $\frac{\sin A/2}{\sin(A/2 + B)} = \frac{a}{b+c}$.

4.23. Se consideră un triunghi ABC ale cărui laturi a, b, c sînt proporționale cu 2, $1 + \sqrt{3}$, $\sqrt{6}$.

a) Să se determine unghiurile acestui triunghi.

b) În ce condiții există un astfel de triunghi?

(Institutul de Arhitectură, București, 1978)

4.24. În triunghiul ABC, $b > c$ se dă $a = 78$, $R = 65$, $r = 28$, unde R este raza cercului circumscris, r raza cercului înscris în triunghi. Să se calculeze laturile b și c fără a utiliza tabela de logaritmi.

4.25. Se consideră un triunghi înscris într-un cerc de rază r. Să presupunem că una dintre laturile triunghiului este egală cu $r/2$, iar a doua egală cu $r\sqrt{3}$. Să se găsească lungimea celei de-a treia laturi a triunghiului.

(Facultatea de matematică-mecanică, București, 1978)

4.26. De un mic inel A sînt legate două fire AB și AC care sînt fixate în B și C astfel că $\sphericalangle BOC + 100°$. Din punctul A mai atîrnă o greutate P de 200 kg, $\sphericalangle BAP = 120°$ și $\sphericalangle CAP = 140°$. Să se afle forțele care întind fiecare din cele două fire considerate fără greutate și inextensibile.

4.27. Fie în planul orizontal un triunghi isoscel Abc, cu $\|Ab\| = \|Ac\|$. Se notează cu 2α unghiul din vîrful A și cu x înălțimea Aa'. Se iau pe verticalele din b, c punctele B, C la o aceeași înălțime h.

a) Să se determine x în funcție de α și h (constante) astfel încît triunghiul ABC să fie echilateral și să se calculeze latura acestuia.

b) În aceste condiții să se calculeze în funcție de α, x, h: aria laterală a conului de rotație avînd ca bază cercul circumscris triunghiului echilateral ABC și vîrful S pe verticala ridicată în A. Aria sferei trecînd prin același cerc avînd centrul O în planul Abc.

(Institutul de arhitectură, București, 1978)

4.28. Să se arate că dreptele ce trec prin vîrfurile unui triunghi și respectiv picioarele înălțimilor triunghiului său median (format de picioarele medianelor) sînt concurente. (G.M.B., 13223, *C. Ionescu-Țiu*)

4.29. Într-un triunghi oarecare ABC ducem înălțimea $|AA_1|$ și mediana $|AM|$. Notăm $\sphericalangle A_1HM = x$, unde H este ortocentrul. Să se arate că $2 \operatorname{tg} x = |\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} C|$.

4.30. Trei bare articulate la capete formează un triunghi oarecare ABC. Pe axele articulațiilor, din vîrfurile A, B, C sînt fixați cîte un scripete. Peste acești scripeți este trecut un cablu închis și care prin strîngere este supus la o tensiune T. Frecarea în axul scripeților fiind neglijabilă. Să se afle forțele de reacțiune din articulații (G.M.B., 1136, *C.I.Ț.*)

4.31. Să se arate că în orice triunghi avem relația:

$$a^2 \cos (B - C) + (b^3 + c^3) \cos A = 2bc.$$

4.32. Fie un patrulater convex $ABCD$ în care s-a măsurat cu teodolitul distanțele $\|AB\|$, $\|AC\|$, $\|AD\|$, $\|BD\|$ și $\|BC\|$. Să se arate cum se poate calcula distanța $\|CD\|$ presupunîndu-se că punctele A, B, C, D sînt în același plan. Să se mai arate cum se poate verifica dacă patrulaterul este plan. (*C.I.Ț.*)

4.33. Pe un teren se măsoară distanța $\|AB\|$ dintre două puncte A și B. Din A și din B se măsoară respectiv unghiurile $\widehat{BAP}$ și $\widehat{ABP}$, adică $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$ din triunghiul ABP. Să se calculeze distanța de la punctul P la dreapta AB.

4.34. Într-un patrulater $ABCD$ s-au măsurat segmentele $|AB|$, $|BC|$, $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle ABD$, $\sphericalangle DBC$, $\sphericalangle BCD$. Să se calculeze distanțele $\|AD\|$, $\|BD\|$, $\|CD\|$, și să se afle dacă punctele sînt în același plan. (*C.I.Ț.*)

4.35. Se dă unghiul $xOy = \alpha$ și A un punct din interiorul acestui unghi, definit prin distanțele lui la laturile Ox, Oy și anume $\|AP\| = m$ și $\|AQ\| = n$. Să se arate că $\|OA\| = \dfrac{\sqrt{m^2 + n^2 + 2mn\cos\alpha}}{\sin\alpha}$.

4.36. Dacă între laturile unui triunghi avem relația $2a = b + c$, atunci sînt satisfăcute și relațiile:

$$2\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B-C}{2}; \quad \frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{A}{2}} - \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{1}{2}(B-C)} = \frac{3}{2}.$$

4.37. În triunghiul ABC, mediana $\|AD\|$ este egală cu $\|BC\| = a$. Să se arate că aria triunghiului ABC este $S = \dfrac{3a^2 \operatorname{tg} A}{8}$.

4.38. Fie A_1 și A_2 intersecțiile dreptei BC cu perpendicularele duse din vîrful A pe diametrul cercului circumscris triunghiului ABC și care trec respectiv prin B și C. Analog avem punctele B_1, B_2, C_1, C_2. Să se arate că:

$$\|A_1A_2\| \cdot \|B_1B_2\| \cdot \|C_1C_2\| = 8abc\cos A\cos B\cos C \text{ și}$$
$$\|A_1A_2\| \operatorname{tg} A = \|B_1B_2\| \cdot \operatorname{tg} B.$$

(G.M.B., 1948, *C.I.Ț.*)

4.39. Să se arate că într-un triunghi oarecare:

$$a^2 \operatorname{tg} A + b^2 \operatorname{tg} B \text{ și } c^2 \operatorname{tg} C = 2S(\sec A \sec B \sec C - 2).$$

4.40. Să se arate că dacă în triunghiul ABC avem $B = 3A$, atunci este valabilă egalitatea: $(b^2 - a^2)(b - a) = ac^2$; a, b, c fiind laturile opuse unghiurilor A, B, C respectiv.

4.41. Fie un triunghi ABC înscris în cercul O, iar A_1, B_1, C_1 punctele în care bisectoarele interioare taie a doua oară cercul. În ce caz triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ au arii egale?

4.42. Să se arate că în orice triunghi:

$$a^3d_a + b^3d_b + c^3d_c = 2S(a^2 + b^2 + c^2 - 6R^2),$$

unde prin d_a, d_b, d_c s-au notat distanțele de la centrul cercului circumscris la laturile triunghiului. (G.M., 4778, *C.I.Ț.*, 1937)

4.43. Să se arate că în orice triunghi

$$\frac{\cos A\cos B}{ab} + \frac{\cos B\cos C}{bc} + \frac{\cos C\cos A}{ca} = \frac{\sin^2 A}{a^2}.$$

(Institutul politehnic, Galați)

4.44. Fie triunghiul isoscel ABC. Mediatoarea laturii $\|AC\|$ intersectează dreapta BC în P. Să se arate că $R = \|PC\| \cdot \operatorname{ctg}(ABC)$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

(G.M.B., 4520, L. *Constantinescu*)

4.45. Să se arate că într-un triunghi ascuțitunghic oarecare ABC avem

$$\Sigma \frac{a^2}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} = \Sigma \frac{a^2}{\operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2}} = 2S.$$

4.46. Să se arate că în orice triunghi avem $2S\,\Sigma\dfrac{\sin A}{\sin B\sin C}=\Sigma\,a^2$.

4.47. Fie un triunghi oarecare ABC. Pe latura $|BC|$ se iau în ordine punctele A_1 și A_2 astfel că $\sphericalangle BAA_1=\sphericalangle A_1AA_2=\sphericalangle A_2AC$. Pe latura $|CA|$ se iau în ordine punctele B_1 și B_2 astfel că $\sphericalangle CBB_1=\sphericalangle B_1BB_2=\sphericalangle B_2BC$, iar pe $|AB|$ se iau punctele C_1 și C_2 astfel încît $\sphericalangle ACC_1=\sphericalangle C_1CC_2=\sphericalangle C_2CB=\sphericalangle C/3$.

Notăm $X=CC_2\cap BB_1$, $Y=AA_2\cap CC_1$, $Z=AA_1\cap BB_2$. Să se arate că $\|AZ\|\cdot\|CY\|\cdot\|BX\|=\|AY\|\cdot\|BZ\|\cdot\|CX\|$.

4.48. Fie triunghiul oarecare ABC, cu $\sphericalangle A>\sphericalangle B>\sphericalangle C$.

Să se arate că dacă $\sin A+\sin B+\sin C=1$, atunci $\sphericalangle B+\sphericalangle C<30°$. (G.M., 14793, *L. Mănescu*)

4.49. Se consideră un triunghi înscris într-un cerc de rază r. Să presupunem că una dintre laturile triunghiului este egală cu $r/2$, iar a doua egală cu $r\sqrt{3}$. Să se găsească lungimea celei de-a treia laturi a triunghiului.

(Facultatea de matematică, București, 1973)

4.50. În triunghiul ABC se iau punctele α și β situate pe latura $|BC|$, simetrice față de mijlocul acestei laturi. Notînd cu θ unghiul $BA\alpha$ și cu ω unghiul $CA\beta$ se cere să se demonstreze relația:

$$\frac{b^2}{c^2}=\frac{\sin\theta\sin(A-\omega)}{\sin\omega\sin(A-\omega)}.$$

4.51. Un cerc O cu raza unitate se împarte în n părți egale ($n>4$). Să notăm punctele de diviziune cu $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. Fie A_1' piciorul perpendicularei dusă din A_1 pe OA_2, A_1'' piciorul perpendicularei dusă din A_1' pe OA_3 etc. Continuînd acest procedeu indefinit, să se calculeze lungimea liniei frînte $A_1A_1'A_1''A_1'''\ldots$ Caz particular $n=6$.

4.52. Fie patru puncte A, B, C, D pe cercul de rază R, astfel ca $\widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{CD}=2a$, a în radiani.

a) Să se calculeze aria trapezului $ABCD$ în funcție de a și R.

b) Să se determine a, astfel ca $\|AB\|^2+\|AC\|^2+\|AD\|^2=8R^2$.

c) Dacă $\|AB\|^2-\|AC\|^2=\sqrt{3}\cdot\|AD\|^2$ să se determine a.

(Institutul de Construcții București, 1971)

4.53. 1) Dacă $a+b+c+d=2\pi$ să se arate că

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2}+\sin\frac{b}{2}\sin\frac{d}{2}=\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a+d}{2}.$$

2) Să se deducă de aici că într-un patrulater inscriptibil suma produselor laturilor opuse este egală cu produsul diagonalelor.

4.54. Să se arate că într-un poligon regulat cu $n>4$ laturi, A_1, A_2, $A_3, \ldots, A_n$ există relația $2+\dfrac{\|A_1A_5\|}{\|A_2A_3\|}=\left(\dfrac{\|A_1A_3\|}{\|A_1A_2\|}\right)^2$

4.55. Dacă a, b, c, A, B, C sînt laturile și unghiurile unui triunghi, iar x un unghi arbitrar, avem realțiile

$a^3\cos x=b^3\cos(3C+x)+c^3\cos(-3B+x)+3abc\cos(C-B+x)$

$a^3\sin x=b^3\sin(3C+x)+c^3\sin(-3B+x)+3abc\sin(C-B+x)$.

(G.M.B., 4863, *N. Mihăileanu*)

4.56. Să se arate că produsul distanțelor unui punct oarecare de pe cercul circumscris la două laturi opuse ale unui patrulater înscris este egal cu produsul distanțelor la celelalte două laturi opuse *(Pappus)*.

4.57. În triunghiul ABC ducem înălțimile $\| AA_1 \|$, $\| BB_1 \|$, $\| CC_1 \|$ și fie O centrul cercului circumscris. Să se arate că:

$$\frac{(\|OA_1\|^2 - \|OA\|^2)\cos A}{\cos(B+C)+\cos A} = \frac{(\|OB_1\|^2 - \|OB\|^2)\cos B}{\cos(C-A)+\cos B} =$$

$$= \frac{(\|OC_1\|^2 - \|OC\|^2)\cos C}{\cos(A-B)+\cos C} = -2R^2 \cos A \cos B \cos C.$$

4.58. Să se demonstreze că dacă A_1, B_1, C_1, sînt proiecțiile unui punct M din interiorul unui triunghi echilateral ABC respectiv pe laturile $| BC |$, $| CA |$, $| AB |$, există relația

$$\frac{\|AM\|}{\|BM\|\cdot\|CM\|} + \frac{\|BM\|}{\|AM\|\cdot\|CM\|} + \frac{\|CM\|}{\|AM\|\cdot\|BM\|} =$$

$$= \left(\frac{\cos A_1}{|B_1C_1|} + \frac{\cos B_1}{|A_1C_1|} + \frac{\cos C_1}{|A_1B_1|}\right)\sqrt{3},$$

unde A_1, B_1, C_1 sînt unghiurile triunghiului $A_1B_1C_1$.

(G.M.B., 8961, *C. I.-Ț.*)

4.59. Să se arate că într-un triunghi oarecare avem relațiile $a \sin B \sin(C-x) - c \sin C \sin x = b \sin C \sin(A-x) - a \sin A \sin x = c \sin A \sin(B-x) - b \sin B \sin x$. (G.M., 67, *Gh. Țițeica*, 1895)

4.60. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC, oricare ar fi x avem

$$b[\cos(x-C) - \sin(x+C)] + c[\cos(x+B) - \sin(x+B)] = a(\cos x - \sin x).$$

(S.G.M., VI, 268, C.I.Ț.)

4.61. Să se arate că în orice triunghi ABC

$$(c-a)(c\cos B + b\cos C) = ab(\cos A - \cos B) + a(a-c)\cos B.$$

4.62. Să se demonstreze că în orice triunghi ABC avem $a\cos(B+\alpha) + b\cos(A-\alpha) = c\cos\alpha$, unde α este un unghi oarecare; apoi să se deducă relația

$$\cos 2A_1 \sin(2B_1 - \alpha) + \cos 2B_1 \sin(2A_1 + \alpha) = \cos 2C_1 \cos\alpha,$$

unde

$$A_1 + B_1 + C_1 = \pi/4.$$

(Concurs G.M., 1941, *C.I.Ț.*)

4.63. Să se arate că dacă într-un triunghi ABC avem $\frac{\operatorname{tg} A}{1} = \frac{\operatorname{tg} B}{2} = \frac{\operatorname{tg} C}{3}$, atunci avem $\frac{a\sqrt{2}}{1} \quad \frac{b\sqrt{5}}{2} = \frac{c\sqrt{10}}{3}$.

4.64. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC avem:

$$c \cos B \cos (B - C) = c \cos C + h_a \sin (C - B).$$

4.65. Într-un triunghi oarecare ABC ducem bisectoarele interioare. Bisectoarele din A, B, C întîlnesc respectiv perpendicularele din B pe AB, din C pe BC, din A pe AC în punctele M, N, P. Să se arate că:
$\| AM \| \cdot \| BN \| \cdot \| CP \| = 16R^2r$.

4.66. Să se arate că dacă în triunghiul ABC, unghiul A este jumătatea unghiului B, atunci $\| BC \| < 2 \| CM \| \leqslant \| BC \| \sqrt{5}$, unde M este mijlocul laturii $| AB |$.

4.67. Să se arate că în orice poligon regulat $A_1A_2A_3 \ldots A_n$, cu $n \geqslant 7$, înscris în cercul de raza R, avem

$$\left(\frac{\| A_1A_2 \|}{R}\right)^2 + \left(\frac{\| A_1A_4 \|}{\| A_1A_2 \|}\right)^2 = 3; \quad \left(\frac{\| A_1A_2 \|}{R}\right)^2 + \left(\frac{\| A_1A_3 \|}{\| A_1A_2 \|}\right)^2 = 4;$$

$$(\| A_1A_4 \| + \| A_1A_2 \|) \| A_1A_2 \| = \| A_1A_3 \|^2.$$

4.68. Să se stabilească relaţiile:

$$6 \sin A \sin B \sin C = \Sigma \sin^2 C (\sin 2A + \sin 2B) =$$
$$= 4\Sigma (\sin C \cos A \cos B) + \Sigma[\sin 2C(\cos^2 A + \cos^2 B)],$$

A, B, C fiind unghiurile unui triunghi oarecare.

(Pitagora, S. 34, *C.I.Ţ.*)

4.69. Se dau două axe fixe. Din punctul lor de intersecţie pleacă în cele patru direcţii, cu viteze diferite, punctele mobile A, B, C şi D. Să se arate că $\dfrac{\| AB \|^2 - \| BC \|^2 + \| CD \|^2 - \| DA \|^2}{\| AC \| \cdot \| BD \|} = \text{constant}.$

4.70. Să se arate că în orice triunghi avem $\Sigma \dfrac{(p-a)^2}{bc} = \dfrac{2R - r}{2R}$.

(R.M.T., 1448, *C.I.Ţ.*)

4.71. Notăm cu R_a, R_b, R_c, razele cercurilor ce trec prin centrul cercului circumscris unui triunghi oarecare ABC şi prin două din vîrfurile triunghiului. Să se arate că $\Sigma \left[a^2\left(\dfrac{b}{R_b} + \dfrac{c}{R_c}\right)\right] = 24S$.

4.72. Să se arate că într-un triunghi oarecare avem

$$\left| b \cos \frac{A}{3} - c \cos \frac{2A}{3} \right| = a \cos\left(C + \frac{A}{3}\right) \text{ unde } \sphericalangle A < 135°;$$

$$| b \cos \alpha - c \cos (A - \alpha) | = a \cos (C + \alpha) \text{ unde } \sphericalangle A - 90° < \alpha < \sphericalangle A$$

(G.M.B., 3066, *C.I.Ţ.*)

4.73. Să se arate că în orice triunghi ascuţitunghic ABC, avem

$$3 > 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} > \frac{3}{2},$$

4.74. Să se arate că dacă $0 < x < 10°$, avem

$$\sin (50° + x) \cos (20° + x) > \sin (40° + 2x) \cos (10° + 2x).$$

(G.M.B., 2426, *C. Ionescu-Ţiu*)

4.75. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC avem

$$\Sigma \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \geqslant \frac{3}{4}.$$

4.76. Să se arate că dacă A, B, C sînt unghiurile unui triunghi oarecare, există triunghiuri ale căror laturi să fie exprimatc prin $\cos\frac{A}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$, $\cos\frac{C}{2}$. Dacă triunghiul ABC este ascuțitunghic, atunci $\sin 2A$, $\sin 2B$, $\sin 2C$ pot exprima laturile unui triunghi.

(R.M.F., 384, *C.I.Ț.*)

4.77. Fie un patrulater convex de arie S și de laturi a, b, c, d. Să se arate că $S \leqslant \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$.

4.78. a) Să se găsească un arc de x radiani cuprins între 0 și 2π astfel ca $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right); \frac{1}{2} \cos\frac{\pi}{6}$ și $\cos x$ să fie în progresie aritmetică.

b) Coordonatele unui punct mobil M raportat la sistemul rectangular xOy sînt exprimate în funcție de timpul t prin relațiile $x = \sin^2 t$ și $y = \sin^2 2t$. Să se studieze traiectoria mobilului M.

4.79. Un arc $\widehat{AB} = x < \pi$ se împarte în n părți egale. Să se arate că $\sin x < n \sin\frac{x}{n}$.

4.80. Să se arate că în orice triunghi ABC avem

$$4 \sin A \sin B \sin C \leqslant \sin A + \sin B + \sin C.$$

(S.G.M., VI, 175, *C.I.Ț.*)

4.81. Se consideră un triunghi ABC $(A > C)$ între unghiurile căruia avem relația: $\sin\frac{B}{2} = \sin\frac{A}{2} \sin\frac{C}{2}$. Se cere:

1) Să se arate că relația dată este echivalentă cu relația $\operatorname{tg}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{2}$.

2) Să se găsească relația pe care o verifică laturile acestui triunghi.

3) Se dă în plus: $\sin\frac{B}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ și se cere să se calculeze $\cos 2B$. Folosind rezultatul obținut, să se determine unghiul B.

4) Să se calculeze $\cos(A-C)/2$ și să se explice cum se pot determina toate unghiurile triunghiului.

(Institutul Politehnic, București, 1972)

4.82. Pe segmentul $|AB|$ de lungime a se consideră un punct C situat între A și B astfel încît $|AC| = 2|CB|$. Pe $|AC|$ și $|BC|$ ca diametre se construiesc două semicercuri, unul de o parte și celălalt de partea opusă a dreptei AB. Prin C se duce o secantă oarecare MCN (M pe arcul $\widehat{AC}$, N pe arcul $\widehat{CB}$). a) Să se arate că tangentele în M, N la cele două semicercuri sînt paralele. b) Fie O mijlocul segmentului $|AB|$: perpendiculara din O pe $|MN|$ intersectează pe $|MN|$ în P și pe $|MN|$ în Q. Să se arate că Q este mijlocul lui $|MB|$ și P este mijlocul lui $|MN|$

c) Se notează $\sphericalangle BCN = \alpha$, $\alpha \in (0, \pi/2)$. Să se afle α în cazul particular în care $\| AM \| + \| MN \| + \| NB \| = a\sqrt{2}$.

(Institutul Politehnic București, iulie 1978)

4.83. Să se arate că bisectoarele interioare într-un triunghi oarecare ABC sînt date de formulele $i_a = \dfrac{2}{b+c} bc \cos \dfrac{A}{2}$ și analoagele.

4.84. Să se arate că într-un triunghi oarecare avem

$$2R + 2r = a \operatorname{ctg} A + b \operatorname{ctg} B + c \operatorname{ctg} C.$$

4.85. a) Să se exprime laturile unui triunghi oarecare ABC și lungimea bisectoarei interioare a unghiului A cunoscîndu-se unghiurile A, B, C și înălțimea $|AD| = h_a$ dusă din vîrfui A.

b) Să se arate că $a + b + c = \dfrac{2h \cos \dfrac{A}{2}}{\sin \dfrac{B}{2} \sin \dfrac{C}{2}}$.

4.76. Dacă A, B, C sînt unghiurile unui triunghi oarecare, atunci $m(m-2) \sin \dfrac{A}{2} + \cos \dfrac{B-C}{2} \geqslant 0$, m fiind un parametru real.

(Pitagora, S. 351, *C.I.Ț.*)

4.87. Între elementele unui triunghi există inegalitatea:

$$8abc \sin^2 A \cdot \sin^2 B \cdot \sin^2 C \leqslant p^3.$$

4.88. Să se arate că într-un triunghi oarecare

$$\sum \left[a \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} \right) \operatorname{tg} \frac{A}{2} \right] \geqslant 4.$$

4.89. Să se arate că dacă $0 < a < 180°$, $0 < b < 180°$ și $a + b < 180°$ atunci

$$16[\sin^2 (a+b) - (\sin a + \sin b)^2][\sin^2 (a+b) - (\sin a - \sin b)^2] + 27 \geqslant 0.$$

(G.M.B., 10 111, *C.I.Ț.*)

4.90. Să se arate că dacă între laturile a, b, c ale unui triunghi ABC avem relația $(b+c)(b+c-a) = 2bc$, atunci $r_a^2 = r_b r_c$, unde r_a, r_b, r_c sînt razele cercurile exînscrise.

4.91. Ce relație există între laturile triunghiului ABC dacă

$$\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \cos \frac{B-C}{2} \sin \frac{A-C}{2} \sin \frac{A-B}{2} ?$$

4.92. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC avem

$$\sum \left[a \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} \right) \operatorname{tg} \frac{A}{2} \right] = \frac{2R}{r}.$$

4.93. Să se arate că în orice triunghi avem

$$(b-c) \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + (c-a) \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + (a-b) \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = 0.$$

4.94. Să se arate că într-un triunghi oarecare $4Rr_ar_br_c = pabc$.

4.95. Să se arate că într-un triunghi oarecare

$$\frac{a^2}{r_a(r_b + r_c)} + \frac{b^2}{r_b(r_a + r_c)} + \frac{c^2}{r_c(r_a + r_b)} = 2.$$

4.96. Să se arate că într-un triunghi oarccare ABC avem

$$r_a(r_b + r_c) + r_b(r_c + r_a) + r_c(r_a + r_b) = 2p^2.$$

4.97. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil unde $\| AB \| = a$, $b = \| BC \|$, $\| DA \| = d$. Să se arate că avem $\cos A = \dfrac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}$;

$\sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-d)}{ad + bc}}$; $\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{ad + bc}}$; unde $2p = a + b + c + d$, $\| BD \| = \sqrt{\dfrac{(ab + cd)(ac + bd)}{bc + ad}}$.

4.98. Într-un paralelogram $ABCD$ fie $a = \sphericalangle CAB$ și $x = \sphericalangle CAD$ în așa fel că $a < x$. Fie E și F proiecțiile lui B și D pe diagonala $| AC |$.

a) Să se exprime lungimea segmentului $| EF |$ în funcție de unghiurile a și x și de diagonala $\| AC \| = m$.

b) Unghiul a fiind dat, să se calculeze $\operatorname{tg} x$ în cazul cînd E și F împart diagonala $| AC |$ în trei părți egale.

c) Din valoarea găsită la punctul b) să se construiască grafic unghiul x.

(Institutul Politehnic, București)

4.99. Fie patrulaterul inscriptibil căruia i se cunosc laturile $\| AB \| = a$, $\| BC \| = b$, $\| CD \| = c$, $\| DA \| = d$. Să i se calculeze diagonalele $\| AC \| = x$ și $\| BD \| = y$.

4.100. Să se rezolve patrulaterul inscriptibil $ABCD$ cunoscînd $\| AB \| = a$, $\| BC \| = b$, și diagonalele $\| AC \| = e$, $\| BD \| = f$.

4.101. Să se rezolve patrulaterul inscriptibil $ABCD$, cunoscînd laturile $\| AB \| = a$, $\| BC \| = b$, $\| CD \| = c$ și R raza cercului circumscris.

4.102. Punctele $A, B, C, D, \ldots$ sînt vîrfurile unui poligon regulat. Știind că $\dfrac{1}{\| AB \|} = \dfrac{1}{\| AC \|} + \dfrac{1}{\| AD \|}$, să se afle cîte laturi are poligonul.

4.103. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC avem

$$\sin\frac{B - C}{2} = \frac{b - c}{a}\cos\frac{A}{2}.$$

4.104. Un trapez cu baza mare l și avînd unul din unghiurile formate de baza mare cu laturile neparalele egal cu α, este baza unei piramide P. Presupunem că unghiul diedru al piramidei care are drept muchie baza mare a trapezului este drept. De asemenea, presupunem că fiecare din muchiile laterale ale piramidei face cu baza acesteia un unghi egal cu β. Să se calculeze volumul piramidei P în funcție de l, α, β.

(Facultatea de matematică-mecanică, București)

4.105. Diagonala unui paralelipiped dreptunghic face cu cele trei muchii care pleacă din același vîrf unghiurile x, y, z. Să se arate că

a) $1 + \cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0$.

b) $\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 y} + \frac{1}{\cos^2 z} \geqslant 9$.

(G.M.B., 14100, *C.I.Ț.*)

4.106. Fie un punct P situat între două drepte paralele (d_1), (d_2) la distanțele a și b de cele două paralele. Din punctul P să se ducă două drepte PA și PB, unde $A \in d_1$ și $B \in d_2$ astfel că $PA \perp PB$. Fie x unghiul format de PA cu perpendiculara comună dreptelor paralele. Să se afle unghiul x astfel ca aria PAB să fie minimă.

4.107. Se dă un trapez $ABCD$ în care unghiurile A și B sînt drepte, iar linia mijlocie $\| EF \| = a$ este jumătatea laturii $\| AB \|$. Însemnînd cu α unghiul dreptelor EF, CD presupus mai mic decît 90°, să se exprime cu ajutorul lui a și α: a) aria triunghiului DEC, b) aria totală și volumul trunchiului de con născut prin rotirea trapezului în jurul lui AB. c) Fiind dat a să se determine α, astfel încît volumul trunchiului de con să fie egal cu volumul unei sfere date de rază m. d) Să se determine valoarea lui m pentru care volumul determinat la punctul c) are cea mai mică valoare.

(Institutul politehnic, București, 1980)

4.108. O prismă dreaptă are ca bază un triunghi ABC cu laturile $\| AB \| = 6$ m, $\| BC \| = 10$ m, $\| AC \| = 14$ m, muchiile laterale fiind $\| AB' \|$, $\| BB' \|$, $\| CC' \|$, $\| DD' \|$.

Un plan care trece prin latura $| AC |$ întîlnește muchia $| BB' |$ într-un punct M astfel că $\sphericalangle AMC = 90°$.

Să se calculeze tangenta unghiului diedru format de planul secțiunii AMC cu planul orizontal.

(G.M., 13159, *C.I.Ț.*)

4.109. O piramidă $VABC$ are toate fețele egale cu baza care este un triunghi ascuțitunghic ABC. Notăm cu x, y, z unghiurile diedre formate de baza ABC cu fețele VBC, VAC, VAB.

Să se arate că:

a) $\frac{\sin x}{\sin A} = \frac{\sin y}{\sin B} = \frac{\sin z}{\sin C}$.

b) $\cos x + \cos y + \cos z = 1$; $\sec x + \sec y + \sec z \geqslant 9$.

(G.M.B., 14909, *C.I.-Ț*

4.110. Fie un paralelipiped oblic la care cele trei muchii ce pleacă dintr-un vîrf fac două cîte două unghiuri de 60°. Știind că lungimea muchiilor sînt a, b, c, să se afle volumul acestui paralelipiped.

4.111. Într-o piramidă regulată notăm cu n numărul laturilor, cu m mărimea laturii bazei și cu m' muchia laterală. Să se arate că $\frac{m}{m'} < 2 \sin \frac{180°}{n}$.

4.112. Fie patru puncte din spațiu A, B, C, D, iar G_a, G_b, G_c, G_d centrele de greutate ale triunghiurilor BAC, ACD, ABD, ABC. Notăm cu M mijlocul segmentului care unește mijloacele segmentelor $| AB |$ și $| CD |$.

a) Să se arate că $\mathbf{AB} + \mathbf{AC} + \mathbf{AD} = 4\mathbf{AM}$ și analoagele: $\mathbf{MG}_a + \mathbf{MG}_b + \mathbf{MG}_c + \mathbf{MD}_a = 0$.

b) Cunoscînd lungimile $\| AB \| = b$, $\| AC \| = c$, $\| AD \| = d$, $\sphericalangle DAC = \beta$, $\sphericalangle BAD = \gamma$, $\sphericalangle BAC = \delta$, să se calculeze lungimea $\| AM \|$ și $\cos (BAM)$, $\cos (CAM)$, $\cos (DAM)$.

(G.M., 1977, *C.I.-Ț.*)

4.113. O placă triunghiulară ABC se îndoaie în jurul liniilor mijlocii ale triunghiului pînă ce vîrfurile A, B, C se unesc într-un punct V formînd tetraedrul $VA_1B_1C_1$, unde A_1, B_1, C_1 sînt mijloacele laturilor $| BC |$, $| AC |$, $| AB |$.

a) Să se arate că au loc relațiile $\cos \alpha = \dfrac{2 \cos A}{\sin B \sin C} - 1 = 1 - 2 \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C$, unde α este unghiul diedru corespunzător muchiei $| B_1C_1 |$.

b) Să se arate că volumul tetraedrului este

$$V = \frac{1}{3} R^3 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \sqrt{| \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C |},$$

unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

(Concurs, Etapa finală, 1966, *C.I.-Ț.*)

4.114. Să se arate că unghiurile diedre ale unui dodecaedru convex regulat sînt date de formula $\cos \alpha = \dfrac{a_5(l_5 - l_5')}{l^5(2a_5^2 + a^5 - 1)}$, unde a_5 și l_5 sînt respectiv apotema și latura pentagonului regulat convex înscris în cercul de rază egală cu unitatea și l_5' este latura pentagonului regulat stelat înscris în același cerc.

(S.G.M., 1935, 188, *C.I.Ț.*)

4.115. Într-un vas emisferic neted de rază $\| OC \| = x$ este așezată o bară omogenă $| AB |$, de lungime $2a$ și greutate P. Să se determine unghiul φ format de bară cu planul orizontal pentru poziția de echilibru.

4.116. Un con și un trunchi de con sînt echivalente și au înălțimile egale. Să se demonstreze că din razele bazelor lor se poate construi un triunghi. Să se determine unghiul cel mare al acestui trlnghi.

4.117. Fie A, B, C unghiurile unui triunghi ABC. Avem

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2} = 2 \sin \left(90° - \frac{C}{2}\right) \cos \frac{A - F}{2} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A - B}{2} \leqslant 2 \cos \frac{C}{2}.$$

La fel vom obține încă două inegalități asemănătoare și înmulțite obținem $\Pi(\sin A + \sin B) \leqslant 8\pi \cos \dfrac{A}{2}$.

4.117. Care poate fi cea mai mare arie a unui trlunghi de laturi a, b, c care verifică inegalitățile: $0 \leqslant a \leqslant 1 \leqslant b \leqslant 2 \leqslant c \leqslant 3$.

4.119. Într-un tetraedru echifacial $ABCD$ notăm cu α, β, γ unghiurile OAB, OAC, OAD, unde O este centrul sferei circumscrise tetraedrului.

Să se arate că: $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$.

4.120. Să se calculeze volumul unui tetraedru, $VABC$, cunoscînd laturile a, b, c ale triunghiului ABC și unghiurile diedre α, β, γ făcute respectiv de fețele VBC, VAC, VAB cu planul ABC.

SOLUȚII ȘI INDICAȚII

4.1. Avem $\frac{\| BM \|}{\sin 45^\circ} = \frac{l}{\sin B}$; $\| BM \| = \frac{l\sqrt{2}}{2 \sin B}$, analog $\| CM \| = \frac{l\sqrt{2}}{2 \sin C} = \frac{l\sqrt{2}}{2 \cos B}$.

$\| BM \| + \| CM \| = a = \frac{l\sqrt{2}}{2}\left(\frac{l}{\sin B} + \frac{l}{\cos B}\right)$, de unde se află unghiul B

4.2. Fie α unghiul format de direcția AM cu cateta $| AC |$. Notăm. $\| AB \| = c$, $\| BC \| = a$, $\| AC \| = b$. Din relațiile $\| MC \| = \frac{b \sin \alpha}{\sin (C + \alpha)}$; $\| MB \| = \frac{c \cos \alpha}{\sin (C + \alpha)}$; $\| AM \| = \frac{b \sin C}{\sin (C + \alpha)}$ rezultă relația din enunț

4.3. $\sin A = \sin (180^\circ - B - C) = \sin (B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$. Notăm $\frac{a}{\sin A} = t$, deci $\sin A = \frac{a}{t}$, ... obținem

$\frac{a}{t} = \frac{b}{t} \cos C + \frac{c}{t} \cos B$ sau $a = b \cos C + c \cos B$ și analoagele.

Rezultă $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ și analoagele.

4.4. Știind că $a = 2R \sin A$ ... obținem

$$\frac{2R (2 \sin B - \sin C)}{2R (2 \sin C - \sin B)} = \frac{\cos C}{\cos B}, \text{ sau}$$

$2 \sin B \cos B - \sin C \cos B = 2 \sin C \cos C - \sin B \cos C.$

$$\sin 2B - \sin 2C = \sin (C - B).$$

$$2 \sin (B - C) \cos (B + C) = -\sin (B - C).$$

de unde $\cos A = 1/2$, deci $A = 60^\circ$

4.5. Folosim relațiile $a = 2R \sin A$ și $b = 2R \sin B$ și relația se mai scrie $\frac{2R \sin A \cos A - 2R \sin B \cos B}{2R \sin A \cos B - 2R \sin B \cos A} + \cos C = 0.$

Simplificăm cu $2R$ și ținem seama de relațiile $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$; $\sin (A - B) = \sin A \cos B - \sin B \cos A$, deci obținem $\frac{\sin 2A - \sin 2B}{2 \sin (A - B)} +$

$+ \cos C = 0$ sau $\frac{\sin (A - B) \cos (A + B)}{\sin (A - B)} + \cos C = \cos (A + B) +$

$+ \cos C = 0$ deoarece $\cos (A + B) = -\cos C$.

4.6. $\dfrac{a+b}{\sin A+\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$. Se obține $\cos\dfrac{A-B}{2}\cdot$

$\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cos 15°}$ Rezultă $A=105°30'$ și $B=44°30'$.

4.7. Avem $\sphericalangle C=180°-32°40'-70°20'=77°$.

Folosim teorema sinusului $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

$\lg a=\lg b+\lg\sin A-\lg\sin B=3{,}48714+\bar{1}{,}73219-\bar{1}{,}97390$

$\lg c=\lg b+\lg\sin C-\lg\sin B=3{,}48714+\bar{1}{,}98872-\bar{1}{,}97390.$

$\lg a=3{,}48714+\bar{1}{,}73219+0{,}02610=3{,}24543,$

$\lg b=3{,}48714+\bar{1}{,}98872+0{,}02610=3{,}50196.$

Rezultă $a=1759{,}66\approx 1759$ m; $b=3176{,}56\approx 3176$ m.

$S=\dfrac{ab\sin C}{2}$; $\lg S=3{,}48714+3{,}24543+\bar{1}{,}98872+\bar{1}{,}69897=6{,}42026$

de unde $S=2\,631\,800$ m$^2=263{,}18$ ha.

4.8. $\sin B=\dfrac{h_c}{a}$; $\sin C=\dfrac{h_b}{a}$; $b=\dfrac{h_c}{\sin A}$; $c=\dfrac{h_b}{\sin A}$; $S=\dfrac{h_bh_c}{2\sin A}\cdot$

Este necesar $h_b\not< a$ și $h_c\not< a$. Avem $\lg_b\leqslant h_c$ deci $C>B$.

$\lg\sin B=\lg 97-\lg 127=\bar{1}{,}88297$, $B=49°47'54''$.

$\lg\sin C=\lg 105-\lg 127=\bar{1}{,}91739$; $C=55°46'8''$.

Cazul I. $A=74°25'58''$; $B=49°47'54''$, $C=55°46'8''$.

$\lg b=\lg h_c-\lg\sin A=2{,}00301$; $b=100{,}69$ m

$\lg c=\lg h_b-\lg\sin A=2{,}03743$; $c=109$ m.

$\lg S=\lg h_b+\lg h_c-\lg\sin A-\lg 2=3{,}72317$, $S=5\,286{,}50$ m^2.

Cazul II. $A=5°58'13''$; $B=49°47'54''$, $C=124°13'53''$.

$\lg b=2{,}96968$, $b=932{,}56$ m

$\lg c=3{,}00410$; $c=1\,009$, m

$\lg S=4{,}68984$; $S=48\,960$ m^2.

Construim mai întîi segmentul $\|BC\|=a$, apoi pe $|BC|$ ca diametru construim un cerc. Din punctele B și C ca centre descriem cercuri cu raze respectiv h_b și h_c.

4.9. Fie $\alpha=\sphericalangle AMB$, unde D este piciorul înălțimii, iar M mijlocul laturii $|BC|$. Avem $\sin\alpha=h_a/m_a$, unde $\alpha<90°$, $\lg\sin\alpha=\lg 63-\lg 71=$ $=\bar{1}{,}94808$; $\alpha=62°32'15''$.

Fie $\sphericalangle MAB=u$. În triunghiul MAB avem

$$\operatorname{tg}\frac{B-u}{2}=\frac{m_a-\frac{1}{2}a}{m_a+\frac{1}{2}a}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2};$$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{(B-u)}{2}=\lg 33{,}5-\lg 108{,}5+\lg\operatorname{ctg}31°16'7''=\bar{1}{,}70619.$$

$B - u = 53°53'44''$, $B + u = 117°27'45''$, de unde:
$B = 85°45'4''$ și $u = 31°47'$.

$\lg c = \lg m_a + \lg \sin \alpha - \lg \sin B = 1{,}80810$, $c = 64{,}283$ m.

Notăm $\sphericalangle MAC = v$. În triunghiul MAC avem

$$\operatorname{tg} \frac{C - v}{2} = \frac{m_a - 0{,}5\,a}{m_a + 0{,}5\,a} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

$$\lg \frac{C - v}{2} = \lg 33{,}5 - \lg 108{,}5 + \lg \operatorname{tg} 31°16'17'' = \bar{1}{,}27299.$$

$C - v = 21°14'19''$; $C + v = \alpha = 62°32'17''$, de unde:
$C = 41°53'17''$, $v = 20°38'57''$.
$\lg b = \lg m_a + \lg \sin \alpha - \lg \sin C = 1{,}97477$, $b = 94{,}356$ m.
$\sphericalangle A = u + v = 52°25'58''$; $S = ah_a/2$;
$\lg S = 1{,}87506 + 1{,}79934 - 0{,}30103 = 3{,}37337$; $S = 2362{,}50$ m^2.

Construim mai întîi triunghiul dreptunghic AMD, apoi măsurăm $\| MB \| = \| MC \| = 0{,}5a$ și obținem vîrfurile B și C.

4.10. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{b - e}{\sin B - \sin C}$; deci $\sin B - \sin C = \dfrac{d \sin A}{a}$ sau $2 \sin \dfrac{B - C}{2} \cos \dfrac{B + C}{2} = 2 \sin \dfrac{B - C}{2} \sin \dfrac{A}{2} =$

$$= \frac{d \sin A}{a} = \frac{2d \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{a}; \quad \sin \frac{B - C}{2} = \frac{d}{a} \cos \frac{A}{2}.$$

Cunoscînd pe $B - C$ și $B + C$, rezultă unghiurile.

4.11. Fie O centrul cercului și A_1 piciorul înălțimii din A. Deoarece AA_1 și AO sînt izogonale, $\sphericalangle CAA_1 = |B - C|$; $|AA_1| = b \sin C = 2R \sin B \sin C = R[\cos(B - C) - \cos(B + C)]$.

Din triunghiul OAA_1 rezultă: $|OA_1|^2 = R^2 + R^2[\cos(B - C) - \cos(B + C)]^2 - 2R^2[\cos(B - C) - \cos(B + C)] \cos(B - C)$.

Deci $|OA_1|^2 = R^2 + R^2[\cos^2(B - C) - \cos^2(B + C)] = R^2(1 - \sin 2A \sin 2B)$.

4.12. Fie $|AB|$ diametrul cercului și $AB \in D$ patrulaterul înscris, $I = AE \cap BD$ și $C = AD \cap BE$.

$S = \dfrac{1}{2} |AE| \cdot |BD| \cdot \sin I$, dar $|AE| = 2R \sin B$ și $|BD| = 2R \sin A$, iar $\sin I = \sin C$, deci $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ și cum $A + B + C = \pi$, maximul are loc dacă $A = B = C$ deci patrulaterul cerut este semihexagonul regulat înscris.

4.13. Ducem $|OI|$ bisectoarea unghiului AOB și fie $G = OI \cup EF$ Avem $= \sphericalangle AOI = \alpha$ și notăm $\sphericalangle FOI = x$; $S = \| CF \| \cdot \| FE \| =$

$= 2 \| CF \| \cdot \| FG \|$. Dar $\| FG \| = R \sin \alpha$, unde $\sphericalangle ACF = \alpha$; $\| AI \| = \| IB \|$; $\sin OCF = \sin \alpha$ deci $\| CF \| = \dfrac{R \sin (\alpha - x)}{\sin \alpha}$.

Deci $S = 2 \| CF \| \cdot \| FG \| = \dfrac{2R^2 \sin x \sin (\alpha - x)}{\sin \alpha}$.

Maximul produsului $\sin x \sin (\alpha - x)$ este cînd $x = \alpha - x$ deoarece $x + \alpha - x = \alpha$ (constant). Rezultă

$$S = \frac{2R^2 \sin x \sin (\alpha - x)}{\sin \alpha} = \frac{2R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = R^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

4.14. Avem $S = \dfrac{1}{2} ab \sin C$ de unde $b = \dfrac{2S}{a \sin C}$; $a^2 - b^2 = a^2 - \left(\dfrac{2S}{a \sin C}\right)^2 = 24$. Rezultă: $a^4 - 24a^2 - \dfrac{4S^2}{\sin^2 C} = 0$ sau $a^4 - 24a^2 - 16S^2 = 0$, de unde $a^2 = 12 \pm \sqrt{144 + 16S^2}$ (satisface numai semnul plus). Rezultă $a = 7$ m, $b = 5$ m și $c \approx 3{,}66$ m; $\sphericalangle A = 106°52'56''$ și $\sphericalangle B = 43°7'4''$.

4.15. Avem: $d_a = R \cos A$; $a = 2R \sin A$, $d_a + \dfrac{a}{2} \operatorname{tg} \dfrac{A}{2} = R \left(\cos A + \sin A \operatorname{tg} \dfrac{A}{2}\right) = R \cdot \dfrac{\cos\left(A - \dfrac{A}{2}\right)}{\cos \dfrac{A}{2}} = R$.

Analog se deduc și celelalte relații.

4.16. Avem $\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \dfrac{\sin (B + C)}{\sin B \sin C} = \dfrac{\sin A}{\sin B \sin C}$ și apoi ținem seama de formula $S = \dfrac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$.

4.17. Folosim formulele $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$ și $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ și facem înlocuirile.

Pentru a doua relație folosim relațiile $b = \dfrac{a \sin B}{\sin A}$, $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$ și facem înlocuirile.

$$\frac{a \sin B \cos B}{\sin A} + \frac{a \sin C \cos C}{\sin A} = \frac{a (\sin 2B + \sin 2C)}{2 \sin A} =$$
$$= \frac{a}{\sin A} \sin \frac{2B + 2C}{2} \cos \frac{2B - 2C}{2} = a \cos (B - C).$$

4.18. Din teorema sinusului avem $\frac{a}{\sin A} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C}$ sau

$$a = \frac{2p \sin A}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{4p \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}.$$

4.19. Din teorema sinusului avem $\frac{b-a}{\sin B - \sin A} = \frac{c}{\sin A}$;

$$\frac{b-a}{2 \sin \frac{B-A}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{c}{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}, \text{ sau } \frac{b-a}{c} = \frac{\sin \frac{B-A}{2}}{\cos \frac{C}{2}}.$$ Analog formula a doua.

4.20. Avem $\frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 A} = \frac{\sin (A-B) \sin (A+B)}{\sin^2 A} =$

$= \frac{\sin (A-B) \sin C}{\sin^2 A}$ și analoagele. Se presupune $a > b > c$ și se constată semnul minus al părții întîi a egalității; $A - B > 0$, $B - C > 0$, iar $C - A < 0$

4.21. Din teorema sinusului obținem $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} =$

$$= \frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}},$$ de unde rezultă

$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$ și analoagele.

4.22. Avem $\frac{a}{b+c} = \frac{\sin A}{\sin B + \sin C} = \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}} =$

$$= \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B-C}{2}} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin \left(\frac{A}{2} + C\right)}, \text{ deoarece } \frac{B-C}{2} + \frac{A}{2} + C = \frac{\pi}{2}.$$

Dar $\pi - (A/2 + C) = A + B + C - A/2 - C = A/2 + B$, deci $\sin (A/2 + C) = \sin (A/2 + B)$, relația cerută fiind astfel arătată.

4.23. Aplicăm formulele

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{1+3+2\sqrt{3}+6-4}{2(1+\sqrt{3})\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{6}(1+\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45°.$$

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{4+1+3+2\sqrt{3}-6}{2\cdot 2\cdot(1+\sqrt{3})} = \frac{1}{2} = \cos 60°.$$

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{4+6-4-2\sqrt{3}}{2\cdot 2\sqrt{6}} = \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{4}}{4} =$$

$= \cos 75°$.

Într-adevăr, $\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-2}{4}$. Se mai poate calcula și astfel $\sphericalangle C = 180° - \sphericalangle A - \sphericalangle B = 180° - 45° - 60° = 75°$, deci există un astfel de triunghi.

Existența triunghiului mai este justificată și de faptul că orice latură este mai mică decît suma celorlalte două laturi.

S-a luat $a_1 = 2$; $b_1 = 1 + \sqrt{2}$ și $c_1 = \sqrt{6}$ întrucît din relația $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ se simplifică factorul de proporționalitate $a = ka_1$, $b = ka_2$, $c = ka_3$.

Altă verificare $\sqrt{6} < 2 + 1 + \sqrt{3}$ sau $\sqrt{6} < 3 + \sqrt{3}$ sau $6 < 9 + 3 + 6\sqrt{3}$.

4.24. Avem $\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{78}{130} = 0{,}6$; $\cos^2 A = 1 - 0{,}6^2 = 0{,}64$; $\cos A = 0{,}8$; $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-0{,}8}{1+0{,}8}} = \frac{1}{3}$. Din relația $r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ avem $b + c = a = 2r\operatorname{ctg}\frac{A}{2} = 78 + 2\times 28\times 3 = 246$.

$S = \frac{1}{2}bc\sin A = pr$ sau $bc = \frac{(a+b+c)r}{\sin A} = \frac{324\times 28}{0{,}6} = 15\,120$, b și c sînt rădăcinile ecuației în y:

$y^2 - 246y + 15\,120 = 0$, deoarece $b > c$ avem $b = 126$ și $c = 120$

4.25. Fie $AC = r\sqrt{3}$ latura trlunghiului echilateral înscris în cerc, care subîntinde arcul $\overset{\frown}{AC} = 120°$. Latura $\|AB\| = r/2$ poate fi cu extremitatea B în afara arcului $\overset{\frown}{AC}$ sau pe arcul $\overset{\frown}{AC}$. Deci avem două cazuri.

a) Cazul B în afara arcului $\overset{\frown}{AC} = 120°$. Avem $\overset{\frown}{BC} = 120° + x$, unde arc $\overset{\frown}{AB} = x$. Deci coarda $\|BC\| = 2r\sin\frac{120°+x}{2} = 2r\sin\left(60° + \frac{x}{2}\right)$ și

$\| AB \| = 2r \sin \frac{x}{2} \Rightarrow \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{4}$ și $\cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$, iar $\| BC \| =$

$$= 2r\left(\sin 60° \cdot \cos \frac{x}{2} + \cos 60° \sin \frac{x}{2}\right) = \frac{r}{4}(3\sqrt{5} + 1).$$

b) Cazul B pe arcul $\widehat{AC} = 120°$, dă: $\| BC \| = 2r \sin\left(60° - \frac{x}{2}\right) =$

$= \frac{r}{4}(3\sqrt{5} - 1)$.

4.26. Se descompune forța **P** = 200 kg, verticală după direcțiile celor două fire. Se găsește $\| \mathbf{AB} \| = 130{,}5$ kg și $\| \mathbf{AC} \| = 175{,}8$ kg.

4.27. a) $\triangle AbB = \triangle AcC \Rightarrow \| AB \| = \| AC \|$. Ca $\triangle ABC$ să fie echilateral, trebuie ca $\| AB \| = \| AC \| = \| BC \| = bc = 2a'b = 2x \operatorname{tg} \alpha$. (1)

Dar $\| AB \|^2 = \| Ab \|^2 + h^2$ și $\| Ab \| = \frac{x}{\cos \alpha}$ astfel că $\| AB \|^2 =$

$= \frac{x^2}{\cos^2 \alpha} + h^2 = (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)x^2 + h^2$ și ținînd seama de (1), avem:

$4x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)x^2 + h^2 \Rightarrow x = \frac{h}{\sqrt{3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 1}}$, iar latura triunghiului echilateral $\| AB \| = \frac{2h \operatorname{tg} \alpha}{3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 1}$. Ca problema să fie posibilă, trebuie ca $3 \operatorname{tg}^2 \alpha > 1 \Rightarrow \alpha \in (30°, 90°)$.

b) Fie $| Aa'' |$ înălțimea în $\triangle ABC$ și $\omega \in | Aa'' |$ centrul cercului circumscris acestui trlunghi, iar raza sa $\| A\omega \| = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}h \operatorname{tg} \alpha}{3\sqrt{3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 1}}$.

Fie $| Ay |$ perpendiculara în A pe planul orizontal Abc.

În planul vertical Q determinat de $| Ay |$ și $| a'a'' |$ este conținută dreapta Aa'' și ducem în acest plan perpendiculara pe Aa'' ,care taie pe Ay în S. Evident dreapta BC este perpendiculară pe planul Q și deci pe $S\omega$. Astfel că $S\omega \perp$ planul ABC, este înălțimea conului. Aria laterală a conului este $A_l = \pi \cdot | A\omega | \cdot | SA |$. Din $\triangle SA\omega \sim \triangle Aa'a''$ avem:

$$\frac{\| SA \|}{\| Aa' \|} = \frac{\| A\omega \|}{\| a'a'' \|} \qquad (2)$$

Dar $\| Aa'' \| = \frac{\| AC \| \sqrt{3}}{2}$ și $\| A\omega \| = \frac{\| AC \| \sqrt{3}}{3}$, $\| AC \| =$

$= \frac{2h \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 1}}$, $\| a'a'' \| = h$ și astfel $\| SA \| = \frac{2h \operatorname{tg}^2 \alpha}{3h \operatorname{tg}^2 \alpha}$. Deci $A_l =$

$= \frac{4\pi \sqrt{3 \operatorname{tg}^3 \alpha \cdot x^3}}{3h}$.

Aria sferei. Dreapta $S\omega$ prelungită intersectează pe Aa' în punctul O, centrul sferei căutate de rază $| AO |$. Din $\triangle A\omega 0 \sim \triangle Aa'a''$ avem:

$$\frac{\| AO \|}{\| Aa'' \|} = \frac{\| A\omega \|}{\| Aa' \|} \Rightarrow \| AO \| = \frac{\| AC \| \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}h \operatorname{tg} \alpha}{3\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \alpha - 1} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \| AC \| \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{2h \operatorname{tg}^2}{\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = 2x \operatorname{tg}^2 \alpha, \text{ și deci } A_{sf} = 4\pi \cdot | AO |^2 =$$

$$= 16\pi x^2 \operatorname{tg}^4 \alpha.$$

4.28. Notăm cu A', B', C' mijloacele laturilor, iar $| A'A'' |$, $| B'B'' |$, $| C'C'' |$ înălțimile triunghiului $A'B'C'$. Dreptele AA'', BB'', CC'' întîlnesc pe $| BC |$, $| CA |$, $| AB |$ respectiv în A''', B''', C'''.

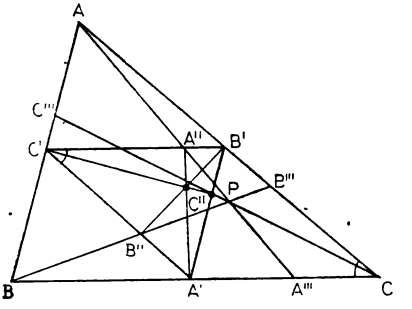

Fig. 4.28

Avem $B'C' \| BC \rightarrow \frac{\| A''C' \|}{\| A''B' \|} = \frac{\| BA''' \|}{\| A'''C \|}$.

Dar $\| A''C' \| = \| A'B' \| \cos C = \frac{b}{2} \cos C$; $\| A''B' \| = \frac{c}{2} \cos B$;

$\frac{\| A''C' \|}{\| A''B' \|} = \frac{b \cos C}{c \cos B}$. Analog avem: $\frac{\| C''B' \|}{\| C''A' \|} = \frac{a \cos B}{b \cos A}$ și $\frac{\| B''A' \|}{\| B''C \|} = \frac{c \cos A}{a \cos C} \Rightarrow \frac{\| A''C' \|}{\| A''B' \|} \cdot \frac{\| C''B' \|}{\| B''C' \|} \cdot \frac{\| B''A' \|}{\| B''C' \|} = 1$ conform reciprocei teoremei lui *Ceva*.

4.29. Avem $\| A_1M \| = R \sin | B - C |$; $\| HM \| = 2R \cos B \cos C$.

$\operatorname{tg} x = \frac{\| A_1M \|}{\| HA_1 \|} = \frac{\sin | B - C |}{2 \cos B \cos C} = \frac{1}{2} | \operatorname{tg} B - \operatorname{tg} C |$.

4.30. Cablul fiind sub o tensiune **T**, asupra fiecărei articulații vor acționa două forțe egale îndreptate după laturile triunghiului ABC. Luînd

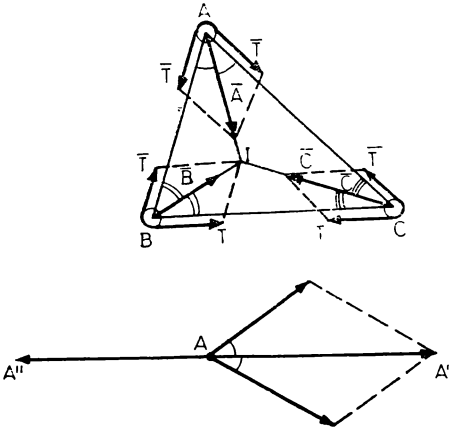

Fig. 4.30

separat punctul A și forțele care acționează asupra lui, observăm că: forța de reacțiune **A** din articulația A este egală și de semn contrar cu rezultanta

celor două forțe **T**. Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul ATA' avem $\frac{\|\mathbf{A}\|}{\sin(\pi - A)} = \frac{\|\mathbf{T}\|}{\sin\frac{A}{2}}$ sau $\frac{\|\mathbf{A}\|}{\sin A} = \frac{\|\mathbf{T}\|}{\sin\frac{A}{2}}$. Deci: $\|\mathbf{A}\| = \frac{\|\mathbf{T}\| \sin A}{\sin\frac{A}{2}} =$

$$= \|\mathbf{T}\| \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = 2\,|\mathbf{T}|\cos\frac{A}{2}.$$

Analog obținem și pentru celelalte unghiuri $\|\mathbf{B}\| = 2\,|\mathbf{T}|\cos\frac{B}{2}$ și $\|\mathbf{C}\| = 2\,\|\mathbf{T}\|\cos\frac{C}{2}$.

4.31. Avem $\frac{a}{\sin A} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C}$. Dar $\sin B + \sin C = 2\sin\frac{B+C}{3} \cdot$ $\cdot \cos\frac{B-C}{2} = 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$, iar $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ și atunci vom deduce relația $a\cos\frac{B-C}{2} = (b+c)\sin\frac{A}{2}$. Însă, pe de altă parte, avem

$$\cos\frac{B-C}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos(B-C)}{2}}\,; \quad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}.$$

Înlocuind în (1) și ridicînd la pătrat avem

$$a^2 \cdot \frac{1+\cos(B-C)}{2} = (b+c)^2 \cdot \frac{1-\cos A}{2}.$$

4.32. Cunoscînd laturile unui triunghi oarecare se pot calcula unghiurile $\sphericalangle DAB - \sphericalangle CAB = \sphericalangle DAC$ și apoi $\|DC\|^2 = \|AD\|^2 + \|AC\|^2 - 2\,\|AD\| \cdot \|AC\| \cdot \cos(DAC)$.

Pentru a verifica dacă patrulaterul $ABCD$ este plan trebuie verificată relația: $\sphericalangle DAC + \sphericalangle CAB + \sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle ACD + \sphericalangle CDB + \sphericalangle BDA = 360°$.

4.33. Avem $\sphericalangle APB = 180° - \sphericalangle BAP - \sphericalangle ABP$. Din teorema sinusurilor aflăm: $\|AP\| = \frac{\|AB\|\sin(ABP)}{\sin(APB)}$; și $\|BP\| = \frac{\|AB\sin(BAP|}{\sin(APB)}$ distanța căutată este $\|AP\|\sin(BAP$.

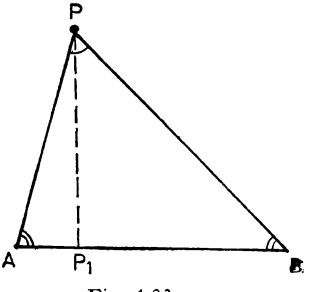

Fig. 4.33.

4.34. Din datele problemei rezultă și unghiurile ADB și DBC. Cu ajutorul teoremei sinusului se calculează distanțele cerute.

Patrulaterul $ABCD$ este plan numai dacă $\sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle DAB = 360°$. În caz că suma este mai mare ca 360°, patrulaterul $ABCD$ nu este în același plan, iar dacă această sumă rezultă mai mică decît 360°, atunci sînt greșeli de calcul.

4.35. În patrulaterul inscriptibil $OPAQ$ avem $\sphericalangle POA = \sphericalangle PQA$. Din triunghiul APQ avem: $\| PQ \|^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos (PAQ) = m^2 + n^2 + 2mn \cos \alpha$.

Din teorema sinusurilor rezultă

$$\frac{\| PQ \|}{\sin (PAQ)} = \frac{\| PC \|}{\sin \alpha} = \frac{m}{\sin (POA)} = \frac{\sqrt{m^2 + n^2 + 2mn \cos \alpha}}{\sin \alpha} = | OA |.$$

4.36. Folosim relațiile $a = 2R \sin A$ și analogele

$$2 \sin A = \sin B + \sin C = 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}.$$

Folosind și relația $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$, obținem $2 \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B-C}{2}$;

iar relația a doua devine $\frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} - \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B-C}{2}} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

4.37. Avem: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ și $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$ de unde

$$bc = \frac{4m_a^2 - a^2}{4 \cos A} = \frac{3a^2}{4 \cos A} = \frac{2S}{\sin A} \text{ sau } S = \frac{3a^2 \operatorname{tg} A}{8}.$$

4.38. Triunghiurile ABC, B_1BA, A_2AC, BB_1B, ACC_1, CBC_2 sînt asemenea.

$$\| AA_1 \| = \frac{bc}{a}, \ldots, \| CA_1 \| = \| BA_1 \| - a = \frac{c^2 - a^2}{a}; \| BA_2 \| = a - \frac{b^2}{a}, \ldots$$

$$\| A_1A_2 \| = \| CA_2 \| + \| CA_1 \| = \frac{b^2 + c^1 - a^2}{a} = \frac{2b \cos A}{a}.$$

Rezultă relațiile din enunț.

4.39. Folosim relațiile: $a = 2R \sin A$ și analoagele; $\Sigma \sin 2A = 4 \sin A \sin B \sin C$; $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$.

Prima parte a relației din enunț se scrie

$$\Sigma(a^2 \operatorname{tg} A) = 4R^2[(1 - \cos^2 A) \operatorname{tg} A + (1 - \cos^2 B) \operatorname{tg} B + (1 - \cos^2 C) \operatorname{tg} C] =$$

$$= 4R^2[(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C) - \frac{1}{2} (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)] =$$

$$= 4R^2 \sin A \cdot \sin B \sin C(\sec A \sec B \sec C - 2) = 2S (\sec A + \sec B + \sec C - 2).$$

4.40. Avem $C = 180° - 4A$ și aplicînd teorema sinusului avem $\frac{a}{\sin A} =$

$$= \frac{b}{\sin 3A} = \frac{c}{\sin 4A} \text{ și de aici } \frac{a+b}{\sin A + \sin 3A} = \frac{c}{\sin 4A} \text{ și } \frac{b-a}{\sin 3A - \sin A} =$$

$$= \frac{c}{\sin 4A}.$$

Rezultă $\frac{b^2-a^2}{\sin^2 3A-\sin^2 A}=\frac{c^2}{\sin^2 4A}$ dar se cunoaște egalitatea $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$ și deci $\sin^2 3A-\sin^2 A=\sin 4A\sin 2A$.

$$\frac{b^2-a^2}{\sin 4A\sin 2A}=\frac{c^2}{2\sin 2A\cos 2A\sin 4A}\Rightarrow\frac{b^2-a^2}{1}=\frac{c^2}{2\cos 2A}=$$

$$=\frac{c^2}{2(1-2\sin^2 A)}. \qquad (1)$$

Din $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin 3A}=\frac{b}{3\sin A-4\sin^3 A}\Rightarrow a=\frac{b}{3-4\sin^2 A}$ (2)

Din (1) și (2) eliminăm pe $\sin^2 A$. Din (2) scoatem $4\sin^2 A=\frac{3a-b}{a}$ și introducînd în (1) avem $b^2-a^2=\frac{c^2}{2-\frac{3a-ba}{a}}=\frac{ac^2}{b-a}$ și deci $(b^2-a^2)(b-a)=ac^2$.

Dar reciproca este adevărată? Relația între laturi fiind omogenă și laturile fiind proporționale cu sinusurile unghiurilor opuse, această relație se transformă în
$(\sin^2 B-\sin^2 A)(\sin B-\sin tA)=\sin A\sin^2 C=\sin A\sin^2(A+B)$.
Dar $\sin^2 B-\sin^2 A=\sin(B+A)\sin(B-A)$ și relația de mai sus devine $\sin(B+A)\sin(B-A)(\sin B-\sin A)=\sin A\sin^2(A+B)$ și cum $\sin(B+A)\neq 0$, după simplificare, rămîne $\sin(B-A)(\sin B-\sin A)=\sin A\cdot\sin(A+B)$, sau $\sin B\sin(B-A)-\sin A\sin(B-A)=\sin A\sin(A+B)$ și $\sin B\sin(B-A)=\sin A\,[\sin(A+B)+\sin(B-A)]=2\sin A\cdot\sin B\cos A$ și în fine $\sin(B-A)=\sin 2A$ căci $\sin B\neq 0$ și de aici: $B-A=2A\Rightarrow B=3A$. Astfel că și reciproca este adevărată.

4.41. $S=\frac{abc}{4R}=\frac{a_1b_1c_1}{4R}$; $a_1^2=2R^2-2R^2\cos(C_1OB_1)$ dar $\sphericalangle B_1OC_1=2\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\pi-A$, deci

$a_1^2=2R^2[1-\cos(\pi-A)]=2R^2(1+\cos A)=4R^2\cos^2\frac{A}{2}$;

$a_1=2R\cos\frac{A}{2}$, $b_1=2R\cos\frac{B}{2}$, $c_1=2R\cos\frac{C}{2}$. Avem

$S_1=2R^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=2R^2\frac{p}{4R}=\frac{1}{2}pR$, dar $S=pr$. Rezultă că $S=S_1$ dacă $R=2r$, care are loc cînd triunghiul ABC este echilateral.

4.42. Avem $2S=ad_a+bd_b+cd_c$; $d_a=R\cos A$, ... $abc=4RS$, $a=b\cos A+a\cos B$, ... Rezultă $\Sigma a^3d_a=2S(a^2+b^2+c^2)-\Sigma ab(bd_c+ad_a)=2S(a^2+b^2+c^2-6R^2)$.

Se mai pot folosi și relațiile: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, ...

4.43. Folosim relațiile $a = 2R \sin A$ și analogele și relația cunoscută $\Sigma \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B = 1$.

4.44. Deoarece $AH \perp BC$ și fie $O = AH \cup PM$ (deci O centrul cercului circumscris triunghiului, $\| AO \| = R$). $\triangle PBN \sim \triangle AON$

$$\frac{\| AO \|}{\| PB \|} = \frac{\| AN \|}{\| PN \|} \Rightarrow \| PB \| \cdot \| AN \| = R \cdot \| PN \|. \tag{1}$$

În $\triangle PAB$, $| PN |$ este bisectoare, $\frac{\| NB \|}{\| NA \|} = \frac{\| PB \|}{\| PA \|}$, sau

$$\frac{\| NB \|}{\| NA \|} = \frac{\| PB \|}{\| PC \|} \Rightarrow \| PB \| \cdot \| AN \| = \| BN \| \cdot \| PC \|. \tag{2}$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă $R \cdot \| PN \| = \| NB \| \cdot \| PC \| \Rightarrow R = \frac{\| NB \|}{\| PN \|} \cdot \| PC \|$.

Aplicînd teorema bisectoarei în triunghiul MAN, rezultă

$$\frac{\| NO \|}{\| OM \|} = \frac{\| AN \|}{\| AM \|} \Rightarrow \frac{\| NO \|}{\| AN \|} = \frac{\| OM \|}{\| AM \|} = \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\triangle PBN \sim \triangle AON \Rightarrow \frac{\| PN \|}{\| AN \|} = \frac{\| NB \|}{\| NO \|}, \text{ deci } \frac{\| NB \|}{\| PN \|} = \frac{\| NO \|}{\| AN \|} =$$

$$= \frac{\| OM \|}{\| AM \|} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} B \Rightarrow R = | PC | \cdot \operatorname{tg} \alpha = | PC | \cdot \operatorname{ctg} B.$$

4.45. Fie $| AA_1 |$, $| BB_1 |$, $| CC_1 |$ înălțimile și H ortocentrul. Avem

$$2S = \| BC \| \cdot \| HA_1 \| + \| CA \| \cdot \| HB_1 \| + \| AB \| \cdot \| HC_1 \| \tag{1}$$

Dar $\| BA_1 \| = \| HA_1 \| \operatorname{tg} C$; $\| CA_1 \| = \| HA_1 \| \operatorname{tg} B$; $a = \| BA_1 \| + \| A_1C \| = \| HA_1 \| (\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)$, deci $\| HA_1 \| = \frac{a}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}$ și analoagele.

Înlocuim în (1) și se obține relația din enunț. Pentru a doua relație avem

$$2S = ar + br + cr \tag{2}$$

Dar $\| BD \| = \| ID \| \operatorname{ctg} \frac{B}{2}$, $\| CD \| = \| ID \| \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$ și rezultă $a = r\left(\operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2}\right)$ și analoagele.

Înlocuind pe r în (2) obținem a doua relație.

4.46. Avem $2S\Sigma \frac{\sin^2 A}{\sin A \sin B \sin C} = \frac{2S}{\sin A \sin B \sin C} \cdot \Sigma \sin^2 A =$

$$= \frac{abc}{2R \sin A \sin B \sin C} \cdot \Sigma \frac{a^2}{4R^2} = \frac{abc}{8R^3 \sin A \sin B \sin C} \cdot \Sigma a^2 = \Sigma a^2.$$

4.47. Aplicăm relațiile sinusului în triunghiurile AZB, BXC, CYA și notăm $A = 3\alpha$, $B = 3\beta$, $C = 3\gamma$. Avem

$$\frac{\| AZ \|}{\| BZ \|} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}\ ;\ \frac{\| CY \|}{\| AY \|} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}\ ;\ \frac{\| BX \|}{\| CX \|} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}\ .$$

Înmulțim parte cu parte relațiile precedente și obținem relația cerută

4.48. Scriem teorema sinusurilor: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. De aici deducem: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b + c}{\sin B + \sin C}$ sau $a(\sin B + \sin C) = (b + c) \sin A$ (1)

Dar din $b + c > a$ (inegalitatea triunghiului) și din (1) rezultă că $\sin B + \sin C > \sin A$ (2) sau folosind relația din enunț ($\sin B + \sin C = 1 - \sin A$) avem $1 - \sin A > \sin A$.

Deci $\sin A < 1/2$, iar această inegalitate are loc dacă $\sphericalangle A < 30°$ sau dacă $150° < \sphericalangle A < 180°$. Deoarece unghiul A este cel mai mare unghi al triunghiului, nu putem avea $\sphericalangle A < 30°$; rămîne deci $\sphericalangle A > 150°$. Dar inegalitatea $\sphericalangle A > 150°$ este echivalentă cu $\sphericalangle B + \sphericalangle C < 30°$.

4.49. Fie $\| AC \| = r\sqrt{3}$ latura triunghiului echilateral înscris în cerc, care subîntinde arcul $\overset{\frown}{AC} = 120°$. Latura $\| AB \| = r/2$ poate fi cu extremitatea B în afara arcului $\overset{\frown}{AC}$ sau pe arcul $\overset{\frown}{AC}$. Deci avem două cazuri.

a) Cazul B în afara arcului $\overset{\frown}{AC} = 120°$, avem $\overset{\frown}{BC} = 120° + x$, unde arc $\overset{\frown}{AB} = x$. Deci coarda $\| BC \| = 2r \sin \frac{120° + x}{2} = 2r \sin \left(60° + \frac{x}{2}\right)$ și

$$\| AB \| = 2r \sin \frac{x}{2} \Rightarrow \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{4} \text{ și } \cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{15}}{4}\text{, iar } \| BC \| =$$

$$= 2r\left(\sin 60° \cos \frac{x}{2} + \cos 60° \sin \frac{x}{2}\right) = \frac{r}{4}(3\sqrt{5} + 1).$$

b) Cazul B pe arcul $\overset{\frown}{AC} = 120°$ dă: $\| BC \| = 2r \cdot \sin \left(60° - \frac{x}{2}\right) =$

$$= \frac{r}{4}(3\sqrt{5} - 1).$$

4.50. Aplicînd teorema sinusurilor avem:

$$\frac{\beta B}{c} = \frac{\sin (A - \omega)}{\sin (C + \omega)} \text{ din triunghiul } AB\beta, \quad (1)$$

$$\frac{B\alpha}{c} = \frac{\sin \theta}{\sin (B + \theta)} \text{ din triunghiul } AB\alpha, \quad (2)$$

$$\frac{b}{C\alpha} = \frac{\sin (B + \theta}{\sin (A - \theta)} \text{ din triunghiul } AC\alpha. \quad (3)$$

$$\frac{b}{|BC|} = \frac{\sin (C + \omega)}{\sin \omega} \text{ din triunghiul } AC\beta, \quad (4)$$

Înmulțind relațiile (1), (2), (3), (4) și ținînd seama că $\| B\beta \| = \| C\alpha \|$ și $\| B\alpha \| = \| C\beta \|$, obținem relația din enunț.

4.51. $\| A_1A_1' \| = R \sin \frac{2\pi}{n}$, $R = 1$, $\| A_1A_1' \| = \sin \frac{2\pi}{n}$; $\| OA_1' \| =$

$= \cos \frac{2\pi}{n}$; $\| A_1'A_1'' \| = \| OA_1' \| \cdot \sin \frac{2\pi}{n} = \sin \frac{2\pi}{n} \cdot \cos \frac{2\pi}{n}$; $\| OA_1'' \| =$

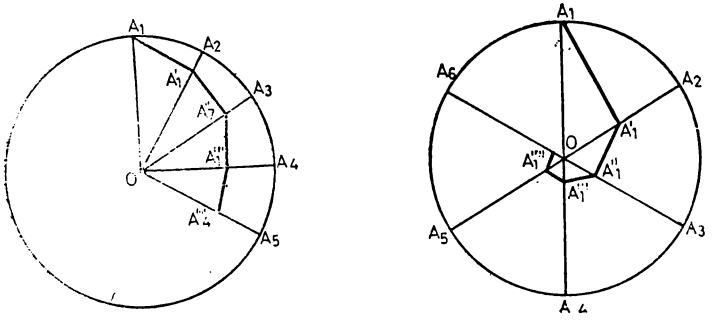

Fig. 4.51

$= \| OA_1' \| \cdot \cos \frac{2\pi}{n}$; $\| OA_1'' \| = \cos^2 \frac{2\pi}{n}$; $\| A_1''A_1''' \| =$

$$= \| OA_1'' \| \sin \frac{2\pi}{n} = \sin \frac{2\pi}{n} \cos^2 \frac{2\pi}{n}.$$

Avem

$$S_n = \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} \cos \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} \cos^2 \frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin \frac{2\pi}{n} \cos^{n-1} \frac{2\pi}{n} ;$$

$$S_n = \sin \frac{2\pi}{n} \left(1 + \cos \frac{2\pi}{n} + \cos^2 \frac{2\pi}{n} + \ldots \cos^{n-1} \frac{2\pi}{n} \right),$$

$$S_n = \sin \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{\cos^{n-1} \frac{2\pi}{n} \cdot \cos \frac{2\pi}{n} - 1}{\cos \frac{2\pi}{n} - 1} = \frac{\sin \frac{2\pi}{n} \left(\cos^n \frac{2\pi}{n} \right) - 1}{\cos \frac{2\pi}{n} - 1}$$

Pentru $n = 6$, avem $S_6 = \frac{63\sqrt{3}}{6}$.

4.52. a) Fie $| AB |$ o coardă într-un cerc de rază R și x arcul subîntins, fie deasnpra coardei, fie dedesubt.

Să ducem diametrul $| AM |$ și avem: $\| AB \| = 2R \sin \frac{x}{2}$, dacă x este arcul deasupra coardei. Fie y arcul dedesubtul coardei; avem: $x + y = 2\pi \Rightarrow x = 2\pi - y$, $\frac{x}{2} = \pi - \frac{y}{2}$ și deci $\sin \frac{x}{2} = \sin \frac{y}{2}$.

Din $\widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow BC \parallel AD$ și $ABCD$ este un trapez isoscel. Laturile lui le avem imediat, aplicînd formula de mai sus.

$\| AB \| = 2R \sin a$, $\| BC \| = 2R \sin a$, $\| CD \| = 2R \sin a$, $\| AD \| = 2R \sin 3a$. Aria $(ABCD) = \dfrac{(\| AD \| + \| BC \|)h}{2}$, unde $h = \| CC_1 \| = \| CD \| \sin 2a = 2R \sin a \sin 2a$ și astfel aria

$$6(ABCD) = \frac{(2R \sin 3a + 2R \sin a)\, 2R \sin a \sin 2a}{2} = 5R^2 \sin^3 2a.$$

b) Ecuația care ne dă pe a este $4R^2 \sin^2 a + 4R^2 \sin^2 2a + 4R^2 \sin^2 3a = 8R^2$, sau $\sin^2 a + \sin^2 2a + \sin^2 3a = 2$.

$$\sin^2 a + 4 \sin^2 a \cos^2 a + \sin^2 a(3 - 4 \sin^2 a)^2 = 2$$

și făcînd calculele obținem ecuația

$8 \sin^6 a - 14 \sin^4 a + 7 \sin^2 a - 1 = 0$; $(8 \sin^6 a - 1) - 7 \sin^2 a (2 \sin^2 a - 1) = 0$,

$(2 \sin^2 a - 1)(4 \sin^4 a + 2 \sin^2 a + 1) - 7 \sin^2 a (2 \sin^2 a - 1) = 0$, sau $(2 \sin^2 a - 1)(4 \sin^4 a - 5 \sin^2 a + 1) = 0$.

$\sin a = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ și din $4 \sin^4 a - 5 \sin^2 a + 1 = 0$,

$\sin^2 a = \dfrac{5 \pm 3}{8}$, $\sin^2 a = 1$; $\sin^2 a = \dfrac{1}{4}$ $\sin a = \pm 1$ și $\sin a = \pm \dfrac{1}{2}$.

Trebuie ca $6a \leqslant 2\pi$, $a \leqslant \pi/3$ ca să avem patrulaterul $ABCD$ înscris în cerc. Deci corespund arcele a date de $\sin a = \sqrt{2}/2$, $a = \pi/4$ și corespunde pătratul $ABCD$ și $\sin a = 1/2$.

4.53. 1) $a + b + c + d = 2\pi$ implică $\cos \dfrac{a+c}{2} = -\cos \dfrac{b+d}{2}$ și dezvoltînd ambii membri se obține

$$\cos \frac{a}{2} \cos \frac{c}{2} - \sin \frac{a}{2} \sin \frac{c}{2} = -\cos \frac{b}{2} \cos \frac{d}{2} + \sin \frac{b}{2} \sin \frac{d}{2}.$$

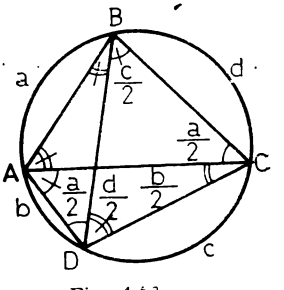

Fig. 4.53

Grupînd se obține

$$\cos \frac{a}{2} \cos \frac{c}{2} + \cos \frac{b}{2} \cos \frac{d}{2} = \sin \frac{a}{2} \sin \frac{c}{2} + \sin \frac{b}{2} \sin \frac{d}{2} \qquad (1)$$

Ne vom ocupa întîi de primul membru al egalității (1) $\cos \dfrac{a}{2} \cos \dfrac{c}{2} + \cos \dfrac{b}{2} \cos \dfrac{d}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\cos \dfrac{a+c}{2} + \cos \dfrac{a-c}{2} + \cos \dfrac{b+d}{2} + \cos \dfrac{b-d}{2}\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{a-c}{2} + \cos\frac{b-d}{2}\right) = \cos\frac{a-c+b-d}{4}\cos\frac{a-c-b+d}{4} =$$

$$= \cos\frac{2(a+b)-2\pi}{4}\cdot\cos\frac{2(a+d)-2\pi}{4} = \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a+d}{2}\cdot$$

2) Notațiile fiind cele din figură, $\|AB\|\cdot\|CD\| + \|AD\|\cdot\|BC\| = \|AC\|\cdot\|BD\|$ cu litere mici însemnînd arcele și aplicînd teorema sinusurilor $(2R)^2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2} + (2R)^2\sin\frac{d}{2}\sin\frac{b}{2} = (2R)^2\sin\frac{a+d}{2}\sin\frac{a+b}{2}\cdot$ Pentru $\|AC\|$ am folosit triunghiul ADC, pentru $\|tBD\|$ am folosit triunghiul BCD.

4.54. Notăm cu $2a = \sphericalangle A_1OA$, O fiind centrul cercului circumscris și R raza cercului. Avem: $\|A_1A_5\| = 2R\sin 4a$; $\|A_1A_3\| = 2R\sin 2a$ și $\|A_1A_2\| = 2R\sin a$. Relația cerută devine $2 + \frac{2R\sin 4a}{2R\sin 2a} = \left(\frac{2R\sin 2a}{2R\sin a}\right)^2$ sau $2 + 2\cos 2a = (2\cos a)^2$, de unde $1 + \cos 2a = 2\cos^2 a$, deci relația este adevărată.

4.55. Separînd coeficienții lui $\sin x$ și $\cos x$ în cele două relații vom arăta că aceste expresii sînt nule. Ținem seama, pentru aceasta, de relațiile:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,\ \cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x,\ b\cos B + c\cos C = a,\ b\sin B = c\sin B = h.$$

$2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$ și analoagele și scriem:

$E_1 = b^3\sin 3C - c^3\sin 3B + 3abc\sin(C - B) = b^3(3\sin C - 4\sin^3 C) - c^3(3\sin B - 4\sin^3 B) + 3abc(\sin C\cos B - \sin B\cos C) = 3hb^2 - 4h^3 - 3hc^2 + 4h^3 + 3ahc\cdot\cos B - 3ahb\cos C = 3h[b^2 - c^2 + ac\cos B - ab\cos C] = 3h[b^2 - c^2 + 1/2(a^2 + c^2 - b^2) - 1/2(a^2 + b^2 - c^2)] = 0.$

$E_2 = a^3 - b^3\cos 3C - c^3\cos 3B - 3abc\cos(B - C) = a^3 - b^3(\cos^3 C - 3\cos C\cdot\sin^2 C) - c^3(\cos^3 B - 3\cos B\sin^2 B) - 3abc(\cos B\cos C + \sin B\sin C) = a^3 - b^3\cos^3 C - c^3\cos^3 B + 3bh^2\cos C + 3ch^2\cos B - 3abc\cos B\cos C - 3ah^2 = a^3 - [b^3\cos^3 C + c^3\cos^3 B + 3bc\cos B\cos C\cdot(b\cos B + c\cos C)] - 3h^2[a - b\cos C - c\cos B] = a^3 - (b\cos C + c\cos B)^3 = 0.$

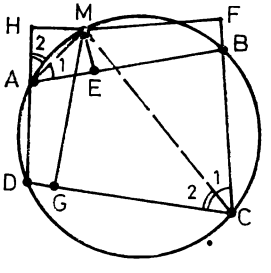

Fig. 4.56

4.56. Unim punctul M cu vîrfurile A și C. Vom avea $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle C_1 = \frac{1}{2}$ arc $\overset{\frown}{MB}$; $\sphericalangle A_2 = \sphericalangle C_2 = \frac{1}{2}$ arc $\overset{\frown}{MAD}$. Însă: $\|ME\| = \|AM\|\cdot\sin A_1$; $\|MG\| = \|CM\|\sin C_2$; $\|MF\| = \|CM\cdot\|\sin C_1$; $\|MH\| = \|AM\|\sin A_2$.

Înmulțind relațiile două cîte două avem $\|ME\|\cdot\|MG\| = \|AM\|\cdot\|CM\|\cdot\sin A_1\sin C_2$; $\|MP\|\cdot\|MH\| = \|AM\|\cdot\|CM\|\cdot\sin A_2\cdot\sin C$ de unde rezultă: $\|ME\|\cdot\|MG\| = \|MF\|\cdot\|MH\|$.

4.57. Avem $\| OA_1 \| - \| OA \|^2$ care este puterea punctului A_1 în raport cu cercul ABC, deci $\| OA_1 \|^2 - \| OA \|^2 = \| A_1B \| \cdot \| A_1C \| = -bc \cos B \cos C$. Iar $\cos(B-C) + \cos A = \cos(B-C) - \cos(B+C) = 2 \sin B \sin C$. Rezultă $\dfrac{(\| OA_1 \|^2 - \| OA \|^2 \cos A}{\cos(B-C) + \cos A} = \dfrac{-bc \cos A \cos B \cos C}{2 \sin B \sin C} = 2R^2 \cos A \cdot \cos B \cos C$. Simetria rezultatului justifică și celelalte egalități.

4.58. Considerăm un triunghi oarecare ABC.

Patrulaterele AB_1MC_1, BC_1MA_1, CA_1MB_1 sînt inscripțiile respectiv în cercurile de diametre $| AM |$, $| BM |$, $| CM |$. Folosind relațiile $a = 2R \sin A$ avem

$$\| B_1C_1 \| = \| AM \sin A, \ \| A_1C_1 \| = \| BM \| \sin B, \ \| B_1A_1 \| = \| CM \| \sin C \quad (1)$$

De asemenea, $\| B_1C_1 \|^2 = \| A_1C_1 \|^2 + \| A_1B_1 \|^2 - 2 \| A_1C_1 \| \cdot \| A_1B_1 \| \cos A_1$ și analoagele care adunate și ținînd ceama de (1) obținem

$$\Sigma \| AM \|^2 \sin^2 A = 2 \Sigma \| BM \| \cdot \| CM \| \sin B \sin C \cos A_1.$$

Împărțind prin $\| AM \| \cdot \| BM \| \cdot \| CM \|$ și ținînd seama de (1), rezultă

$$\Sigma \frac{\| AM \| \sin A}{\| BM \| \cdot \| CM \|} = 2 \sin A \sin B \sin C \, \Sigma \frac{\cos A_1}{B_1C_1} \quad (2)$$

Folosim din nou relația $\sin A = \dfrac{a}{2R}$, și analoagele și $abc = 4RS$, iar(2) devin

$$\Sigma \frac{\| AM \|}{\| BM \| \cdot \| CM \|} \sin^2 A = \frac{S}{R^2} \Sigma \frac{\cos A_1}{B_1C_1}.$$

Dacă $A = B = C = 60°$, $\sin^2 60° = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$, iar $S = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4}$, de unde $\Sigma \dfrac{\| AM \|}{\| MB \| \cdot \| CM \|} = 3 \Sigma \dfrac{\cos A_1}{| B_1C_1 |}$.

4.59. Dezvoltăm $\sin(A - x)$ și înlocuim pe $a = 2R \sin A, \ldots$ Obținem $\sin A \cos B \sin C + \sin^2 B = \cos A \sin B \sin C + \sin^2 A = \sin A \sin B \cos C + \sin^2 C$. Într-adevăr, avem: $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B) \sin(A-B) = \sin C \sin(A-B)$ sau $\sin^2 A + \cos A \sin B \sin C = \sin^2 B + \sin A \cos B \cdot \sin C$. În același mod: $\sin^2 A + \cos A \sin B \sin C = \sin^2 B + \sin A \cos B \cdot \sin C$.

4.60. Folosim relațiile $a = 2R \sin A, \ldots$ și obținem $\sin A(\cos x - \sin x) = \sin B \cos x \cos C + \sin B \sin \sin C - \sin B \sin x \sin C - \sin B \cdot \cos x \sin C + \sin C \cos x \cos B - \sin C \sin x \sin B - \sin C \sin x \cos B + \sin C \cos x \sin B = \cos x (\sin B \cos C + \sin C \cos B) - \sin x (\sin B \cos C + \sin C \cos B) = \sin A(\cos x - \sin x)$.

4.61. Relația se mai scrie $\Sigma (\sin B - \sin C) \operatorname{tg} \dfrac{B+C}{2} = \dfrac{1}{2} \Sigma \sin \dfrac{B-C}{2} \cdot \cos \dfrac{B+C}{2} - \operatorname{tg} \dfrac{B+C}{2} = \dfrac{1}{2} \Sigma \sin \dfrac{B-C}{2} \sin \dfrac{B+C}{2} = \dfrac{1}{4} \Sigma (\cos B - \cos C) = 0$

4.62. Avem $a\cos(B+\alpha)+b\cos(A-\alpha)=a\cos B\cos\alpha-a\sin B\cdot\sin\alpha+b\cos A\cos\alpha+b\sin A\sin\alpha=\cos\alpha(a\cos B+b\cos A)+\sin\alpha(b\sin A-a\sin B)=\cos\alpha$.

Apoi, dacă $A+B+C=\pi$, avem: $\frac{A}{4}+\frac{B}{4}+\frac{C}{4}=\frac{\pi}{4}$, deci

$$\cos\frac{A}{2}\cdot\sin\left(\frac{B}{2}-\alpha\right)+\cos\frac{B}{2}\sin\left(\frac{A}{2}+\alpha\right)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{A+B}{2}-\alpha\right)+\right.$$

$$\left.+\sin\left(\frac{B-A}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{A+B}{2}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{A-B}{2}+\alpha\right)\right]=\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$\cos\alpha=\cos\frac{C}{2}\cos\alpha$.

4.63. Ținem seama de proprietățile rapoartelor: $\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}{1+2+3}=$

$=\frac{\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C}{6}=\frac{\operatorname{tg}A}{1}$, deci $\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C=6$. Mai avem $3\operatorname{tg}B=2\operatorname{tg}C$

Rezultă $\operatorname{tg}^2B=4$, $\operatorname{tg}B=2$, $\operatorname{tg}A=1$, $\operatorname{tg}C=3$; $\sin A=\frac{\operatorname{tg}A}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2A}}=$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin B=\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\sin C=\frac{3}{\sqrt{10}}$. Dar laturile a, b, c sînt proporționale cu $\sin A, \sin B, \sin C$, de unde rezultă relația cerută.

4.64. Ținem seama că $h_a=c\sin B$ și relația din enunț devine $c\cos B\cos(B-C)=c\sin B\sin(C-B)+c\cos C$ sau $c[\cos B\cos(B-C)+$ $+\sin B\sin(B-C)]=c\cos C$, de unde relația evidentă $c\cos(B-B+C)=$ $=c\cos C$.

4.65. Se cunoaște relația $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$. Din triunghiurile ABM, BCN, CAP deducem

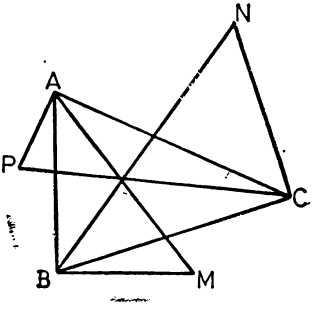

Fig.4.65

$\cos\frac{A}{2}=\frac{c}{\|AM\|}$; $\cos\frac{B}{2}=\frac{a}{\|BN\|}$; $\cos\frac{C}{2}=$ $=\frac{b}{\|CP\|}$. Pe de altă parte avem $\sin A=\frac{a}{2R}$; $\sin B=\frac{b}{2R}$; $\sin C=\frac{c}{2R}$. Înlocuind în identitatea de mai sus obținem $\frac{a+b+c}{2}=4R\cdot\frac{abc}{\|AM\|\cdot\|BN\|\cdot\|CP\|}$, sau $\|AM\|\cdot\|BN\|\cdot\|CP\|=\frac{4abcR}{p}=\frac{16R^2S}{p}=16R^2r$.

4.66. Avem $4m_c^2=2a^2+2b^2-c^2$ sau $\frac{4m_c^2}{a^2}=2+2\frac{b^2}{a^2}-\frac{c^2}{a^2}$;

$\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{\sin 2A}{\sin A}=\frac{2\sin A\cos A}{\sin A}=2\cos A$.

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{\sin(180^\circ - A - 2A)}{\sin A} = \frac{\sin 3A}{\sin A} = 3 - 4\sin^2 B.$$

$\frac{4m_c^2}{a^2} = 2 + 2 \cdot 4\cos^2 A - (3 - 4\sin^2 A)^2 = 5 - 4\cos^2 A$, iar

$1 > \cos^2 A \geqslant 0$. Rezultă $1 < 4m_c^2/a^2 \leqslant 5$ sau $a < 2m_c \leqslant a\sqrt{5}$.

4.67. Notăm cu $2x$ unghiul la centru $(\widehat{A_1OA_2}) = 2\pi/n$. Avem $\| A_1A_2 \| = 2R\sin x$, $\| A_1A_3 \| = 2R\sin 2x$, $\| A_1A_4 \| = 2R\sin 3x$, unde $x = \pi/n$.

Obținem $\left(\frac{\| A_1A_2 \|}{R}\right)^2 + \frac{\| A_1A_4 \|}{\| A_1A_2 \|} = 4\sin^2 x + \frac{\sin 3x}{\sin x} = 4\sin^2 x +$

$+ \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{\sin x} = 4\sin^2 x + 3 - 4\sin^2 x = 3$. De asemenea

$\left(\frac{\| A_1A_2 \|}{R}\right)^2 + \left(\frac{\| A_1A_3 \|}{\| A_1A_2 \|}\right)^2 = 4\sin^2 x + \frac{\sin^2 2x}{\sin^2 x} = 4\sin^2 x + 4\cos^2 x = 4$

Analog se verifică și ultima relație.

4.68. Pe laturile unui triunghi ABC construim în interior dreptunghiurile ABC_1C_2; BCA_1A_2 și CAB_1B_2 de arii dublu ariei S a triunghiului ABC: Σ aria $BCA_1A_2 = 6S = 3$ aria $ABC + \Sigma$ aria $ABA_2 + \Sigma$ aria $ABB_1 = 3S +$ $+ 2\Sigma$ aria $ABC' + \Sigma$ aria $AC'A_2 + \Sigma$ aria $BC'B_1$, unde A', B', C' sînt intersecțiile dreptelor $(BC_1, CB_2), (CA_1, AC_2), (AB_1, BA_2)$.

Avem Σ aria $(ABA_2) = \Sigma\frac{1}{2}\| AA_2 \| \cdot \| BA_2 \| = \frac{1}{2}\Sigma c^2 \cos B \sin B =$

$= \frac{1}{4}\Sigma c^2 \sin 2A$; 2Σ aria $ABC' = 2\Sigma\frac{1}{2}c^2\frac{\cos A\cos B}{\sin C} = \Sigma\frac{c^2\cos A\cos B}{\sin C}$;

Σ aria $AC'A_2 = \frac{1}{2}\cdot\Sigma AA_2 \cdot A_2C' = \frac{1}{2}\Sigma c\cos B\, c\cos B\operatorname{ctg} C =$

$= \frac{1}{2}\Sigma c^2\cos^2 B\operatorname{ctg} C$. Analog Σ aria $(BC'B_1) = \frac{1}{2}\Sigma c^2\cos^2 A\operatorname{ctg} C$.

Avem

$$3S = \frac{1}{4}\Sigma c^2(\sin 2A + \sin 2B) = \Sigma\frac{c^2\cos A\cos B}{\sin C} + \frac{1}{2}c^2\operatorname{ctg} C(\cos^2 A + \cos^2 B). \quad (1)$$

Se observă că s-a stabilit relația cunoscută $12S = \Sigma c^2(\sin 2A + \sin 2B)$. Folosim relațiile $abc = 4RS$ și $a = 2R\sin A$, ...

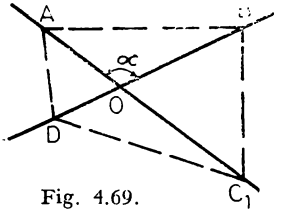

Fig. 4.69.

4.69. Fie α unghiul format de axe la intersecția lor în O. Avem relațiile:

$$\| AB \|^2 = \| AO \|^2 + \| OB \|^2 - 2\| AO \| \cdot \| OB \| \cos\alpha,$$
$$\| BC \|^2 = \| BO \|^2 + \| OC \|^2 + 2\| BO \| \cdot \| OC \| \cos\alpha,$$
$$\| CD \|^2 = \| CO \|^2 + \| OD \|^2 - 2\| CO \| \cdot \| OD \| \cos\alpha,$$
$$\| DA \|^2 = \| DO \|^2 + \| OA \|^2 + 2\| DO \| \cdot \| OA \| \cos\alpha.$$

Prin urmare:

$$\frac{\|AB\|^2 - \|BC\|^2 + \|CD\|^2 - \|DA\|^2}{\|AC\| \cdot \|BD\|} = 2\cos\alpha \cdot \frac{-\|AO\| \cdot \|OB\| -}{\|AC\| \cdot}$$

$$\frac{-\|BO\| \cdot \|OC\| - \|DO\| \cdot \|OC\| - \|DO\| \cdot \|OA\|}{\cdot \|BD\|} = 2\cos\alpha \cdot$$

$$\cdot \frac{-\|AO\|(\|OB\| + \|DO\|) - \|OC(\|OB\| - \|OD\|)}{\|AC\| \cdot \|BD\|} = -2\cos\alpha = \text{const.}$$

4.70. Folosim formulele $a = 2R\sin A$ și analoagele, $\Sigma \sin A = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ și $\Sigma \sin 2A = 4\sin A \sin B \sin C$. Egalitatea din enunț se mai scrie:

$$\Sigma \frac{(\sin B + \sin C - \sin A)^2}{4\sin B \sin C} = 1 - \frac{abc}{8R^2} \cdot \frac{2R}{a+b+c} \quad \text{sau}$$

$$\Sigma \frac{(\sin A + \sin C - \sin A)^2}{4\sin B \sin C} = 1 - \frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} \cdot \qquad (1)$$

Dar

$$\Sigma \frac{(\sin B + \sin C - \sin A)^2}{4\sin B \sin C} = \Sigma \frac{\left(\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2}\right)^2}{\sin B \sin C} =$$

$$= \Sigma \frac{\cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} = \Sigma \frac{\cos^2\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} =$$

$$= \frac{\Sigma \cos^2\frac{A}{2}(\sin B + \sin C - \sin A)}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{\Sigma(1+\cos A)(\sin B + \sin C - \sin A)}{2(\sin A + \sin B + \sin C)} =$$

$$= \frac{\sin A + \sin B + \sin C + \sin(A+B) + \sin(A+C) + \sin(B+C)}{2(\sin A + \sin B + \sin C)} -$$

$$- \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{4(\sin A + \sin B + \sin C)} = 1 - \frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} .$$

4.71. Avem $R = R_a \cdot 2\cos A$ și analoagele. Relația din enunț devine

$$\Sigma\left[a^2\left(\frac{2R\sin B \cdot 2\cos B}{R} + \frac{2R\sin C \cdot 2\cos C}{R}\right)\right] = \Sigma\,[a^2(2\sin 2B + 2\sin 2C)] = 24S.$$

4.72. Fie un triunghi ABC cu unghiul $A < 135°$. Prin vîrful A în interiorul unghiului A ducem o dreaptă (d) care face cu AC un unghi egal cu $A/3$ și proiectăm vîrfurile B și C pe dreapta (d) respectiv în B_1 și C_1. Avem $|\,\|AC_1\| - \|AB_1\|\,| = \|B_1C_1\|$ de unde rezultă $\left| b\cos\frac{A}{3} - c\cos\frac{2A}{3}\right| = a\cos\left(C + \frac{A}{3}\right)$.

Pentru a doua egalitate ducem dreapta (d) prin A în interiorul unghiului A care face cu AC un unghi α, unde $A - 90° < \alpha < A$. Aceeași relație $|\,\|AC_1\| - \|AB_1\|\,| = \|B_1C_1\|$ justifică relația cerută.

4.73. Ținem seama de relația $4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{p}{R}$. Inegalitățile date devin $3R > p > \frac{3}{2}R$.

Triunghiul ABC fiind ascuțitunghic, centrul cercului circumscris este situat în interiorul triunghiului, $3R > a + b + c$ este evidentă deoarece $a < 2R$, $b < 2R$, $c < 2R$. O linie poligonală convexă are o lungime mai mică decît o linie poligonală care are aceleași extremități și care o înconjoară pe prima. Deci $b + c > 2R$; $a + c > 2R$; $a + b > 2R$ sau $2p > 3R$.

4.74. Înegalitatea se mai scrie:

$\sin(70° + 2x) + \sin 30° > \sin(50° + 4x) + \sin 30°$

sau $\sin(70° + 2x) - \sin(50° + 4x) > 0$, de unde avem mai departe: $2\sin(10° - x)\cos(60° + 3x) > 0$, inegalitate ce este evidentă în condiția dată $0° < x < 10°$.

4.75. Folosind formula lui *Mollweide* $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$ și analoagele și relația $\frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} \geqslant 6$, avem $\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} + \frac{\cos\frac{A-C}{2}}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} \geqslant 6$, sau, aducînd la același numitor, obținem

$$\frac{1}{6}\,\Sigma \sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \geqslant \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Mai folosim inegalitatea $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \geqslant \frac{1}{8}$ și obținem:

$$\Sigma \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \geqslant \frac{3}{4}.$$

4.76. *Soluția I.* Să arătăm că există relația $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}>\cos\frac{C}{2}$ și analoagele. Înlocuind $\cos\frac{A}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$, $\cos\frac{C}{2}$ în funcție de laturile a, b, c, relația de demonstrat devine: $\sqrt{a(p-a)}+\sqrt{b(p-b)}>\sqrt{c(p-c)}$. Ridicăm la pătrat, înlocuim $2p=a+b+c$ și obținem: $(c+b-a)(c+a-b)+2\sqrt{ab(b+c-a)(c+a-b)}>0$, inegalitate evidentă din cauza inegalităților $b+c>a$, $c+a>b$. Să demonstrăm și inegalitățile $\sin 2A+\sin 2B>\sin 2C$ (1) și analoagele. Avem: $\sin 2A+\sin 2B=2\sin C\cos(A-B)$ și $\sin 2C=2\sin C\cos C$ și inegalitatea de demonstrat devine: $\cos(A-B)>\cos C\Rightarrow \sphericalangle A-\sphericalangle B<\sphericalangle C$ sau $\sphericalangle A<\sphericalangle B+\sphericalangle C$ de unde rezultă că triunghiul ABC este ascuțitunghic, căci transformînd relațiile analoage relației (1) obținem $\sphericalangle B<\sphericalangle A+<C$; $\sphericalangle C<\sphericalangle A+\sphericalangle B$.

Soluția II. Pentru prima inegalitate $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}>\cos\frac{C}{2}$ înlocuim $\cos\frac{C}{2}$ cu $\sin\frac{A+B}{2}$ și obținem: $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}>\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}$, care este evidentă deoarece $\sin\frac{A}{2}<1$ și $\sin\frac{B}{2}<1$.

4.77. Considerăm patrulaterul $ABCD$ în care $\|AB\|=a$, $\|BC\|=b$, $\|CD\|=c$ și $\|DA\|=d$. Avem $S=$ aria $(ABD)+$ aria $(BCD)=\frac{ad\sin A}{2}+\frac{bc\sin C}{2}$; $S=$ aria $(ABC)+$ aria $(ADC)=\frac{ab\sin B}{2}+\frac{cd\sin D}{2}$; $2S=\frac{1}{2}(ad\sin A+bc\sin B+ab\sin B+cd\sin D)$; $4S=a(d\sin A+b\sin B)+c(b\sin c+d\sin D)$ (1) Relația din enunț se mai scrie: $4S\leqslant a(b+d)+c(b+d)$ care este evidentă ținînd seama de relația (1) stabilită deoarece $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, $\sin D\in(0,1]$.

Semnul egal are loc dacă patrulaterul este dreptunghi adică $\sphericalangle A=\sphericalangle B=\sphericalangle C=\sphericalangle D=90°$.

4.78. a) Condiția din enunț se mai scrie: $\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+\cos x=\cos\frac{\pi}{6}$ sau $\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos x=2\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\cos\frac{\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{6}$, deci $\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$, prin urmare $\frac{\pi}{6}+x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$, $x_1=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}$,

$$x_2=2\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=-\frac{3\pi}{2};\ x_3=2\pi+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{13\pi}{6}.$$

b) Avem $y=\sin^2 2t=4\sin^2 t\cos^2 t=4\sin^2(1-\sin^2 t)$ deci: $y=4x(1-x)=4x-4x^2$. Pentru $x=0$ avem $y=0$, iar pentru $x=1$ avem $y=0$. Traiectoria este deci o parabolă cu vîrful în sus care trece prin origine și mai taie pe Ox în punctul $A(1,0)$. Maximul este atins pentru $x=1/2$ și deci $y_{max}=1$.

4.79. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ punctele de diviziune ale lui $\overset{\frown}{AB}$. $\| AB \| < n \| AA_1 \|$. Avem $\| AB \| = 2R \sin x$, iar $\| AA_1 \| = 2R \sin \frac{\pi}{n}$.

4.80. Folosim formulele: $a = 2R \sin A$ și analoagele, $abc = 4RS = 4Rpr$, $a + b + c = 2p$.

Relația din enunț devine $\frac{4abc}{8R^3} \leqslant \frac{a+b+c}{2R}$ sau $R - 2r \geqslant 0$.

4.81. Avem $2 \sin \frac{B}{2} = \cos \frac{A+C}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}$, dar $\sin \frac{B}{2} = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}$, deci $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{2}$ și reciporc din $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{2}$ se vede imediat că rezultă $\sin \frac{B}{2} = \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$. Astfel că relațiile sînt echivalente: $\sin \frac{B}{2} = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} \leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{2}$.

2) Scriind relația dată în funcție de laturi, avem

$$\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \Rightarrow 1 = \frac{p-b}{b} \Rightarrow a + c = 3b.$$

3) $\cos B = 1 - 2 \sin^2 \frac{B}{2} = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{4}$ și $\cos 2B = 2 \cos^2 B - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, astfel că $\cos 2B = \sin \frac{B}{2} = \cos\left(90° - \frac{B}{2}\right)$ și de aici $2B \pm \left(90° - \frac{B}{2}\right) = 360° k$, $k \in \mathbf{Z}$. Deoarece $\sphericalangle B$ este unghi al unui triunghi, corespunde $k = 0$ și semnul „—" în fața parantezei. Deci $\sphericalangle 2B - 90° + \sphericalangle \frac{B}{2} = 0 \Rightarrow \sphericalangle B = 36°$.

4) Din relația dată avem: $2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = 2 \sin \frac{B}{2}$ sau $\cos \frac{A-C}{2} - \cos \frac{A+C}{2} = 2 \sin \frac{B}{2}$, dar $\cos \frac{A+C}{2} = \sin \frac{B}{2}$ și deci $\cos \frac{A-C}{2} = 3 \sin \frac{B}{2} = \frac{3(\sqrt{5}-1)}{4}$. Din această relație găsim diferența $A - C$ și ținînd seama că $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180° - \sphericalangle B = 180° - 36° = 144°$ din sistemul în A și C obținem unghiurile A și C.

4.82. a) Fie O', O'' centrele semicercurilor de diametre respectiv $|AC|, |CB|$. Triunghiurile $O'MC$ și $O''NC$ sînt isoscele și cu unghiurile de la bazele lor respectiv egale. Urmează atunci că și unghiurile de la vîrf sînt

egale $\sphericalangle MO'C = \sphericalangle CO''N$. Din acestea rezultă apoi $\sphericalangle TMC = \sphericalangle T'NC$ și deci $MT \parallel NT'$. b) Perpendiculara din O pe MN este paralelă cu AM (ambele perpendiculare pe MN) și $|OQ|$ este linie mijlocie în $\triangle AMB$, deci Q este mijlocul lui $|MN|$; $|BN| \perp |MN|$ și deci $QP \parallel BN$ (căci $|QP| \perp |MN|$), și rezultă că $|QP|$ este linie mijlocie în $\triangle MBN$ și astfel P este mijlocul lui $|MN|$. c) Din $\|AB\| = a$ și $\|AC\| = 2\|CB\|$ rezultă imediat $\|AC\| = 2a/3$, $\|CB\| = a/3$. Egalitatea se transformă $\|AM\| = \|AC\| \sin\alpha = \frac{2a}{3}\sin\alpha$, $\|MN\| = \|MC\| +$

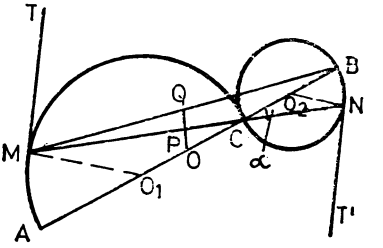

Fig. 4.82

$+ \|CN\| = \frac{2a}{3}\cos\alpha + \frac{a}{3}\cos\alpha = a\cos\alpha$; $\|NB\| = \frac{a}{3}\sin\alpha$ și deci $\sin\alpha +$

$+ \cos\alpha = \sqrt{2}$. Pentru rezolvare luăm ca necunoscută $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ și avem

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{2}+1)\operatorname{tg}\frac{2\alpha}{2} - 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2} - 1 = 0.$$

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2} - 1$ rădăcină dublă. Pentru a afla pe α, să calculăm pe $\operatorname{tg}\alpha$.

Avem $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(3-\sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = 1$ și deci $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

4.83. Fie $\|AD\| = i_a$. Avem $2S_{AED} + 2S_{ADC} = 2S_{ABC}$ deci $c \cdot i_a \sin\frac{A}{2} +$

$+ b \cdot i_a \sin\frac{A}{2} = bc\sin A$ sau $(b+c)\, i_a \sin\frac{A}{2} = 2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$, de unde rezultă i_a.

4.84. Avem $E = a\operatorname{ctg}A + b\operatorname{ctg}B + c\operatorname{ctg}C = \dfrac{a}{\sin A}\cdot\cos A +$

$+ \dfrac{b}{\sin B}\cdot\cos B + \dfrac{c}{\sin C}\cdot\cos C = 2R(\cos A + \cos B + \cos C) = 2R$

$\left(1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$.

Ținem seama că $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ și analoagele și obținem $E =$

$$= 2R\left[1 + \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\right] = 2R\left(1 + \frac{4S^2}{abcp}\right) =$$

$$= 2R\left(1 + \frac{4S}{abc} \cdot \frac{S}{p}\right) = 2R\left(1 + \frac{r}{R}\right) = 2R + 2r.$$

4.85. a) Avem $b = \frac{h_a}{\sin C}$, $c = \frac{h_a}{\sin B}$; $a = \| BC \| = \| BD \| + \| DC \| = h_a (\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C) = \frac{h_a \sin A}{\sin B \sin C}$. Notăm bisectoarea $\| AA' \| = l_a$ și avem $l_a = \frac{h_a}{\sin\left(B + \frac{A}{2}\right)} = \frac{h_a}{\sin\left(C + \frac{A}{2}\right)}$.

b) $a + b + c = h_a\left(\frac{\sin A}{\sin B \sin C} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right) =$

$$= h_a \cdot \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin B \sin C} = 2h_a \cdot \frac{\sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B+C}{2} + \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{\sin B \sin C} =$$

$$= 4h_a \frac{\sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin B \sin C} = \frac{h_a \cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}.$$

4.86. Inegalitatea se mai scrie $m^2 \sin \frac{A}{2} - 2m \sin \frac{A}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \geqslant 0$

$$\Delta'_m = \sin^2 \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} = \sin \frac{A}{2}\left(\sin \frac{A}{2} - \cos \frac{B-C}{2}\right) =$$

$= \sin \frac{A}{2} \cdot \left(\cos \frac{B+C}{2} - \cos \frac{B-C}{2}\right) = \sin \frac{A}{2}\left(-\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}\right) \leqslant 0$. Trinomul în m este deci de același semn cu $\sin \frac{A}{2}$, adică pozitiv.

4.87. Inegalitatea cunoscută: $r \leqslant R/2$, se mai poate scrie $\frac{S}{p} \leqslant \frac{a}{4 \sin A} =$

$= \frac{b}{4 \sin B} = \frac{c}{4 \sin C}$, de unde $p \geqslant 2a \sin B \sin C = 2b \sin C \sin A =$ $= 2c \sin A \sin B$, de unde se deduce ușor inegalitatea din enunț.

4.88. Folosim relațiile $2S = ah_a = bh_b = ch_c$ și primul membru devine $\frac{1}{2S} \Sigma\left[a(b+c) \operatorname{tg} \frac{A}{2}\right] = \frac{1}{2S} \Sigma\left[ab\left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2}\right)\right]$ apoi folosim relațiile $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = r_a/p$ și analoagele. $S = (p-a) r_a = (p-b) r_b = (p-c) r_c = abc/4R$. Primul membru devine egal cu $2R/r$, dar $R \geqslant 2r$ deci $2R/r \geqslant 4$.

4.89. Triunghiul de arie maximă înscris într-un cerc dat este triunghiul echilateral adică $S_1 = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului. $\sphericalangle C = \pi - (A + B)$. Prin urmare pentru un triunghi ABC oarecare avem aria $ABC = S \leqslant \frac{3R^2\sqrt{3}}{3}$ sau $27R^4 \geqslant 16S^2$, deci $-16(p-a)(p-b)(p-c) + 27R^4 \geqslant 0 \Rightarrow (b+c-a)(c-a-b)(a+c-b)(a+b+c) + 27R^4 \geqslant 0$.

Împărțim cu R^4 și ținem seama de relațiile $a = 2R\sin A$ obținem $16(\sin C - \sin A - \sin B)(\sin C + \sin A + \sin B)(\sin C + \sin A - \sin B) \cdot (\sin C + \sin B - \sin A) + 27 \geqslant 0$, de unde $16[\sin^2(A+B) - (\sin A + \sin B)^2] \cdot [\sin^2(A+B) - (\sin A - \sin B)^2] + 27 \geqslant 0$, însă a și b pot fi înlocuite cu A și B unghiuri ale unui triunghi oarecare, semnul egal avînd loc cînd $\sphericalangle a = \sphericalangle b = 60°$.

4.90. Folosim relațiile $a = 2R\sin A$ și analoagele, deci $(\sin B + \sin C)(\sin B + \sin C - \sin A) = 2\sin B \sin C$. Mai folosim relațiile

$$\sin B + \sin C = 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2};\quad \sin B = 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

și $\sin B + \sin C - \sin A = 4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}$. Obținem

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}} \text{ sau } \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}, \text{ sau } \operatorname{tg}^2\frac{A}{2} = \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

dar $r_a = p\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ și analoagele deci $r_a^2 = r_b r_c$.

4.91. Avem $\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A-C}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}} = 1.$

Conform relațiilor lui *Mollweide* avem $\frac{a}{b+c} \cdot \frac{b}{a-c} \cdot \frac{c}{a-b} = 1$, sau $abc = (b+c)(a-c)(a-b)$.

4.92. Se folosesc mai întîi formulele $2S = ah_a = bh_v = ch_e$ și apoi formulele $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r_a}{p}$ și analoagele.

$$S = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c.$$

4.93. Folosim formulele $r_a = p\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ adică $\frac{p}{r_a} = \operatorname{ctg}\frac{A}{2}$, apoi formulele $r_a(p-a) = S, \ldots$ și analoagele și obținem

$$\frac{p(b-c)(p-a)}{S} + \frac{p(c-a)(p-b)}{S} + \frac{p(a-b)(p-c)}{S} = 0.$$

4.94. Se ține seama de relațiile

$$r_a = p \operatorname{tg}\frac{A}{2}, \ldots S = pr = p^2 \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{abc}{4R}$$

4.95. Se folosesc relațiile $S = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$ și se fac calculele.

4.96. Se folosesc relațiile cunoscute

$$S = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$$

4.97. Triunghiurile ABD și BCD, unde $\|BD\| = n$ ne dau $n^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 - 2bc\cos C$, de unde $a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$. Rezultă $\cos A = \dfrac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}$. Celelalte două relații se deduc din formulele $\sin^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{1 - \cos A}{2}$; $\cos^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{1 + \cos A}{2}$.

4.98. a) Avem $\|EF\| = \|AF\| - \|AE\| = \|AD\|\cos x - \|AB\|\cos a$. $\dfrac{\|AC\|}{\sin[180° - (a + x)]} = \dfrac{\|AD\|}{\sin A} = \dfrac{\|CD\|}{\sin x}$, de unde $\|AD\| = \dfrac{m\sin a}{\sin(a + x)}$ și $\|AB\| = \|CD\| = \dfrac{m\sin x}{\sin(a + x)}$. Rezultă. $\|EF\| = \dfrac{m\sin(a - x)}{\sin(a + x)}$.

b) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\|DF\|}{\|AF\|} = \dfrac{\|FC\|\operatorname{tg} a}{\|AF\|} = \dfrac{\operatorname{tg} a}{2}$.

c) Pe una din laturile unghiului a luăm un punct M și proiecția sa P pe cealaltă latură a unghiului a. Avem $\operatorname{tg} a = \dfrac{\|MP\|}{\|OP\|}$ și $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{tg} a}{2} = \dfrac{\|MP\|}{2\|OP\|}$.

4.99. Exprimînd pe y^2 din triunghiurile ABD și BCD, obținem

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} \text{ și } y^2 = a^2 + d^2 - ad\,\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc}$$

de unde $y = \sqrt{\dfrac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}}$, $x = \sqrt{\dfrac{(bc + ad)(ac + bd)}{ab + cd}}$.

Făcînd produsul și cîtul xy și x/y, obținem două relații remarcabile în patrulaterul inscriptibil.

4.100. Notăm $\|CD\| = c$; $\|DA\| = d$; $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle BCA = \beta$, $\sphericalangle ABD = \gamma$, $\sphericalangle CAD = \delta$ și $\sphericalangle AIB = \varphi$, unde I este intersecția diagonalelelor Avem $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B$; $\cos B = \dfrac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab}$; analog $\cos\beta = \dfrac{b^2 + e^2 - a^2}{2be}$; $\cos\delta = \dfrac{c^2 + b^2 - b^2}{2cf}$, $\gamma = B - \delta$; $D = 180° - B$. Mai avem

$\frac{c}{\sin\delta} = \frac{e}{\sin D}$, deci $c = \frac{e\sin\delta}{\sin D}$; $\quad \frac{f}{\sin A} = \frac{a}{\sin\beta}$; $\sin A = \frac{f\sin\beta}{a}$;

$\alpha = a - \delta$. $\quad \frac{d}{\sin\delta} = \frac{a}{\sin\beta}$, $d = \frac{a\sin\delta}{\sin\beta}$.

4.101. Fie $\sphericalangle BCA = \beta$; $\sphericalangle BAC = \alpha$; $\sphericalangle CBD = \gamma$, $\sphericalangle CAD = \delta$; $a = 2R\sin\beta$; $b = 2R\sin\alpha$; $c = 2R\sin\delta$, deci $\sin\beta = a/2R$; $\sin\alpha = b/2R$; $\sin\delta = c/2R$, însă $\sphericalangle A = \alpha + \delta$; $\sphericalangle C = 180° - \sphericalangle A$; $\sphericalangle C = \gamma + \beta$; $\gamma = \sphericalangle C - \beta$; $d = 2R\sin\gamma$. Avem $\gamma + \beta = C$; $\beta + \alpha = \sphericalangle D$; $\sphericalangle C + \sphericalangle D = 2\beta + (\alpha + \gamma)$, de unde $\sphericalangle D = 2\beta + (\alpha + \gamma) - \sphericalangle C$ etc.

4.102. Fie n numărul laturilor, R raza cercului circumscris și $x = \pi/n$. Avem $\| AB \| = 2R\sin x$; $\| AC \| = 2R\sin 2x$ și $\| AD \| = 2R\sin 3x$. Relația dată devine ecuația $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 3x}$ sau pentru $\sin x \neq 0$

$\sin 3x + \sin 2x = 2\sin 3x\cos x = \sin 4x + \sin 2x$ sau $\sin 3x - \sin 4x = 0$

$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{7x}{2} = 0$.

$x/2 = k\pi$, $x = 2\pi k$, nu convine; $7x/2 = k\pi + \pi/2$; $x = 2k\pi/7 + \pi/7$; $k \in \mathbf{Z}$. $x = \pi/7$; $3\pi/7$; $5\pi/7$.

$x = \pi/n$, unde $n \geqslant 3$ convine numai $n = 7$, deci poligonul regulat cerut are 7 laturi.

4.103. Avem: $\sin\left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2}\right) = \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} =$

$$= \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)^2}{a^2bc}} - \sqrt{\frac{(p(p-a)(p-b)^2}{a^2bc}} = \frac{p-c}{a}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} - \frac{p-b}{a}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \frac{b-c}{a}\cdot\cos\frac{A}{2}.$$

4.104. Fie $ABCD$ trapezul, $\| AB \| = l$ și V vârful piramidei P. Ținînd seama de ipoteza unghiului diedru drept, rezultă că înălțimea piramidei este $VV_1 \perp AB$ ($V_1 \in AB$). Apoi ipoteza asupra muchiilor laterale ne dă: $\| AV_1 \| = \| VV_1 \| \operatorname{ctg}\beta$, $\| V_1B \| = \| VV_1 \| \operatorname{ctg}\beta$ și deci $\| AV_1 \| + \| V_1B \| = 2 \| VV_1 \| \operatorname{ctg}\beta \Rightarrow \| VV_1 \| = l\operatorname{tg}\beta/2$ și V_1 este mijlocul lui $|AB|$. Din triunghiurile dreptunghice VV_1C, VV_1D avem $\| V_1C \| = \| VV_1 \| \operatorname{ctg}\beta$, $\| V_1D \| = \| VV_1 \| \operatorname{ctg}\beta \Rightarrow \| V_1C \| = \| V_1D \| = 1/2$ rezultă apoi că V_1 este centrul cercului circumscris trapezului $ABCD$, care este astfel isoscel. Fie triunghiul ABD, care este dreptunghic în D și $\| DD_1 \|$ înălțimea trapezului. Avem $\| BD \| = l\sin\alpha$; $\| DD_1 \| = \| BD \| \cos\alpha = l\sin\alpha\cos\alpha$. Deci $\| AD_1 \| = \| DD_1 \| \operatorname{ctg}\alpha = l\cos^2\alpha$ și baza mică a trapezului $\| CD \| = l - 2 \| AD_1 \| = l - 2l\cos^2\alpha$.

Volumul V al piramidei

$$V = \frac{\text{aria}\,(ABCD) \cdot \| VV_1 \|}{3}. \tag{1}$$

Dar aria $(ABCD) = \frac{(l + l - 2l\cos^2\alpha)\, l\sin\alpha\cos\alpha}{2} = l^2\sin^3\alpha\cos\alpha$ și deci

$$V = \frac{l^3\sin^3\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}{6}.$$

4.105. a) Se știe că avem $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$ sau $1 - \sin^2 x + 1 - \sin^2 y + 1 - \sin^2 z = 1 \Rightarrow \Sigma \sin^2 x = 2$ sau $\Sigma \sin^2 x = 1 + \Sigma \cos^2 x$ deci $\Sigma(\cos^2 x - \sin^2 x) = -1$ sau $\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z + 1 = 0$.

b) $\Sigma \frac{1}{\cos^2 {}^2x} = 3 + \Sigma \operatorname{tg}^2 x = 3 + \Sigma \frac{b^2 + c^2}{a} = 3 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} \geqslant 3 + 6$ deci $\sec^2 x + \sec^2 y + \sec^2 z \geqslant 9$.

4.106. Avem $S = \frac{1}{2} \cdot \| AP \| \cdot \| PB \| = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\cos x} \cdot \frac{b}{\sin x} = \frac{ab}{\sin 2x}$. Deoarece a și b sînt constante, minimul lui S este atunci cînd $\sin 2x = 1$; $2x = \pi/2$ deci $x = \pi/4$.

4.107. a) Avem $\| AE \| = \| EB \| = \| EF \| = a$, $\sphericalangle EFD = \alpha$, distanța ui D de EF, $\| DD_1 \| = a$; aria $(DEC) = 2$ aria $(DEF) = a^2$ independent de α.

b) $A_t = \pi[\| BC^2 \| + \| AD \|^2 + \| CD \| (\| BC \| + \| AD \|)]$; $DD_1 \cap \cap BC = D_2$, $\| DD_2 \| = \| AB \| = 2a = \| CD \| \sin \alpha$; $\| CD \| = 2a/\sin \alpha$, $\| AD \| = \| EF \| - \| D_1F \| = a - a \operatorname{ctg} \alpha$; $\| BC \| = a + a \operatorname{ctg} \alpha$. Înlocuind se obține

$$A_t = 2\pi a^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{2}{\sin \alpha} \right) = 4\pi a^2 \cdot \frac{\sin \alpha + \sin 30^\circ}{\sin^2 \alpha} =$$

$$= 8\pi a^2 \cdot \frac{\sin \frac{\alpha + 30^\circ}{2} \cos \frac{\alpha - 30^\circ}{2}}{\sin^2 \alpha}; \quad V = \frac{2\pi a}{3} [BC^2 + AD^2 + BC \cdot AD] =$$

$$= \frac{2\pi a^3}{3} (3 + \operatorname{ctg}^2 \alpha).$$

c) $\frac{2\pi a^3}{3} (3 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) = \frac{4\pi m^3}{3} \Rightarrow \alpha$ este dat de $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2 \left(\frac{m}{a} \right)^3 - 3}$ și este posibil dacă $m > a \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

d) Volumul are cea mai mică valoare, cînd $\operatorname{ctg} \alpha$ este minimă, adică pentru $\alpha = 90^\circ$ și atunci m ia valoarea $m = a \sqrt[3]{3/2}$. În acest caz trunchiul de con se reduce la cilindrul circular drept, cu raza bazei a și înălțimea $2a$

4.108. a) $\| AC \|^2 = \| AB \|^2 + \| BC \|^2 - 2 | AB | \cdot | BC | \cos B$ sau $196 = 36 + 100 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cos B \Rightarrow \cos B = -\frac{60}{120} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sphericalangle B = 120^\circ$. Notăm $| BB' | = x$ și deoarece unghiul $AMC = 90^\circ$, avem $\| AC \|^2 = \| AM \|^2 + \| MC \|^2$ sau $196 = (6 + x)^2 + (10 + x)^2 = 2x^2 + 32x + 136$. Rezultă $x^2 + 16x - 30 = 0$; $x_{12} = -8 \pm \sqrt{94}$, convine numai $x = -8 + \sqrt{94} = -8 + 9{,}8 = 1{,}8$ m.

Aria triunghiului ABC este $\sqrt{15 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 1} = \sqrt{75 \cdot 9} = 15\sqrt{3}$, iar înălțimea $|BB_2|$ dusă din B este $30\sqrt{3}/14 = 15\sqrt{3}/7$.

Fie α unghiul diedru căutat:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{\|BB_2\|} = \frac{1 \cdot 7 \cdot 8}{15 \cdot \sqrt{3}} = \frac{12 \cdot 6 \cdot \sqrt{3}}{45} = \frac{12{,}6 \cdot 1{,}73}{45} = 0{,}483.$$

4.109. a) Fie $|VH|$ înălțimea piramidei. Ducem $|HD| \perp BC$, deci $|VD| \perp BC$ conform teoremei celor trei perpendiculare. Ducem: $|HE| \perp AB \Rightarrow VE \perp AB$; $HF \perp AC \Rightarrow VF \perp AC$. Rezultă $\|VH\| = h = \|VD\| \sin x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{h}{\|VD\|}; \quad \sin y = \frac{h}{\|VE\|}; \quad \sin z = \frac{h}{\|VF\|}; \quad \|VD\| \sin x = \|VE\| \sin y = \|VF\| \sin z = h.$$

Notăm $\|VD\| = h_a$; $\|VE\| = h_b$; $\|VF\| = h_c$ și ținem seama că $ah_a = bh_b = ch_c$. Obținem

$$\frac{\sin x}{1/h_a} = \frac{\sin y}{1/h_b} = \frac{\sin z}{1/h_c} \text{ sau } \frac{\sin x}{a} = \frac{\sin y}{b} = \frac{\sin z}{c} \text{ de unde } \frac{\sin x}{\sin A} = \frac{\sin y}{\sin B} = \frac{\sin z}{\sin C}.$$

b) Punctul H este interiorul triunghiului ABC. aria BCH + + aria ACH + aria $ABH = S(\cos x + \cos y + \cos z) = S$, unde S este aria triunghiului ABC.

Să mai arătăm că $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos y} + \frac{1}{\cos z} \geqslant 9$ știind că avem $\cos x +$ $+ \cos y + \cos z = 1$. Inegalitatea se mai scrie: $(\cos x + \cos y + \cos z) \times$

$$\times\left(\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos y} + \frac{1}{\cos z}\right) \geqslant 9 \text{ sau } 3 + \left(\frac{\cos x}{\cos y} + \frac{\cos y}{\cos x}\right) + \left(\frac{\cos x}{\cos z} + \frac{\cos z}{\cos x}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\cos y}{\cos z} + \frac{\cos z}{\cos y}\right) \geqslant 9$$ egalitatea are loc dacă $x = y = z$; cînd $\cos x = 1/3$.

4.110. Fie $ABCD$ baza unde $\sphericalangle BAD = 60°$; $\sphericalangle A'AB = 60°$; $\sphericalangle A'AD = 60°$. Notăm $|A'H|$ înălțimea paralelipipedului și ducem $|HM| \perp |AB|$, rezultă $|A'M| \perp |AB|$, $|A'H| \perp |HM|$.

Dacă $\|AB\| = a$, $\|AD\| = b$, $\|AA'\| = c$, avem $\|AM\| = c \cos 60° =$

$$= \frac{c}{2}; \quad \|AH\| = \frac{\|AM\|}{\cos 30°} = \frac{c\sqrt{3}}{3}; \quad \|A'H\|^2 = c^2 - \|AH\|^2 = c^2\left(1 - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{2c^2}{3}; \quad V = S \cdot \|A'H\| = \frac{ah\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{abc\sqrt{2}}{2}.$$

4.111. Fie h înălțimea piramidei și R raza cercului circumscris bazei. Avem $m = 2R \sin\frac{180°}{n}$, $h^2 = m'^2 - R^2 > 0$ sau $m'^2 - \frac{m^2}{4\sin^2\frac{180°}{n}} > 0$;

$$\frac{m'}{m} > \frac{1}{2\sin\frac{180°}{n}}, \quad \frac{m}{m'} < 2\sin\frac{180°}{n}.$$

4.112. a) Fie P un punct din spațiu. Avem cunoscută relația $\mathbf{PA} + \mathbf{PB} + \mathbf{PC} + \mathbf{PD} = 4\mathbf{AM}$.

($\mathbf{PA} + \mathbf{PB} = 2\mathbf{PS}$, $\mathbf{PB} + \mathbf{PC} = 2\mathbf{PR}$ dar $2\mathbf{PS} + 2\mathbf{PR} = 4\mathbf{PM}$). Dacă $P \equiv A$ avem relația cerută. Dacă $P \equiv M$ obținem relația: $\mathbf{MA} + \mathbf{MB} + \mathbf{MC} + \mathbf{MD} = \mathbf{0}$. Mai avem $\mathbf{MA} + \mathbf{MB} + \mathbf{MC} = 3\mathbf{MG}_a$; $\mathbf{MB} + \mathbf{MC} + \mathbf{MD} = 3\mathbf{MG}_a$; $\mathbf{MC} + \mathbf{MD} + \mathbf{MA} = 3\mathbf{MG}_c$; $\mathbf{MD} + \mathbf{MA} + \mathbf{MB} = 3\mathbf{MG}_c$.

Însumînd obținem $3(\mathbf{MA} + \mathbf{MB} + \mathbf{MC} + \mathbf{MD}) = 3(\mathbf{MG}_a + \mathbf{MG}_b + \mathbf{MG}_c + \mathbf{MG}_d) = \mathbf{0}$.

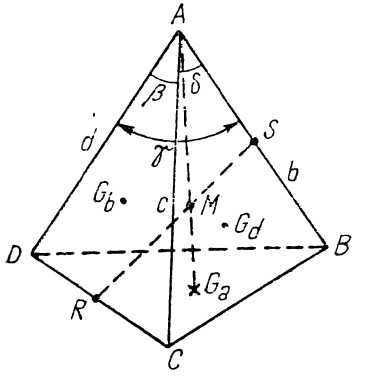

Fig. 4.112

b) $\mathbf{AB} + \mathbf{AC} + \mathbf{AD} = 4\mathbf{AM} = 3\mathbf{AG}_a$.

Proiectînd pe direcția $AM(AG_a)$ și pe AB, AC, AD avem

$$b\cos(BAM) + c\cos(CAM) + d\cos(DAM) = 4\,\|AM\|; \quad (1)$$

$$d + c\cos\beta + b\cos\gamma = 4\,|AM|\cos(DAM); \quad (2)$$

$$c + b\cos\delta + d\cos\beta = 4\,|AM|\cos(CAM); \quad (3)$$

$$b + c\cos\delta + d\cos\gamma = 4\,|AM|\cos(BAM). \quad (4)$$

Rezultă $\cos(DAM) = \dfrac{d + c\cos\beta + b\cos\gamma}{4\,\|AM\|}$; (2)'

$$\cos(CAM) = \frac{c + b\cos\delta + d\cos\beta}{4\,\|AM\|}; \quad (3)'$$

$$\cos(BAM) = \frac{b + c\cos\delta + d\cos\gamma}{4\,\|AM\|} \quad (4)'$$

Din (2)', (3'), (4') relația devine

$$\frac{b^2 + ab\cos\delta + bd\cos\gamma + c^2 + bc\cos\delta + dc\cos\beta + d^2 + dc\cos\beta + bd\cos\gamma}{4\,\|AM\|} = 4\,\|AM\|.$$

Deci $|AM| = \dfrac{1}{4}\sqrt{b^2 + c^2 + d^2 + 2bc\cos\delta + 2bd\cos\gamma + 2dc\cos\beta}$,

$\cos(DAM)$, $\cos(CAM)$, $\cos(BAM)$ sînt date de

$$\cos(DAM) = \frac{d + c\cos\beta + b\cos\gamma}{4\,\|AM\|} =$$

$$= \frac{d + c\cos\beta + b\cos\gamma}{(b^2 + c^2 + d^2 + 2bc\cos\delta + 2bd\cos\gamma + 2cd\cos\beta)^{1/2}}$$

4.113. a) Avem $VA_2 \perp B_1C_1$; $VB_2 \perp A_1C_1$ și $C_1V \perp A_1A_2$, iar $|VH| \perp (A_1B_1C_1)$, unde $|AA_2|$, $|BB_2|$, $|CC_2|$ sînt înălțimi.

$\|VA_2\| = \dfrac{h_a}{2} = \dfrac{b\sin C}{2} = R\sin B\sin C$, $\|AH\| = h'_a = \dfrac{\|AB_2\|}{\sin C} = \dfrac{c\cos A}{\sin C} = 2R\cos A$.

$$\| A_2H \| = h_a - h'_a = 2R(\sin B \sin C - \cos A) = 2R[\sin B \sin C + \cos(B + C)] = 2R \cos B \cos C.$$

$$\cos \alpha = \frac{h'_a - h_a/2}{h_a/2} = \frac{2 \cos A - \sin B \sin C}{\sin B \sin C} = 1 - 2 \frac{\cos B \cos C}{\sin B \sin C} =$$

$$= \frac{2 \cos A}{\sin B \sin C} - 1 = 1 - 2 \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C, \quad \text{deoarece} \quad \cos A = -\cos(B + C) = -\cos B \cos C + \sin B \sin C.$$

b) Înălțimea $| VH |$ a tetraedrului este

$$\| VH \| = \sqrt{\left(\frac{h_a}{2}\right)^2 - \left(h'_a - \frac{h_a}{2}\right)^2} =$$

$$= R\sqrt{|\sin^2 B \sin^2 C - 2(\cos A - \sin B \sin C)^2|} =$$

$$= 2R\sqrt{|\cos A \cos B \cos C|}.$$

$$S = \text{aria}(A_1B_1C_1) = 2\left(\frac{R}{2}\right)^2 \sin A \sin B \sin C,$$

de unde $V = \frac{S \cdot \| VH \|}{3} = \frac{1}{3} R^3 \sin A \sin B \sin C \sqrt{|\cos A \cos B \cos C|}$.

4.114. Fie dodecaedrul convex regulat cu fețele înscrise în cercul de rază egală cu unitatea și așezat cu una din fețe pe un plan P. Desfacem una din fețele alăturate și prin rotire în jurul laturii din planul P și o așezăm în acest plan. Notăm cu x distanța de la axa de rotație, la proiecția pe planul P a diagonalei paralelă cu axa de rotație a fetei înainte de rotire, iar cu y distanța la această diagonală.

Avem $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha = x/y$.

Notăm cu a'_5 apotema pentagonului stelat înscris în cercul de rază unitatea și avem $\frac{a'_5}{l'_5} = \frac{a_5}{l_5}$; $x = (l'_5 - l_5)\frac{a_5}{l_5}$.

Fie z apotema pentagonului regulat înscris în cercul de rază unitatea. Avem $z = \cos 2\varphi$; $\cos \varphi = a_5$; $z = 2a_5^2 - 1$.

$$y = a_5 + z = 2a_5^2 + a_5 - 1 \,; \cos \alpha = -\frac{a_5(l_5 - l'_5)}{l_5(2a_5^2 + a_5 - 1)}.$$

4.115. Vasul emisferic fiind neted, asupra barei $| AC |$ vor lucra următoarele forțe:

P = greutatea barei orientată vertical în jos,

$\mathbf{R}_1$ = reacțiunea emisferei asupra barei orientată radial,

$\mathbf{R}_c$ = reacțiunea emisferei asupra barei orientată perpendicular pe AB.

În poziția de echilibru, rezultanta celor trei forțe este nulă și pentru acesta este necesar și suficient ca ele să fie concurente. Fie M punctul de

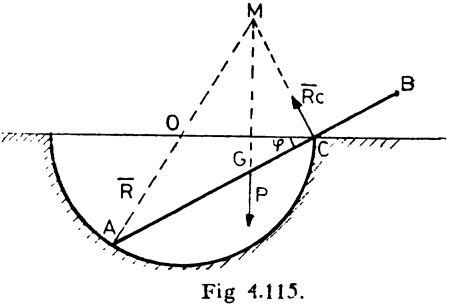

Fig 4.115.

concurență. Se observă că triunghiul ACM este dreptunghic în C. Cum $\sphericalangle MAC = \sphericalangle OCA = \varphi$ rezultă că $\| AM \| = 2r$.

Însă $\| AC \| = \| AG \| + \| GC \| = 2r \cos \varphi$ (1). Din triunghiul drept unghic GCM se poate scrie: $\| GC \| = | MC | \operatorname{tg} \varphi = 2r \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi$ (căci $\sphericalangle GMC = \sphericalangle ACO = \varphi$) Înlocuind în (1), $\| AC \| = a + 2r \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi = 2r \cos \varphi$, de unde $4r \cos^2 \varphi - a \cos \varphi - 2r = 0$ care dă soluțiile, $\cos \varphi = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 + 32r^2}}{8r}$.

4.115. Fie c raza bazei conului și a, b razele bazelor trunchiului de con.

Rezultă din enunț $\dfrac{1}{3} \pi c^2 h = \dfrac{1}{3} \pi (a^2 + b^2 + ab) h$ sau $c^2 = a^2 + b^2 + ab$.

Trebuie să arătăm mai întîi că: $a + b > c$ și $a - b < c$ după care se va putea afirma că, cu a, b, c, se poate construi un triunghi. Deducem: $a^2 + b^2 + ab > c^2 - ab$, $(a + b)^2 > c^2$, sau $(a + b) > c$ și apoi $a^2 + b^2 + ab < c^2 + 3ab$; $(a - b)^2 < c^2$; $| a - b | < c$.

Deci cu a, b, c se poate forma un triunghi.

Teorema cosinusurilor aplicată în acest triunghi dă $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, C fiind unghiul cel mai mare. Rezultă $ab = -2ab \cos C$ sau $\cos C = -1/2$. Deci $C = 120°$.

4.117. Cunoaștem inegalitatea de numere pozitive: $(x+y)(y+z)(x+z) \geqslant 8xyz$; deoarece $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ sînt cantități pozitive rezultă că

$$\prod (\sin A + \sin B) \geqslant 8 \prod \sin A = 8 \cdot 8 \prod \sin \frac{A}{2} \cdot \pi \cos \frac{A}{2}. \qquad (2)$$

Comparînd inegalitățile (1) și (2) rezultă

$$8 \prod \sin \frac{A}{2} \leqslant 1, \text{ deci } \prod \sin \frac{A}{2} \leqslant \frac{1}{8}. \qquad (3)$$

inegalitate trigonometrică cunoscută.

Relația (1) o mai scriem $\dfrac{1}{8 \prod \cos \dfrac{A}{2}} \leqslant \dfrac{1}{\prod (\sin A + \sin B)}$ care înmulțită cu relația (3) ne dă $\prod \operatorname{tg} \dfrac{A}{2} \leqslant \dfrac{1}{\prod (\sin A + \sin B)}$; dar $\dfrac{1}{\prod (\sin A + \sin B)} = \dfrac{8R^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}$, relațiile fiind cele obișnuite în triunghiul ABC.

Deoarece $(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8abc$ rezultă că $\dfrac{1}{\prod (\sin A + \sin B)} \leqslant \dfrac{R^3}{abc}$; $\prod \operatorname{tg} \dfrac{A}{2} \leqslant \dfrac{1}{\prod (\sin A + \sin B)} \leqslant \dfrac{R^3}{abc}$, cu atît mai mult avem $\prod \operatorname{tg} \dfrac{A}{2} \leqslant \dfrac{R^3}{abc}$ sau: $abc \cdot \operatorname{tg} \dfrac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \dfrac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \dfrac{C}{2} \leqslant R^3$. Prin înmulțire cu p^3 și avînd în vedere că $p \operatorname{tg} \dfrac{A}{2} = r_a$, obținem $abc \cdot r_a, r_b \cdot r_c \leqslant (Rp)^3$.

4.118. Aria triunghiului este dată de relația $S = \frac{ab \sin C}{2}$. Pentru ca S să fie maximă este suficient ca fiecare din factorii numărătorului să fie maxim, adică vom avea: $a = 1$, $b = 2$. $C = 09°$, $(\sin C = 1)$.

În acest caz, $c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 4 = 5$; $c = \sqrt{5}$; $2 < \sqrt{5} < 3$, ceea ce corespunde. Aria maximă este 1.

4.119. Avem $\| BC \| = \| AD \| = a$, $\| CA \| = \| BD \| = b$, $\| AB \| = \| CD \| = c$ și fie $| MN |$ bimediana laturilor $| AC |$ și $| BD |$, iar G centrul de greutate. $\| GM \| = GN \|$, $| MN |$ este perpendiculară pe $| AC |$ și $| BD |$.

$$\| MN \|^2 = \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2); \quad \| MG \|^2 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{8}$$

$$R^2 = \| AG \|^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}; \quad \sin^2 \beta = \frac{\| MG \|^2}{R^2} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

4.120. Notăm cu A', B', C' proiecțiile lui C' piciorul înălțimii $| VV' |$ a tetraedrului, respectiv pe laturile $| BC |$, $| CA |$, $| AB |$.

Fie S aria triunghiului ABC și h înălțimea $\| VV' \|$.

$$S = \frac{1}{2}(ah \operatorname{ctg} \alpha + bh \operatorname{ctg} \beta + ch \operatorname{ctg} \gamma) \quad \text{deci}$$

$$h = \frac{2S}{a \operatorname{ctg} \alpha + b \operatorname{ctg} \beta + c \operatorname{ctg} \gamma} \text{ și } V = \frac{Sh}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a \operatorname{ctg} \alpha + b \operatorname{ctg} \beta + c \operatorname{ctg} \gamma}.$$

Rezolvarea ecuațiilor trigonometrice. Aplicații. Inecuații trigonometrice. Ecuații trigonometrice cu parametri. Discuția ecuațiilor· Sisteme de ecuații trigonometrice. Diverse

PROBLEME

ENUNȚURI

5.1. a). Să se rezolve ecuația $4 \sin x \cos x = 1$.
b) Să se arate că orice soluție a ecuației precedente este soluție și pentru ecuația $\cos^2 2x = 2 - 5 \sin x \cos x$.
(Admitere în treapta a II-a, Jud. Neamț, 1978)

5.2 Să se rezolve ecuația $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2$.

5.3. Să se rezolve ecuația $\sqrt{3} \sin 3x + \cos 3x = 2$.

5.4. Să se rezolve ecuația $\operatorname{ctg} 6x + \operatorname{tg}^2 x = 3 \operatorname{tg} 6x + 1/\cos^2 x - 1$.

5.5. Să se rezolve ecuația $(1 - \sin 2x)\ 5(\sin x - \cos x) + 4 = 0$

5.6. Să se rezolve ecuația $(1 - \cos^2 3x)(4 \sin^2 2x - 3) = 0$.
(G.M.B., 13 139, *C.I.T.*)

5.7. Să se rezolve ecuația $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x$.

5.8. Să se rezolve ecuația $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0$.

5.9. Să se rezolve ecuația $(\cos x + \pi/10) = 2 \sin (\pi/5 - x/2)$.

5.10. Să se rezolve ecuația $\dfrac{\cos 3x - \cos 5x}{\sin 2x} = 0$.

5.11. Să se rezolve ecuația $\cos 2x - 3 \cos x = 4 \cos^2 \dfrac{x}{2}$.

5.12. Să se rezolve ecuația $2 \sin^2 x = \sin 2x$.

5.13. Să se rezolve ecuația $2 \sin^2 3x + \sin^2 6x = 0$.
(Institutul Pedagogic, Oradea, 1978)

5.14. Să se rezolve ecuația $\sin^4 \dfrac{x}{8} + \cos^4 \dfrac{x}{8} = \dfrac{5}{8}$.

5.15. Să se rezolve ecuația $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

5.16. Să se rezolve ecuația $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = 3/8$.
(Institutul Pedagogic, Oradea, 1978

5.17. Să se rezolve ecuația $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi - x}{2}\right) = 2$.

5.18. Să se rezolve ecuația $\sin x + \sin 2x = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$.
(Admitere în treapta a II-a, Satu-Mare, 1978)

5.19. Se dă exprcsia $E(x) = \dfrac{\sin 2x - 2}{2} + \sin x + \cos x$.

a) Să se calculeze $E(200^g)$, $E\left(-\dfrac{3\pi}{2} \text{ radiani}\right)$

b) Să se rezolve ecuația $E(x) = 0$.

c) Să se arate că dacă $x \in (0, \pi/2)$, atunci $E(x) > 0$.

(Admitere în treapta a II-a, Arad, 1978)

5.20. Să se rezolve ecuația $\sin 3x - \cos 2x + \sin x = 1$.

5.21. Să se rezolve ecuația $\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} x + 5\pi/4) = 1$.

5.22. Să se rezolve ecuația $\sin x + \sin 2x = 2$.

5.23. Să se rezolve ecuația $\cos^4 x + \sin^4 x - 2 \sin 2x + 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 0$.

5.24. Să se rezolve ecuația $2 \sin^2 x - \sqrt{3} \sin 2x = 0$.

(Institutul de Petrol și Gaze, Ploiești, 1978)

5.25. Să se rezolve ecuația $\dfrac{2 \cos 2x - \cos x - \cos 3x}{\cos 2x} = 1$.

5.26. Să se rezolve ecuația $2 \cos^3 x - 3 \sin x \sin 2x = 1$.

5.27. Să se rezolve ecuația $2 \cos^2 8x + \sin 6x = 1$.

5.28. Să se rezolve ecuația $4 \cos x - \cos 3x = 3$.

5.29. Să se rezolve ecuația $\sin x + 2 \sin x^2 + \sin 5x = 1$.

5.30. Să se rezolve ecuația $1 + 2 \sin 4x + 3 \cos^2 2x = 0$.

5.31. Să se rezolve ecuația $2 \cos^2 \dfrac{x}{2} + \cos 2x = 1$.

5.32. Să se rezolve ecuația $\sin x \cdot \sin 3x = 3/2 - 2 \cos 2x$.

5.33. Să se rezolve ecuația $\sin 3x - \cos 2x = \sin x$.

5.34. Să se rezolve ecuația

$(\cos^2 x - \sin^2 x)(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)(1 - \operatorname{tg}^2 x) = 4 \operatorname{tg} x$.

5.35. Să se rezolve ecuația $\cos x \cdot \cos 3x = 2 \sin x \sin 3x$.

5.36. Să se rezolve ecuația $\dfrac{\sqrt{3} + \sin 2x + 3 \cos x}{1 + 2 \sin x} = \cos x - \sqrt{3}$.

5.37. Fie expresia $E(x) = 4 \sin 4x + \operatorname{tg} 2x + 4 \sin 2x + \operatorname{tg} x$.

a) Să se rezolve ecuația $E(x) = 0$.

b) Să se calculeze $E(\pi/12)$.

5.38. Să se rezolve ecuația $\sin x - 5 \cos \dfrac{2x}{3} - 3 \sin \dfrac{x}{3} - 3 = 0$.

(Institutul Politehnic, Cluj-Napoca, 1978)

5.39. Să se rezolve ecuația $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) =$

$$= \frac{\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} + \operatorname{ctg} \dfrac{x}{2}}{2\sqrt{2}}.$$

5.40. Să se rezolve ecuația $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.

5.41. Să se rezolve ecuația $\frac{2(\cos^3 x - \cos 3x)}{3 \sin x} = 1 + 5 \cos 2x$.

5.42. Să se rezolve ecuația $2 \cos^2 4x + \sin 3x = 1$.

5.43. Fie expresiile $E_1 = 1 + \cos x + \cos 2x$, și $E_2 = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$. Să se rezolve ecuația $E_1 = E_2$.

5.44. Să se rezolve ecuația $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$.

5.45. Să se rezolve ecuația $\sin^3 x(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^2 x(1 + \operatorname{tg} x) = \cos 2x$. (Institutul de Petrol și Gaze, Ploiești)

5.46. Să se rezolve ecuația $\cos^8 \frac{x}{2} - \sin^8 \frac{x}{2} = 2 - \cos x$.

5.47. Să se rezolve ecuația $\sqrt{2} \sin x + \sin 2x + \cos 2x = 1$.

5.48. Să se rezolve ecuația $(\sin x + \operatorname{cosec} x)(\cos x + \sec x)(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = 17$.

5.49. Să se rezolve ecuația $\cos 4x \cos 2x = \cos 5x \cos x$.

5.50. Să se afle soluțiile situate în intervalul $(-\pi, \pi)$ ale ecuației $\frac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x + \cos x} = 3 \operatorname{tg} x$. (Institutul Politehnic, București, 1978)

5.51. Să se rezolve ecuația $\frac{\sin x + \sin 2x}{\sin 3x} + 1 = 0$.

5.52. Să se rezolve ecuația $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 4x = \operatorname{ctg} 3x$.

5.53. Să se rezolve ecuația $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \cos 2x + \sin\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin 2x - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right)$. (Institutul Politehnic, Iași, 1978)

5.54. Să se rezolve ecuația $\frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{8}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 0$.

5.55. Să se rezolve ecuația $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 3/2$.

5.56. Să se rezolve ecuația $\sin 9x + \sin 5x + 2 \sin^2 x = 1$. (Institutul de Petrol și Gaze, Ploiești)

5.57. Să se rezolve ecuația $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.

5.58. Să se rezolve ecuația $\cos 4x - \cos 9x - \cos 5x + 1 = 0$.

5.59. Să se rezolve ecuația $\sin x \sin 2x + \cos^2 x = \sin 4x \sin 5x + \cos^2 4x$.

5.60. Să se rezolve ecuația $3 \cos^2 x - \sin^2 x - \operatorname{tg} x = 0$. (Institutul Politehnic, București, 1976)

5.61. Să se rezolve ecuația $\sqrt{2} \sin x + \sin 2x + \cos 2x = 1$.

5.62. Se dă expresia $E(x) = \frac{\cos 4x + 2 \cos 6x + \cos 8x}{\sin 4x + 2 \sin 6x + \sin 8x}$.

a) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.

b) Să se calculeze valoarea expresiei $E(x)$ pentru $x = \frac{\pi}{72}$.

(Institutul de Arhitectură, București, 1978)

5.63. Să se rezolve ecuația $8(\sin x + \cos x) + 3 \sin 2x = 0$ și să se afle valoarea expresiei $E(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$ pentru argumentele x, care verifică ecuația (Facultatea de studii economice, Timișoara).

5.64. Să se rezolve ecuația $\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} + \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 2$.

(G.M.B., 2015, *C.I.-Ț.*)

5.65. Să se rezolve ecuația $\frac{2\sqrt{3}}{\sin 2x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 8$.

5.66. Să se rezolve ecuația $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos x - \cos\frac{\pi}{6} = 0$.

5.67. Să se rezolve ecuația $\sin 2x + 5\cos^2 x - 4 = 0$.

5.68. Să se rezolve ecuația $1 - 2\sin^2 4x + \sin 10x = 0$.

5.69. Să se rezolve ecuația $\sin 2x - \operatorname{tg} x + \cos 2x = 1$.

5.70. Să se rezolve ecuația $\sin x \cos 5x = \sin 9x \cos 3x$.

5.71. Să se rezolve ecuația $\cos^2 2x + 1 = \sin^2 3x$.

5.72. Să se rezolve ecuația $\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{1}{2} + \cos 4x$.

5.73. Să se rezolve ecuația $8\cos x = \sqrt{3}/\sin x + 1/\cos x$.

(A.S.E., București, 1978)

5.74. Să se rezolve ecuația $\sin^8 x + \cos^8 x = \cos^2 2x$.

5.75. Să se rezolve ecuația $(2\sin 13x + \sin 9x + \sin 5x + \sin x) = \sin 15x + 2(\sin 11x + \sin 7x + \sin 3x)$, unde $x \in [0, 2\pi]$.

(G.M.B., 6767, *C. Ionescu-Țiu*)

5.76. Să se rezolve ecuația $\frac{\sin x}{2 - \cos x} = a \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, unde $a \in R$.

Discuție.

5.77. Să se rezolve ecuația $(a^2 - b^2)\sin x - 2ab\sin^3 x = 0$, unde $a, b \in R$. *Discuție.* (Pitagora, VII; 31, *C.I.-Ț.*)

5.78. a) Să se rezolve ecuația $\cos(\pi x^2) + \cos(\pi x) = 0$.

b) Să se precizeze rădăcinile întregi.

5.79. Să se rezolve în $x \in R$ ecuația $4\cos(x + \alpha)\cos(x - \alpha) = 1 + 2\cos 2\alpha$, unde $\alpha \in R$.

5.80. Să se arate că ecuația $\sin x \sin 2x \sin 3x = 3/4$ nu are soluții.

5.81. Să se rezolve ecuația $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x = 0$.

5.82. Să se rezolve ecuația $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$.

5.83. Să se arate că $\operatorname{arctg}\frac{13}{34} - \operatorname{arctg}\frac{21}{55} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2145}$.

(S.G.M., VII., 174, *C.I.-Ț.*)

5.84. Se dă $\sin a = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

a) Calculînd $\sin 2a$ să se determine unghiul a.

b) Să se rezolve ecuația $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cos x \cos 2x$. (G.M.B., 15717, *P. Alger.*

5.85. Se consideră ecuația $\sin x \cos x = 1/4$.

a) Să se afle rădăcinile ecuației în intervalul $[-\pi/2, \pi/2]$.

b) Să se arate că ecuația nu are rădăcini în intervalul $[\pi/2, 3\pi/2]$ (Facultatea de matematică, București, 1976)

5.86. Să se rezolve ecuația $\sin(\pi/4 - x) = \cos(\pi/3 + x)$ și apoi, folosind rezultatele, să se deducă egalitățile $\operatorname{tg} \frac{\pi}{24} = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$;

$\operatorname{tg} \frac{5\pi}{24} = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$; $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{24} = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2})$; $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{24} = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

(G.M.B., 1263, *C.I.-Ț*).

5.87. Să se verifice identitatea $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -2 \operatorname{ctg} 2x$ și apoi să se rezolve ecuația $\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 2x + 4 \operatorname{tg} 4x - \operatorname{czg} x = 0$.

(Institutul de Construcții, București, 1978)

5.88. Să se afle rădăcinile ecuației $1 - \sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ din intervalul $[0, 2\pi]$.

5.89. Să se rezolve ecuația $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos |x|}{1 - \sin |x|}$.

5.90. Să se rezolve ecuația $|\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x| = 4/\sqrt{3}$

5.91. Să se rezolve ecuația $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 5 - \sin^2 3x$

5.92. Să se rezolve ecuația $\sin x + \operatorname{tg} x + \operatorname{cosec} x = \cos x + \operatorname{ctg} x + \sec x$. *Verificare.*

5.93. Să se arate că $\operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{11} + \operatorname{arctg} \frac{29}{47} = \frac{\pi}{4}$.

(S.G.M., 7, 1949, *C.I.-Ț*

5.94. Să se arate că ecuația $\frac{x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1}{x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1} = \sqrt{3}$ admite rădăcina $x_1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{48}$. (G.M.B., 14405, *C.I.-Ț*)

5.95. Se dă ecuația $a \sin x + b \sin 3x + c \sin 5x + d \sin 7x = 0$.

a) În ce condiții ecuația admite soluția $x = k\pi/4$, $k \in \mathbf{Z}$ și în acest caz să se rezolve.

b) În ce cazuri pentru $l = 1$ ecuația admite numai aceste soluții. *Discuții.* (G.M.B., 14865, Concurs elevi, 1975)

5.96. Să se rezolve ecuația $\sin x - \sin x \cdot \cos 6x = 2$. *Verificare.*

5.97. Se consideră ecuația $6 \cos 2\varphi - 7x \cos^2 \varphi + x^3 = 0$. Considerînd ecuația ca avînd necunoscuta φ și parametrul x, să se determine valorile lui x pentru care ecuația admite soluții. (Facultatea de metalurgie, București)

5.98. Să se rezolve ecuația $2 \sin\left(\frac{5}{3} \pi \cos \pi x\right) = 1$.

5.99. Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația $3 \arcsin x = 5$.

5.100. Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația $\sin(\cos x) = \cos(\sin x)$. *Discuție.*

5.101. Să se rezolve ecuația $\cos^3 x + \sin^3 x = \cos 2x$.

5.102. Să se rezolve în **R** ecuația: $\frac{\sin^2 x}{1+\sin x} + \frac{\cos^2 x}{1+\cos x} +$

$$+ \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg} x} + \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{1+\operatorname{ctg} x} + \frac{\sec^2 x}{1+\sec x} + \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{1+\operatorname{cosec} x} = \frac{25}{4}.$$

5.103. Să se rezolve în **R** ecuația: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\cos 2x}\left(\cos 6x + 2\sin^2\frac{3}{2}x\right) +$

$$+ \cos 7x + \cos 5x + 4\cos x \sin^2\frac{3}{2}x = 0.$$

5.104. a) Să se rezolve ecuația $\sqrt{\sec^2 x + a\operatorname{tg} x} + \sqrt{\sec^2 x - a\operatorname{tg} x} = 1 + \operatorname{tg} x$. *Discuție.*

b) Să se verifice soluțiile pentru $a = 2$ (G.M.B., 4960, *C.I.-Ț*)

5.105. Să se determine valorile lui m pentru care ecuația $\sqrt{1-\cos 2x} + \sqrt{1+\cos 2x} = m$ admite soluții în intervalul $I = [0, \pi]$. Pentru $m = \sqrt{2}$ să se determine soluțiile acestei ecuații care se găsesc în intervalul I. *Discuție.*

5.106. Să se afle valorile lui x din intervalul $(0, \pi)$ care verifică ecuația $8\cos x \cos 2x \cos 4x = 1$. (*C.I.-Ț*)

5.107. Dîndu-se ecuația $p(\sin x + 1) - \sin^2 x = \cos 2x$:

a) Să se determine valoarea parametrului p, pentru care ecuația admite două soluții în intervalul $[0, 2\pi]$. *Discuție.*

b) Să se rezolve ecuația pentru $p = 1/2$.

c) Fără a rezolva ecuația dată, să se calculeze $\operatorname{tg} 2x$ în funcție de p

(Institutul Politehnic, Timișoara)

5.108. Să se afle valorile lui x din intervalul $(0, \pi)$ care sînt rădăcini ale ecuației $16\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = 1$. (*C.I.-Ț*)

5.109. Să se arate că pentru $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ avem relația $8\cos\frac{k\pi}{7}\cos\frac{2k\pi}{7}\cos\frac{3k\pi}{7} = 1$. (*C.I.-Ț*)

5.110. Să se arate că ecuațiile $32x^5 - 40x^3 + 10x - 1 = 0$ și $(x + \sqrt{x^2-1})^5 + (x - \sqrt{x^2-1})^5 = 1$, sînt echivalente și apoi să se rezolve.

(G.M., 13 579, *C.I.-Ț.*)

5.111. Să se rezolve ecuația $\operatorname{tg} nx = \frac{\sin(a+x)+1}{\cos(a+x)}$, $n \in \mathbf{R}$.

5.112. a) Să se arate că ecuația $x^3 - 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\cdot x^2 - 3x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 0$.

admite rădăcina $x_1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{36}$ și să se afle și celelalte rădăcini.

b) Să se deducă egalitatea $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\operatorname{tg}\frac{5\pi}{36}\operatorname{tg}\frac{7\pi}{36} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{36}$. (*C.I.-Ț*)

5.113. Să se rezolve ecuația $\frac{\sin x}{\cos a} - \frac{\cos x}{\sin a} = 2$, unde $\sin 2a \neq 0$, $a \in \mathbf{R}$.

(G.M.B., 12 408, *C.I.-T.*)

5.114. Să se rezolve ecuația $\sin 3x + \sin 2x = m \sin x$, $m \in \mathbf{R}$.

5.115. Să se rezolve ecuația $\frac{\sin x}{2 - \cos x} = a \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $a \in \mathbf{R}$.

5.116. Se dă ecuația $m \cos 6x + (4 - m) \sin 3x + 2 - m = 0$.

a) Să se rezolve ecuația.

b) Să se afle valorile lui m pentru care ecuația are toate rădăcinile reale.

c) Să se afle soluțiile particulare cuprinse între 0° și 360° pentru $m = 2\sqrt{2}$.

5.117. a) Să se rezolve ecuația $\cos 3x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$.

b) Folosind rezultatul de la punctul precedent să se deducă valorile lui $\cos \frac{2\pi}{5}$, $\cos \frac{4\pi}{5}$, $\cos \frac{\pi}{5}$, $\cos \frac{3\pi}{5}$, $\sin \frac{\pi}{10}$ și $\sin \frac{3\pi}{10}$. (G.M.B., 1198, *C.I.-T.*)

5.118. Să se rezolve ecuația în x:

$$\operatorname{tg}[(m + 3)x] \operatorname{tg} mx = \operatorname{tg}[(n + 1)x] \cdot \operatorname{tg}[(m + 2)x], \quad m \in \mathbf{R}.$$

Discuție.

5.119. Se dă $\sin x + m \cos x = n$, unde m și $n \in \mathbf{R}$.

a) Să se arate că $m \sin x - \cos x = \pm \sqrt{1 + m^2 - n^2}$.

b) Să se arate că în ipoteza dată avem relația

$(1 + m^2) \sin^2 x + 2n \sin x + n^2 - m^2 = 0$. *Discuție.* (G.M.B., 12047, 1973)

5.120. Să se rezolve și să se discute ecuația în x, $a \in \mathbf{R}$, $16x^4 - 32x^3 + 8(\sin^2 2a - 2)x^2 + 8(\sin^2 2a - 4)x + \sin^2 2a(\sin^2 2a + 8 = 0$

5.121. Să se rezolve ecuația $4 \sin^2 x + \sin^2 nx = 4 \sin x \sin^2 nx$; caz particular $n = 3$.

5.122. Se consideră expresia $E(x) = p \sin 3x + q \sin 2x$.

a) Să se rezolve și să se discute ecuația $E(x) = n \sin x$ pentru $p = q = 1$.

b) Valoarea expresiei $E(x)$ pentru $p = 1$, $q = \frac{1 - a^2}{2\sqrt{1 + a^2}}$ și $1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{a} \operatorname{tg} x = \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}}$, unde $x \in (\pi/2, \eta)$ și $a < 0$. *Discuție.*

5.123. Să se rezolve ecuația $x^2 + 2x \sin(xy) + 1 = 0$, $x, y \in \mathbf{R}$.

5.124. Să se rezolve ecuația $\sin^6 x + \cos^6 x = a$. *Discuție.*

5.125. Să se rezolve inecuația $\sin x - \sqrt{3}\cos x < 1$, unde $x \in [0, 2\pi]$.
(G.M.B., 9379, *M. Drulea*)

5.126. Să se rezolve inecuația $\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{\cos x}{1+\sin x} \leqslant a$, unde $a > 0$.

5.127. Să se rezolve inecuația $\sin^2 x + \sin 2x \geqslant a$. *Discuție.*

5.128. Să se rezolve în $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ sistemul: $\sin(x+y) + 2\sqrt{3}\cos x \cos y = 0$; $\sin(x+y) - 2\sqrt{2}\sin x \sin y = 0$.

5.129. Să se rezolve în $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ sistemul: $\cos x + 3\sin x = 2\cos y$; $\cos y + 3\sin y = 2\cos x$.

5.130. Să se rezolve în $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ sistemul:

$$x + y = 45°;\ \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = \frac{5}{6}, x, y \in (0, 180°).$$

5.131. Să se rezolve în $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ sistemul de ecuații:
$\sin(x+y) = 0$, $\cos x \cos y = 1$.

5.132. Să se rezolve în $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ sistemul:
$\sin x \cos y = -1/2$; $\cos x \sin y = 1/2$.

5.133. Să se rezolve în $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ sistemul:
$\sin(x+y) + \cos(x-y) = 0$; $\sin(x+y) - \cos(x-y) + 2 = 0$.

5.134. Să se rezolve în $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ sistemul $x + y = \pi/6$; $\cos x \cos y = 1(+\sqrt{3})/4$.

5.135. Să se rezolve în $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ sistemul:
$\sin^2 x + \cos^2 y = 1/2$; $x + y = \pi/4$.

5.136. Să se rezolve în $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ sistemul:
$\sin x = 5\sin y$; $\cos x + 3\cos y = 2$.

5.137. Să se rezolve în $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ sistemul de ecuații:
$4\sin x \sin y = 3$; $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 3$.

5.138. Să se rezolve în $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ sistemul:
$\cos^2 x + 3\sin x \sin y = 0$; $\cos 2x - 21\cos 2y + 10 = 0$.

5.139. Să se rezolve în $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ sistemul:
$x + y = 7\pi/6$; $\sin x \cos y + 3\cos x \sin y = 0$.

5.140. Să se rezolve în $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ sistemul:

$$\sin x + \sin y = \frac{2a-4}{a-1};\ \sin x \cdot \sin y = \frac{a-3}{a-1}.$$ *Discuție.*

5.141. Se dă sistemul de ecuații:
$(a-b)\sin(x+y) - (a+b)\sin(x-y) = 0$; $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = ab$.
a) Să se rezolve în $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ sistemul.
b) Să se determine arcele x și y pentru cazul cînd $a = -1$ și $b = \sqrt{3}$.
(Institutul Politehnic, Iași, iunie 1967)

5.142. Să se rezolve în $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ și să se discute sistemul:

$$\sin x + \sin y = 2 - 3/(a+1);$$
$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 - 6/(a+1);\ a \neq -1.$$

5.143. Să se rezolve în $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ sistemul:

$\operatorname{tg} x + \sin y = 0$; $(1 - \cos x)\cos 2y + \sin x \sin y + 1 = 0$. (Concurs, U.R.S.S., 1973)

5.144. Să se rezolve în $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ sistemul:

$\operatorname{tg} 3x = 0{,}75 \operatorname{tg} 2y$; $\sin x \cos(x - y) = 0{,}5 \sin y$. (Concurs, U.R.S.S., 1973)

5.145. Să se rezolve în $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ sistemul:

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin \dfrac{\pi + B}{3}}{\sin \dfrac{\pi + C}{3}}; \qquad x + y = \pi - \frac{A}{3}, \text{ unde } A + B + C = \pi.$$

SOLUȚII ȘI INDICAȚII

5.1. a) $2 \sin 2x = 1$, $\sin 2x = 1/2$; $2x \in \bigcup \left\{2k\pi + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}\right\}$ $k \in \mathbf{Z}$.

$$x \in \bigcup \left\{k\pi + \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{12}\right\}, \; k \in \mathbf{Z}.$$

b) $\cos^2 2x = 2 - \frac{5}{2} \sin 2x$ sau $2(1 - \sin^2 2x) = 4 - 5 \sin 2x$, dar $\sin 2x = 1/2$; $2(1 - 1/4) = 4 - 5/2$ sau $3/2 = 3/2$, deci rădăcinile primei ecuații sînt și ale celei de-a doua.

5.2. Ecuația dată este echivalentă cu $\cos(x - \pi/3) = 1$ și deci $x \in \in \bigcup \{\pi/3 + 2k\pi\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.3. Împărțim cu 2 și ecuația devine $\sin 3x \cos \frac{\pi}{6} + \cos 3x \sin \frac{\pi}{6} = 1$, sau $\sin(3x + \pi/6) = 1$, deci $3x + \pi/6 = 2k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$ de unde $x \in \bigcup \{2k\pi/3 + \pi/9\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.4. Avem $\frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{scc}^2 x = \operatorname{tg}^2 x + 1$. Ecuația devine $\operatorname{ctg} 6x + \operatorname{tg}^2 x = 3 \operatorname{tg} 6x + \operatorname{tg}^2 x$ sau $\operatorname{ctg} 6x = 3 \operatorname{tg} 6x$; $x \neq k\pi \pm \pi/2$; $\operatorname{ctg}^2 6x = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{ctg} 6x = \pm \sqrt{3}$.

Pentru $\operatorname{ctg} 6x = \sqrt{3} \Rightarrow 6x = k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x \in \bigcup \left\{\frac{k\pi}{6} + \frac{\pi}{32}\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Pentru $\operatorname{ctg} 6x = -\sqrt{3} \Rightarrow 6x = k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x \in \bigcup \left\{\frac{k\pi}{6} - \frac{\pi}{32}\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.5. Ecuația dată se mai scrie $(\sin x - \cos x)^2 - 5(\sin x - \cos x) + 4 = 0$, de unde $\sin x - \cos x = 4$ care nu convine sau $\sin x - \cos x = 1$. Avem $\sin x = 1$, $\cos x = 0$ deci $x_1 \in \bigcup \left\{2k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$. și $\sin x = 0$, $\cos x = -1$ de unde $x_2 \in \bigcup \{(2k + 1)\pi\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.6. Din ecuația $1 - \cos^2 3x = 0$ rezultă $\cos 3x = \pm 1$, $3x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, $x_1 \in \bigcup \{k\pi/3\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Din ecuația $4 \sin^2 2x = 3$, rezultă $\sin 2x = \pm \sqrt{3}/2$, $2x = k\pi \pm \pi/3$, deci $x_2 \in \bigcup\{k\pi/2 \pm \pi/6\} k \in \mathbf{Z}$.

5.7. Ecuația dată se mai scrie

$$(1 - \operatorname{tg} x)\left(1 + \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\right) = 1 + \operatorname{tg} x \text{ sau } \operatorname{tg}^2 x(1 + \operatorname{tg} x) = 0;$$

deci $x_1 \in \bigcup\{k\pi\}$, $x_2 \in \bigcup \{k\pi - \pi/4\}$ $k \in \mathbf{Z}$.

5.8. Notăm $\sin x + \cos x = t$. Ecuația dată devine $2t + (t^2 - 1) + 1 = 0$ sau $t^2 + 2t = 0$; $t_1 = 0$, $t_2 = -2$. Avem:

$\sin x + \cos x = 0$ și $\sin x + \cos x = -2$.

Prima ecuație este echivalentă cu $\operatorname{tg} x = -1$, deci $x = k\pi - \pi/4$, iar a doua nu admite soluții.

5.9. Notăm $\pi/5 - x/2 = t \Rightarrow x = 2\pi/5 - 2t$, $x + \pi/10, = 2\pi/5 - 2t + \pi/10 = \pi/2 - 2t$.

Ecuația dată devine $\sin 2t = 2 \sin t$ sau $2 \sin t(\cos t - 1) = 0$, $\sin t = 0$, $t_1 \in \bigcup\{k\pi\}$ sau $\pi/5 - x/2 = k\pi$ de unde $x \in \bigcup \{2\pi/5 + 2k\pi\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.10. Ecuația se mai scrie $\dfrac{2 \sin 4x \sin x}{\sin 2x} = 0$ cu condiția $\sin 2x \neq 0$, $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x = 0$, deci $\cos 2x = 0$. Dacă $\sin x = 0$, atunci și $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 0$, deci soluțiile ecuației din enunț sînt date de $\cos 2x = 0$ adică $x \in \bigcup \{k\pi/2 + \pi/4\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.11. Folosim formulele $2 \cos^2 x/2 = 1 + \cos x$ și $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$. Ecuația dată devine: $2 \cos^2 x - 5 \cos x - 3 = 0$ cu rădăcinile $\cos x = 3$ (care nu convine) și $\cos x = -1/2$, de unde $x \in \bigcup\{2k\pi + \pi \pm \pi/3\}$ $k \in \mathbf{Z}$.

5.12. Avem $2\sin^2 x = 2 \sin x \cos x$, deci: $\sin 2x = 0$, $x = k\pi$, $\cos x = \sin x$, de unde $x_1 = \pi/4$ și $s_2 = \pi + \pi/4$. Rezultă $x \in \bigcup\{k\pi + \pi/4\}$, $k \in \mathbf{Z}$

5.13. Ecuația dată se mai scrie $2 \sin^2 3x + 4 \sin^2 3x \cos^2 3x = 0$, sau; $\sin^2 3x(1 + 2 \cos^2 3x) = 0$, de unde $\sin 3x = 0$, deci $x \in \bigcup \{k\pi/3\}$, $k \in \mathbf{Z}$ $1 + 2 \cos^2 3x = 0$ nu admite soluții deoarece $\cos^2 3x \geqslant 0$.

5.14. Avem: $\sin^4 \dfrac{x}{8} + \cos^4 \dfrac{x}{8} = \left(\sin^2 \dfrac{x}{8} + \cos^2 \dfrac{x}{8}\right)^2 - 2 \sin^2 \dfrac{x}{8} \cdot$

$\cdot \cos^2 \dfrac{x}{8} = 1 - \dfrac{1}{2} \sin^2 \dfrac{2x}{8} = 1 - \dfrac{1}{2} \sin^2 \dfrac{x}{4} = \dfrac{5}{8}$ sau $\sin \dfrac{x}{4} = \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot$

Deci $\dfrac{x}{4} = k\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$ sau $x \in \bigcup \left\{\dfrac{4(3k \pm 1)\pi}{3}\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.15. Avem $\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 2$ sau $\sin 2x = 1$, $2x = 2k\pi + \pi/2$, $x = k\pi + \pi/4$ dar k trebuie să fie număr par deci $x \in \bigcup \{2k\pi + \pi/4\}$, $k \in \mathbf{Z}$; altfel sînt introduse rădăcini străine prin ridicări la pătrat. Pentru k impar se obțin soluțiile ecuației $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$.

5.16. Ecuația se mai scrie:

$\sin^3 x(4\cos^3 x - 3\cos x) + \cos^3 x(3\sin x - 4\sin^3 x) = 3/8$ sau

$4\sin^3 x\cos^3 x - 3\sin^3 x\cos x + 3\sin x\cos^3 x - 4\sin^3 x\cos^3 x = 3/8$;

$3\sin x\cos x(\cos x - \sin^2 x) = \frac{3}{8}$ sau $\sin 2x\cos 2x = 1/4$, de unde $\sin 4x = 1/2$

care implică $4x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi$ sau $x \in \bigcup\left\{\frac{k\pi}{4} + (-1)^k\frac{\pi}{24}\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.17. Ecuația se mai scrie $\sin x + \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 2$. Notăm $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

Avem $\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1}{t} = 2$, $2t^2 + 1 + t^2 = 2t^3 + 2t$ sau $2t^3 - 3t^2 + 2t - 1 = 0$;

$(t-1)(2t^2 - t + 1) = 0$. Ecuația $2t^2 - t + 1 = 0$ nu admite soluții reale.

Pentru $t = 1$ avem $x/2 = k\pi + \pi/4$ deci $x \in \bigcup\{2k\pi + \pi/2\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.18. Notăm $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$; avem $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\sin 2x = 2\sin x\cos x =$

$= \frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$. Deci: $\frac{2t}{1+t^2} + \frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = t$ sau $2t(1+t^2) + 4t - 4t^3 =$

$= t(1 + 2t^2 + t^4)$ sau $t(t^4 + 4t^2 - 5) = 0$, $t_1 = 0$, $t_{2,3} = \pm 1$, $t_{4,5} = \pm i\sqrt{5}$.

$x/2 = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4, 2\pi$, și formula generală care cuprinde toate valorile lui x este $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}k + \frac{\pi}{4}$ sau $x \in \bigcup\left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.19. a) $E(200^g) = E(180°) = E(\pi \text{ rad}) = \frac{0-2}{2} + 0 - 1 = -2$.

b) $2\sin x\cos x - 2 + 2\sin x + 2\cos x = 0$. Notăm $\operatorname{tg}\frac{2}{2} = t$.

$\frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} - \frac{1+t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 0$ sau $2t - 2t^3 - 1 - t^4 - 2t^2 +$

$+2t^3 + 1 - t^4 = 0$, deci $-2t^4 + 2t = 0$ de unde $t(t^3 - 1) = 0$.

$t_1 = 0$, $t_2 = 1$ (rădăcina reală). Rezultă $x/2 = k\pi$, sau $x_1 \in \bigcup\{2k\pi\}$, $k \in \mathbf{Z}$ și

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1,\ \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ sau } x_2 \in \bigcup\{(2k+1)\pi\},\ k \in \mathbf{Z}.$$

Soluția generală care cuprinde și pe x_1 și pe x_2 este $x \in \bigcup\{k\pi\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

c) $E = \frac{2t(1-t^4)}{(1+t^2)^2}$, unde $t = \operatorname{tg} x$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ deci $0 < t < 1$, adică

$t > 0$, $(1 - t^4) > 0$, $(1 + t^2) > 0$ deci $E(x) > 0$.

5.20. Ecuația se mai scrie $\sin 3x + \sin x - (1 + \cos 2x) = 0$, sau $2\sin 2x\cos x - 2\cos^2 x = 0$, de unde $\cos x(\sin 2x - \cos x) = 0$, sau

$\cos^2 x(2t\sin x - 1) = 0$. Rezultă $x_1 \in \bigcup\left\{k\pi + \frac{\pi}{3}\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$ și $x_2 \in$

$$\in \bigcup\left\{(-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi\right\},\ k \in \mathbf{Z}.$$

5.21. $\operatorname{ctg}\left(x+\frac{5\pi}{4}\right)=\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}$. Ecuația dată se mai scrie $\frac{1}{\operatorname{tg}x}-\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}=1$. Pentru $\operatorname{tg}x\neq 0$ și $\operatorname{tg}x\neq -1$ avem $1+\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2x=\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2x$ sau $\operatorname{tg}x=1$ deci $x\in\bigcup\{k\pi+\pi/4\}$, $k\in\mathbf{Z}$.

5.22. Cum $\sin x\leqslant 1$ și $\sin 2x\leqslant 1$ rezultă că trebuie să avem simultan $\sin x=1$ și $\sin 2x=1$, ceea ce este imposibil deoarece dacă $\sin x=1$, atunci $x\in\bigcup\{2k\pi+\pi/2\}$ deci $2x=\pi+4k\pi$ și deci $\sin 2x=0$. Rezultă că ecuația dată nu are soluții.

5.23. Avem $\cos^4x+\sin^4x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$; $\sin^2x\cos^2x=\frac{\sin^2 2x}{4}$. Ecuația dată se mai scrie sub forma $\frac{\sin^2 2x}{4}-2\sin x+1=0$ sau $\sin^2 2x-8\sin 2x+4=0$, $\sin 2x=4\pm\sqrt{12}$ de unde numai $4-\sqrt{12}=4-2\sqrt{3}$ convine. Deci $2x=k\pi+(-1)^k\arcsin(4-2\sqrt{3})$ sau $x\in\bigcup\left\{\frac{k\pi}{2}+\right.$

$$\left.+\frac{(-1)^k}{2}\arcsin(4-2\sqrt{3})\right\};\quad k\in\mathbf{Z}.$$

5.24. Ecuația dată se mai scrie $\sin x\left(\frac{\sin x}{2}-\frac{\sqrt{3}\cos x}{2}\right)=0$ sau $\sin x\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)=0$, deci $\sin x\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$ de unde rezultă $\sin x=0$, $x_1\in\bigcup\{k\pi\}$, $k\in Z$ și $\sin x-\pi/3=0$, sau în radiani $x_2\in$

$$\in\bigcup\{k\pi+\pi/3\},\ k\in\mathbf{Z}.$$

5.25. Pentru existența membrului stîng se pune condiția $\cos 2x\neq 0$, adică $x\neq\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$. Apoi se observă că avem $\cos x+\cos 3x=2\cos x\cdot\cos 2x$ și prin simplificare cu $\cos 2x$, ecuația ia forma $1-\cos x=1/2$, adică $\cos x=1/2$. Rezultă $x\in\{\bigcup\pm\pi/3+2n\pi\}$, $n\in\mathbf{Z}$.

5.26. Avem $2\cos^3x-\frac{3}{2}(\cos x-\cos 3x)=1$ sau $4\cos^3x-3\cos x+3(4\cos^3x-3\cos x)-2=0$, de unde $16\cos^3x-12\cos x-2=0$ sau $2(4\cos^3x-3\cos x)-1=0$ deci $2\cos 3x-1=0\Rightarrow 3x=2k\pi\pm\pi/3$, $k\in\mathbf{Z}$, $x\in\bigcup\left\{\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{9}\right\}$, $k\in\mathbf{Z}$.

5.27. $2\cos^2 8x-1=\cos 16x\Rightarrow\cos 16x+\sin 6x=0\Rightarrow\cos 16x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-6x\right)=0$; $2\cos(5x+\pi/4)\cos(11x-\pi/4)=0$; $5x+\pi/4=k\pi+\pi/2\Rightarrow x=k\pi/3+\pi/23$ și $10x-\pi/4=k\pi=\pi/2\Rightarrow x\in\bigcup\{k\pi/11+3\pi/44\}$, $k\in\mathbf{Z}$.

5.28. Dezvoltînd $\cos 3x$ și notînd $\cos x = z$ ajungem la ecuația $4z^3 - 7z + 3 = 0$; $z_1 = 1, z_2 = 1/2, z_3 = -3/2$, deci $x_1 \in \bigcup\{2k_1\pi\}$, $x_2 \in \bigcup\left\{2k_2\pi \pm \frac{\pi}{3}\right\}$, $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$.

5.29. $\sin 5x + \sin x = 1 - 2\sin^2 x$, sau $2\sin 3x \cdot \cos 2x = \cos 2x \Rightarrow \cos 2x \Rightarrow 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ și $2\sin 3x - 1 = 0$, $3x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$;

$x \in \bigcup\left\{\frac{k\pi}{3} + (-1)^k \frac{\pi}{18}\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.30. $1 + 4\sin 2x \cdot \cos 2x + 3\cos^2 2x = 0$ sau $\sin^2 2x + 4\sin 2x \cos 2x + 4\cos^2 2x = 0 \Rightarrow (\sin 2x + 2\cos 2x)^2 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2x = -2, 2x = k\pi - \operatorname{arctg} 2 \Rightarrow x \in \bigcup\left\{\frac{k\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.31. Avem $2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \cos x$. Ecuația devine $\cos x + \cos 2x = 1$ sau $\cos x + 2\cos^2 x - 1 = 1$ deci $2\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$;

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+16}}{4}; \quad \cos x \neq \frac{-1-\sqrt{17}}{4} < -1;$$

Deci $\cos x = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$; $x_1 \in \bigcup\left\{2k\pi + \arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$ și $x_2 \in \bigcup\left\{(2k+1)\pi - \arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.32. Avem $\sin x \sin 3x = (1/2)(\cos 2x - \cos 4x)$. Ecuația dată se mai scrie $\cos 2x - \cos 4x = 3 - 4\cos 2x$ sau $5\cos 2x - \cos 4x - 3 = 0$, dar $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$ deci obținem $2\cos^2 2x - 5\cos 2x + 2 = 0$. $\cos 2x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4}$ semnul plus nu convine, deci $\cos 2x = 1/2 \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \pi/3$, de unde $x \in \bigcup\{k\pi \pm \pi/6\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.33. Avem $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$. Notăm $y = \sin x$, deci $3y - 4y^3 - 1 + 2y^2 - y = 0$ sau $4y^3 - 2y^2 - 2y + 1 = 0$; $(2y-1)(2y^2-1) = 0$.

$\sin x = 1/2 \Rightarrow x_1 \in \bigcup\{2k\pi + \pi/6\}$, $x_2 \in \bigcup\{(2k+1)\pi - \pi/6\}$.

$\sin x = \pm 1/\sqrt{2}$, $x_{3,4} \in \bigcup\{k\pi \pm \pi/4\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.34. Ecuația dată se mai scrie succesiv: $\cos 2x \cdot \frac{2}{\sin 2x} = \frac{4\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 t}$ sau $\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{tg} 2x$, sau $\operatorname{tg}^2 2x = 1$, deci $\operatorname{tg} 2x = \pm 1$. Rezultă $2x = \pi/2 + k\pi/2$ deci $x \in \bigcup\{\pi/8 + k\pi/4\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.35. Ecuația se mai scrie $\cos 2x + \cos 4x = 2(\cos 2x - \cos 4x)$ sau $\cos 2x = 3\cos 4x$ de unde $\cos 3x = 3(2\cos^2 2x - 1)$.
$6\cos^2 2x - \cos 2x - 3 = 0$ cu rădăcinile:

$$\cos 2x = \frac{1 \pm \sqrt{73}}{12};\quad 2x = 2k\pi + \arccos\frac{1 \pm \sqrt{73}}{12},$$

$$\text{deci } x \in \bigcup\left\{k\pi + \frac{1}{2}\arccos\frac{1 \pm \sqrt{73}}{12}\right\},\quad k \in \mathbf{Z}.$$

5.36. Înmulțim cu $1 + 2\sin x \neq 0$, deci $\sin x \neq -1/2$. Ecuația dată devine $2\cos x + 2\sqrt{3}\sin x + 2\sqrt{3} = 0$.

Notăm $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \pm\sqrt{\frac{2 \pm \sqrt{3}}{2 \mp \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{7 \pm 4\sqrt{3}}{2}}$.

Ecuația dată se mai poate scrie $2 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 2\sqrt{3} \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 2\sqrt{3} = 0$ sau

$2(\sqrt{3}-1)t^2 + 4\sqrt{3}\,t + 2(\sqrt{3}+1) = 0$, de unde rezultă $t_1 = -1$ deci $x/2 = k\pi - \pi/4$ sau $x_1 \in \bigcup\{2k\pi - \pi/2\}$, $k \in \mathbf{Z}$ și $t_2 = -(2+\sqrt{2})$ deci $x/2 = k\pi - \operatorname{arctg}(2+\sqrt{2})$ sau $x_2 \in \bigcup\{2k\pi - 2\operatorname{arctg}(2+\sqrt{2})\{$ $k \in \mathbf{Z}$.

5.37. a) Ținem seama că $4\sin 4x + 4\sin 2x = 8\sin 3x\cos x$ și $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x = \frac{\sin 3x}{\cos x\cos 2x} = 0$, de unde $\sin 3x = 0$, $x_1 \in \bigcup\{k\pi/3\}$, $k \in \mathbf{Z}$ și ecuațiile $8\cos^2 x\cos 2x + 1 = 0$ sau $8\cos^2 x(2\cos^2 x - 1) + 1 = 0$, deci $16\cos^4 x - 8\cos^2 x(2\cos^2 x - 1)^2 = 0$, $\cos x = \pm\frac{1}{2}$ de unde $x_{2,3} \in \bigcup\left\{k\pi \pm \frac{\pi}{3}\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

b) Pentru $x = \pi/12$ avem

$$E = \left(\frac{\pi}{12}\right) = 4\sin\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + 4\sin\frac{\pi}{6} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{42} = \frac{4\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} +$$

$$+ \frac{4}{2} + 2 - \sqrt{3} = 4 + \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}} = \frac{12 + 4\sqrt{3}}{3}.$$

5.38. Notăm $\sin\frac{x}{3} = y$, deci $\sin x = 3y - 4y^3$; $\cos\frac{2x}{3} = 1 - 2y^2$.
Ecuația devine $3y - 4y^3 - 5 + 10y^2 - 3y - 3 = 0$ sau $2y^3 - 5y^2 + 4 = 0$, de unde $(2y-1)(2y^2 - y - 2) = 0$. Deci $y_1 = \frac{1}{2}$ sau $y_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$, dar $y_3 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$ nu convine. Rezultă:

$$x_1 \in \bigcup\left\{3\left[k\pi + (-1)^k \arcsin\frac{1}{2}\right]\right\} = \bigcup\left\{3k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{2}\right\};\ k \in \mathbf{Z}.$$

$$x_2 \in \bigcup\left\{3k\pi + (-1)^k\, 3\arcsin\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right\};\quad k \in \mathbf{Z}.$$

5.39. Ecuația dată se mai scrie $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x -$

$$-\sin x) = \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}, \text{ sau } 2 \sin x = \frac{1}{\sin x} \text{ deci } \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

de unde $\sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, deci $x \in \bigcup \left\{\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right\}, k \in \mathbf{Z}$.

5.40. Avem

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = \sin 2x(2 \cos x + 1)$$

$$1 + \cos x + \cos 2x = 2 \cos^2 x + \cos x = \cos x (2 \cos x + 1).$$

Ecuația dată se mai scrie:

$2 \sin x \cos x(2 \cos x + 1) = \cos x(2 \cos x + 1)$. Rezultă $\cos x = 0$, deci $x_1 \in \bigcup \{k\pi + \pi/2\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

$2 \cos x + 1 = 0$, $\cos x = -1/2$, deci $x_2 \in \bigcup \{(2k + 1)\pi \pm \pi/3\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.41. Avem formula $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$. Partea întîi se mai scrie $\frac{2 \cos^3 x - 8 \cos^3 x + 6 \cos x}{3 \sin x} = \frac{6 \cos x(1 - \cos^2 x)}{3 \sin x} = \frac{2 \cos x \sin^2 x}{\sin x} =$

$= \sin 2x$. Deci ecuația dată se mai scrie $\sin 2x - 5 \cos 2x - 1 = 0$. Notăm

$\operatorname{tg} x = t$ și obținem $\frac{2t}{1 + t^2} - \frac{5(1 - t^2)}{1 + t^2} - 1 = 0$, sau $2t^2 + t - 3 = 0$.

Pentru $t_1 = 1$, adică $\operatorname{tg} x_1 = 1$ avem $s_1 \in \bigcup \{k\pi + \pi/4\}$, $k \in \mathbf{Z}$. Pentru $t_2 =$ $= -3/2$ avem $x_2 \in \bigcup \{k\pi - \operatorname{arctg} 3/2)\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.42. Ecuația se mai scrie $\cos 8x + \sin 3x = 0$ sau $\cos 8x + \cos(\pi/2 -$

$-3x) = 0$, de unde $2 \cos\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ deci $\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4} =$

$$= k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_2 \in \bigcup \left\{\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}\right\}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

$$\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_2 \in \bigcup \left\{\frac{3\pi}{22} + \frac{2k\pi}{11}\right\}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

5.43. Avem:

$E_1 = 1 + \cos x + \cos 2x = 1 + \cos x + 2 \cos^2 x - 1 = \cos x (2 \cos x + 1)$.

$E_2 = 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = \sin 2x (2 \cos x + 1)$.

$(2 \cos x + 1)(\cos x - \sin 2x) = 0$ sau $(2 \cos x + 1) \cos x (1 - 2 \sin x) = 0$ de unde $\cos x = -1/2 \Rightarrow x_1 \in \bigcup \{2k\pi \pm 2\pi/3\}$; $k \in \mathbf{Z}$.

$\cos x = 0 \Rightarrow x_2 \in \bigcup \{k\pi + \pi/2\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x_3 \in \bigcup \left\{k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}\right\}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

5.44. $\cos x + \cos 3x = 2\cos 2x \cos x = \cos 2x$. Pentru $\cos 2x = 0$ avem $x_1 \in \bigcup \{k\pi + \pi/4\}$, iar pentru $2\cos x = 1$ avem $x_2 \in \bigcup \{2k\pi \pm \pi/3\}$, unde $k \in \mathbf{Z}$.

5.45. Înlocuind $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ și $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ și $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, avem

$\sin^2 x + \sin^2 x \cos x + \cos^3 x + \cos^2 x \sin x + \sin^2 x - \cos^2 x = 0$, de unde $(\sin x + \cos x)(1 + \sin x - \cos x) = 0$.

Avem $\sin x + \cos x = 0$, $\operatorname{tg} x = -1$; $x \in \bigcup \{k\pi + 3\pi/4\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

$1 + \sin x - \cos x = 0$ sau $\sin x - \cos x = -1$ de unde

$x_1 \{ \bigcup \{2k\pi\}$ și $x_2 \in \bigcup \{2k\pi - \pi/2\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.46. Avem $\cos^8 \dfrac{x}{2} - \sin^8 \dfrac{x}{2} = \left(\cos^4 \dfrac{x}{2} + \sin^4 \dfrac{x}{2}\right)\left(\cos^2 \dfrac{x}{2} - \sin^2 \dfrac{x}{2}\right) =$

$$= \left(1 - 2\cos^2 \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{2}\right) \cos x = \frac{\cos x\,(2 - \sin^2 x)}{2} = \frac{\cos x(1 + \cos^2 x)}{2}.$$

Ecuația dată devine $\cos^3 x + 2\cos x - 4 = 0$ sau $(\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x + 4) = 0$ cu rădăcina reală $x \in \bigcup \{2k\pi\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.47. Ecuația dată se mai scrie: $\sqrt{2} \sin x + 2 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x = 0$ sau $\sqrt{2} \sin x[1 + \sqrt{2}(\cos x - \sin x)] = 0$. Deci $\sin x = 0$, de unde $x_1 \in \in \bigcup \{k\pi\}$, $k \in \mathbf{Z}$ și $1 + 2(\cos x - \sin x) = 1 + 2\sin(x - \pi/4) = 0$, de unde

$$\sin(x - \pi/4) = -1/2, \text{ deci } x - \frac{\pi}{4} = k\pi + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbf{Z} \text{ sau}$$

$$x_2 \in \bigcup \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} \right\}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

5.48. Înlocuim $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$, $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ și $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. Obținem $(\sin^2 x + 1)(\cos^2 x + 1) = 17 \sin^2 x \cos^2 x$ sau $8 \sin^2 x \cos^2 x = 1$ de unde $\sin^2 2x = 1/4$; $\sin 2x = \pm 1/2$, de unde $x \in \in \bigcup \{(1/2)(k\pi + \pi/6)\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.49. Transformăm produsele în sume și obținem $\cos 6x + \cos 2x = \cos 6x + \cos 4x$ de unde: $\cos 2x = \cos 4x$ sau $\sin 3x \sin x = 0$, și deci $\sin x = 0$ cu soluție $x \in \bigcup \{k\pi\}$, $k \in \mathbf{Z}$.;

$\sin 3x = 0$ cu soluție $x = k\pi/3$ care cuprinde și soluție $x = k\pi$.

Răspuns $x \in \bigcup \{k\pi/3\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.50. Existența membrului stîng impune $\cos 3x + \cos x \neq 0$, adică $\cos x \neq 0$ și $\cos 2x \neq 0$. În aceste condiții ecuația dată este echivalentă cu

$\dfrac{2 \sin 2x \cos x}{2 \cos 2x \cos x} = 3 \operatorname{tg} x$, adică $\operatorname{tg} 2x + 3 \operatorname{tg} x$. Înlocuind $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ obținem ecuația $\operatorname{tg} x(3 \operatorname{tg}^2 x - 1) = 0$. Astfel $\operatorname{tg} x = 0$ sau $\operatorname{tg} x = \dfrac{\pm\sqrt{3}}{3}$ și soluțiile cerute sînt 0, $\pm \pi/6$, $\pm 5\pi/6$.

5.51. Avem $\sin x + \sin 2x = -2 \sin 3x$, sau $2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} =$

$= -2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{3x}{2}$; $\sin 3x \neq 0$ deci și $\sin \frac{3x}{2} \neq 0$. Obținem $\cos \frac{x}{2} + \cos \frac{3x}{2} =$

$= 0$ sau $2 \cos x \cos \frac{x}{2} = 0$.

Pentru $\cos \frac{x}{2} = 0$, atunci $\sin x = 0$ și $\sin 3x = 0$.

Pentru $\cos x = 0$, atunci $\sin 3x \neq 0$.

Rezultă deci $x \in \bigcup \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.52. Ecuația dată se mai scrie: $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 4x}{\sin 4x} = \frac{\cos 3x}{\sin 3x}$ sau

$\frac{\cos 3x}{\cos x \sin 4x} = \frac{\cos 3x}{\sin 3x}$ cu condiția $x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $x \neq \frac{k\pi}{3}$, $x \neq \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Avem $\cos 3x = 0$ sau $x_1 \in \bigcup \left\{\frac{(2k+1)\pi}{6}\right\}$ cu condiția $k \neq 3n+1$, $n \in \mathbf{Z}$

sau $\cos x \sin 4x = \sin 3x$ de unde $\sin 3x + \sin 5x = 2 \sin 3x$ sau $\sin x -$

$- \sin 3x = 0$, deci $\cos 4x \sin x = 0$ și întrucît $x \neq k\pi \frac{k\pi}{3}$ rezultă

$x_2 \in \bigcup \left\{\frac{(2k+1)\pi}{8}\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.53. Transformăm în produse:

$2 \sin (\pi/4 + x) \cos 2x + \cos x = 2 \sin (\pi/4 + x) \sin 2x + \sin 2x$ sau

$2 \sin \pi/4 + x) + 1] (\cos 2x - \sin 2x) = 0$, de unde

$\sin (\pi/4 + x) + 1 = -1/2$, $x_1 \in \bigcup \{2k\pi + \pi/4 \pm 2\pi/3\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

$\cos 2x - \sin 2x = 0$; $\operatorname{tg} 2x = 1$; $x_2 \in \bigcup \{k\pi/2 + \pi/8\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.54. Ecuația se mai scrie $\sin 2x \sin x + \cos x \cos 2x = 8 \cos^2 x \sin x \cdot$ $\cos 2x$ sau $\cos x = 4 \cos x \sin 2x \cos 2x \Rightarrow \cos x = 2 \cos x \sin 4x$. Rezultă $\cdot \cos x = 0 \Rightarrow x_1 \in \bigcup \{k\pi + \pi/2\}$, $k \in \mathbf{Z}$.; $1 - 2 \sin 4x = 0 \Rightarrow 4x_2 = \pi/6 +$ $+ 2k\pi \Rightarrow x_2 \in \bigcup \{\pi/24 + k\pi/2\}$ și $4x_3 = 5\pi/6 + 2k_3\pi \in \bigcup \{5\pi/24 + k\pi/2\}$, $k_{1,2,3} \in \mathbf{Z}$.

5.55. Ecuația dată se mai scrie succesiv:

$1 - \cos x^2 + 1 - \cos^2 2x + 1 - \cos^2 3x = 3/2$; $\cos^2 x + \cos^2 2x +$ $+ \cos^2 3x = 3/2$;

$$\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} = \frac{3}{2},$$

$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0$; $2\cos 4x \cos 2x + \cos 4x = 0$; $\cos 4x(1 + 2\cos 2x) = 0$; $\cos 4x = 0$, $4x = k\pi + \pi/2$, $x_1 \in \bigcup \{k\pi/4 + \pi/8\}$, $k \in \mathbf{Z}$. $1 + 2\cos 2x = 0$, $\cos 2x = -1/2$, $2x = (2k+1)\pi \pm \pi/3$ de unde

$$x_2 \in \bigcup \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6} \right\}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

5.56. Ecuația se mai scrie: $\sin 9x + \sin 5x = 1 - 2\sin^2 x$,

$2\sin 7x \cos 2x = \cos 2x$ sau $\cos 2x\,(2\sin 7x - 1) = 0$,

de unde $x_1 \in \bigcup \left\{ (2k+1)\,\frac{\pi}{4} \right\}$; $x_2 \in \bigcup \left\{ (-1)^k \frac{\pi}{42} + \frac{k\pi}{7} \right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.57. Avem $\sin x + \sin 3x = 2\sin 2x \cos x$; $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$; $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.

Ecuația se mai scrie: $2\sin x \cos x(1 + 2\cos x) = \cos x\,(1 + 2\cos x)$ sau $\cos x(1 + 2\cos x)\,(1 - 2\sin x) = 0$ de unde $\cos x = 0$, deci $x_1 \in \bigcup \{k_1\pi + \pi/2\}$, $k_1 \in \mathbf{Z}$, $\cos x = -\frac{1}{2}$; $x_2 \in \bigcup \{2k\pi \pm 2\pi/3\}$; $k_2 \in \mathbf{Z}$; $\sin x = \frac{1}{2}$;

$$x_3 \in \bigcup \left\{ k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6} \right\}, \quad k_3 \in \mathbf{Z}.$$

5.58. Ecuația se mai scrie $2\sin \frac{9x}{2} \sin \frac{x}{2} - 2\sin^2 \frac{9x}{2} = 0$ sau

$$\sin \frac{9x}{2} = 0; \quad \frac{9x}{2} = k\pi, \quad x_1 \in \bigcup \left\{ \frac{2k\pi}{9} \right\}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

$$\sin \frac{x}{2} - \sin \frac{9x}{2} = 0; \quad \sin \frac{x}{2} = \sin \frac{9x}{2}, \quad \text{deci} \quad \frac{x}{2} + \frac{9x}{2} = (2k_2 + 1)\pi,$$

$$x_2 \in \bigcup \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{5} \right\}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

$$\frac{x}{2} - \frac{9x}{2} = 2k\pi, \quad x_3 \in \bigcup \left\{ \frac{k\pi}{3} \right\}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

5.59. Avem $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$; $\cos^2 4x = \frac{1 + \cos 8x}{2}$, $\sin x \sin 2x =$

$$= \frac{\cos x - \cos 3x}{2}; \quad \sin 4x \sin 5x = \frac{\cos x - \cos 9x}{2}, \quad \text{deci: } \cos x - \cos 3x +$$

$$+ 1 + \cos 2x = \cos x - \cos 9x + 1 + \cos 8x, \quad \text{sau} \quad -\cos 3x + \cos 2x +$$

$$+ \cos 9x - \cos 8x = 0, \quad \cos 2x + \cos 9x = \cos 3x + \cos 8x$$

sau $\cos\frac{11x}{2}\cdot\cos\frac{7x}{2}=\cos\frac{11x}{2}\cdot\cos\frac{5x}{5}$ sau $\cos\frac{11x}{2}\left(\cos\frac{7x}{2}-\cos\frac{5x}{2}\right)=0$,

de unde: $\cos\frac{11x}{2}=0\Rightarrow\frac{11x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x_1\in\bigcup\left\{\frac{(2k+1)\pi}{11}\right\};\quad k\in\mathbf{Z}.$

$$\cos\frac{7x}{2}-\cos\frac{5x}{2}=0\Rightarrow\sin 3x=0\Rightarrow x_2\in\bigcup\left\{\frac{k\pi}{3}\right\},\quad k\in\mathbf{Z}.$$

$$\sin\frac{x}{2}=0,\quad x_3\in\bigcup\{2k\pi\}\ \text{însă}\ \{x_3\}\in\{x_2\},\quad k\in\mathbf{Z}.$$

5.60. Evident, membrul stîng are sens în ipoteza $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in\mathbf{Z}$

Ținînd seama de $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1$, ecuația se scrie în forma echivalentă, $2\cos 2x+1-\operatorname{tg} x=0$. Notînd $\operatorname{tg} x=t$ și ținînd seama de $\cos 2x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ găsim $\frac{2(1-t^2)}{1+t^2}+1-1=0,\quad t\in\mathbf{R},$ sau $(1-t)\left[\frac{2(1+t)}{1+t^2}+1\right]=0,\ t\in\mathbf{R}.$

Rezultă $t=1$ sau $\operatorname{tg} x=1$, adică $x=\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in\mathbf{Z}.$

5.61. Avem $\sqrt{2}\sin x+2\sin x\cos x-2\sin^2 2x=0$; $\sin x(\sqrt{2}+2\cos x-2\sin x)=0$, de unde $\sin x=0$. $x_1\in\bigcup\{k\pi\}$, $k\in\mathbf{Z}$ și $\cos x-\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ridicăm la pătrat în ipoteza că avem $\cos x-\sin x<0$ adică $\sin x>\cos x$.

$$(\cos x-\sin x)^2=1-\sin 2x=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin 2x=\frac{1}{2};\Rightarrow$$

$$2x+2k\pi+\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{3}\ \text{sau}\ x_{2,3}\in\bigcup\left\{k\pi+\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{6}\right\},\quad k\in\mathbf{Z}.$$

Fie $x_2\in\bigcup\left\{k\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right\}=\bigcup\left\{k\pi+\frac{5\pi}{12}\right\}$. Să verificăm dacă $\sin\left(k\pi+\frac{5\pi}{12}\right)>\cos\left(k\pi+\frac{5\pi}{12}\right)$.

$(-1)^k\sin\frac{5\pi}{12}>(-1)^{k+1}\cos\frac{5\pi}{12}$ adevărată pentru k par, deci $x_2\in\bigcup\left\{2n\pi+\frac{5\pi}{12}\right\}$, unde $n\in\mathbf{Z}$.

Avem $x_3 \in \bigcup\left\{k\pi + \frac{\pi}{12}\right\}$, iar $(-1)^k \sin\frac{\pi}{12} > (-1)^{k+1}\cos\frac{\pi}{12}$, $k \in \mathbf{Z}$,

care se verifică numai pentru $k = 2n$ (număr par) deci $x_3 \in \bigcup\left\{2n\pi + \right.$

$\left. + \frac{\pi}{12}\right\}$, $n \in \mathbf{Z}$.

5.62. a). $E(x) = \dfrac{2\cos 6x\cos 2x + 2\cos 6x}{2\sin 6x\cos 2x + 2\sin 6x} = \dfrac{\cos 6x(\cos 2x + 1)}{\sin 6x(\cos 2x + 1)} =$

$= \operatorname{ctg} 6x$.

b) $E\left(\frac{\pi}{72}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{12} = \sqrt{\dfrac{1 + \cos\frac{\pi}{6}}{1 - \cos\frac{\pi}{6}}} = \sqrt{\dfrac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\dfrac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}} =$

$= 2 + \sqrt{3}$.

5.63. Ecuaţia se mai poate scrie:

$$8(\sin x + \cos x) + 3(1 + \sin 2x) - 3 = 0;$$

$$8(\sin x + \cos x) + 3(\sin x + \cos x)^2 - 3 = 0;$$

punem $\sin x + \cos x = y$ şi avem $3y^2 + 8y - 3 = 0$, $y_1 = 1/3$, $y_2 = -3$.

Astfel rezultă ecuaţiile: $\sin x_1 + \cos x_1 = 1/3$ şi $\sin x_2 + \cos x_2 = -3$.

Ca o ecuaţia de tipul $a\sin x + b\cos x = c$ să fie posibilă trebuie ca $c^2 \leqslant a^2 + b^2$; satisface numai prima. Ca să o rezolvăm introducem necunoscuta $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = u$ şi avem

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{3}; \quad 2u^2 - 3u - 1 = 0$$

şi deci $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{3 - \sqrt{17}}{4}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}$.

$x_1 \in \bigcup\left\{2\operatorname{arctg}\frac{3 - \sqrt{17}}{4} + 2k\pi\right\}$; $x_2 \in \bigcup\left\{2\operatorname{arctg}\frac{3 + \sqrt{17}}{4} + 2k\pi\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Expresia se mai poate scrie:

$$E(x) = \frac{\cos x + \sin x + 1}{\sin x\cos x} = \frac{(\cos x + \sin x + 1)\cdot 2}{(\sin x + \cos x)^2 - 1}$$

Pentru soluţiile x_1, avem $\sin x + \cos x = 1/3$; $E(x) = -3$.

5.64. Notăm $\operatorname{tg} x/2 = t$. Ecuaţia dată se mai scrie:

$$\sqrt{\frac{1 + 2t/(1 + t^2)}{1 - 2t/(1 + t^2)}} + \frac{1}{t} = 2 \quad \text{sau} \quad \left|\frac{1 + t}{1 - t}\right| + \frac{1}{t} = 2,$$

$$\left|\frac{1+t}{1-t}\right| = \frac{2t-1}{t} > 0 \Leftrightarrow t \in (-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right). \quad (1)$$

1°) Dacă $\frac{1+t}{1-t} > 0 \Rightarrow t \in (-1, 1)$. (2)

Din (1) și (2) rezultă $t \in (-1, 0) \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right)$. (3)

În acest caz avem $\frac{1+t}{1-t} = \frac{2t-1}{t} \Leftrightarrow t + t^2 = 2t - 1 - 2t^2 + t$ sau $3t^2 - 2t + 1 = 0$ cu rădăcini complexe, deci cazul 1° nu convine.

2°) Dacă $\frac{1+t}{1-t} < 0 \Rightarrow t \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. (4)

Din (1) și (4) rezultă în acest caz că $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Deci $\frac{1+t}{1-t} = \frac{2t-1}{t} \Leftrightarrow t + t^2 = 2t^2 - t - 2t + 1$ sau $t^2 - 4t + 1 = 0$

de unde $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$. Știind că $\operatorname{arctg}(2 - \sqrt{3}) = \frac{\pi}{12}$ și $\operatorname{arctg}(2 + \sqrt{3}) = \frac{5\pi}{12}$ avem

$x_1 \in \bigcup \{2k\pi + \pi/6\}$, $k \in \mathbf{Z}$, $x_2 \in \bigcup \{2k\pi + 5\pi/6\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.65. Pentru $\sin x = 0$, $\cos x = 0$ nu avem soluții. Folosim formulele $\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ și $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

Avem $\frac{\sqrt{3}(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg} x} + 1 + \operatorname{tg}^2 x = 8, \Rightarrow \operatorname{tg}^3 x + \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x - 7 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$ care este verificată de $\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow x_1 \in \bigcup \left\{k\pi + \frac{\pi}{3}\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Împărțim cu $\operatorname{tg} x - \sqrt{3}$ și obținem:

$\operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x_2 = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow x_2 \in \bigcup \{k\pi + \pi/12\}$; $k \in \mathbf{Z}$

$$\operatorname{tg} x_3 = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow x_3 \in \bigcup \{k\pi + 5\pi/12\}, \ k \in \mathbf{Z}$$

5.66. Ecuația se mai scrie $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos x = \cos\frac{\pi}{6}$ sau transformînd în produs primul membru avem

$$2 \cos(\pi/6 + x) \cos\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6}, \text{ deci } \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \frac{1}{2}.$$

Rezultă $\pi/6 + x = 2k\pi \pm \pi/3$, de unde $x_1 \in \bigcup \{2k\pi + \pi/6\}$, $k \in \mathbf{Z}$, $x_2 \in \bigcup \{2k\pi - \pi/3\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.67. Ecuația se mai scrie succesiv:

$$2 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x - 4 \sin^2 x - 4 \cos^2 x = 0;$$

$$4 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0, \cos x \neq 0, 4 \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 1 = 0;$$

$\operatorname{tg} x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$, $\operatorname{tg} x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ de unde $x_1 \in \bigcup \left\{k\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right\}$

$x_2 \in \bigcup \left\{k\pi - \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.68. Ecuația se scrie succesiv:

$$\cos 8x + \sin 10x = 0 \text{ sau } \sin(\pi/2 - 8x) + \sin 10x = 0.$$

$$2 \sin(x + \pi/4) \cos(9x - \pi/4) = 0,$$

$$\sin(x + \pi/4) = 0 \Rightarrow x_1 \in \bigcup \{k\pi - \pi/4\}, \; k \in \mathbf{Z}.$$

$$\cos(9x - \pi/7) = 0 \Rightarrow x_2 \in \bigcup \{k\pi/9 + \pi/12\}, \; k \in \mathbf{Z}.$$

5.69. Înlocuim $\sin 2x$, $\operatorname{tg} x$ și $\cos 2x$ în funcție de $\sin x$ și $\cos x$. Obținem

$$2 \sin x \cos y - \frac{\sin x}{\cos x} + 2 \cos^2 x - 1 = 1 \text{ sau } 2 \sin x \cos y - \frac{\sin x}{\cos x} -$$

$$- 2 \sin^2 x = 0, \text{ de unde } \sin x = 0, \; x_1 \in \bigcup \{k\pi\}, \; k \in \mathbf{Z} \text{ și } 2 \cos x - \frac{1}{\cos x} -$$

$- 2 \sin x = 0$; $\cos x \neq 0$, $2 \cos^2 x - 1 - 2 \sin x \cos x = 0$ sau $\cos 2x = \sin 2x$

$2x = 2k\pi + (\pi/2 - 2x)$, deci $x_2 \in \bigcup \{k\pi/2 + \pi/8\}$ j $k \in \mathbf{Z}$.]

5.70. Ecuația se mai scrie $\dfrac{1}{2}(\sin 6x - \sin 4x) = \dfrac{1}{2}(\text{siu } 12x + \sin 6x)$

sau $\sin 12x + \sin 4x = 0 \Rightarrow 2 \sin 8x \cos 4x = 0$ cu soluția $x \in \bigcup \{k\pi/8\} \cup$

$\cup \{k\pi/4 + \pi/8\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.74. Ecuația se mai scrie $\cos^2 2x + \cos^2 3x = 0$, de unde rezultă $\cos 2x = 0$ și $\cos 3x = 0$ (simultan);

$2x_1 = k_1\pi + \pi/2 \Rightarrow x_1 \in \bigcup \{k_1\pi/2 + \pi/4\}$, $k_1 \in \mathbf{Z}$;

$3x_2 = k_2\pi + \pi/2 \Rightarrow x_2 \in \bigcup \{k_2\pi/3 + \pi/6\}$, $k_2 \in \mathbf{Z}$

Dacă $x_1 = k_1\pi/2 + \pi/4$ atunci $3x_1 = 3k_1\pi/5 + \dfrac{3\pi}{4} = 3x_1 = (2k_1 + 1)\dfrac{\pi}{2} +$

$+ \dfrac{\pi}{2}$, iar $3x_2 = k_2\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$.

Rezultă că oricare ar fi $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$ nu putem avea $3x_1 = 3x_2$ deci ecuația dată nu are soluții.

5.72. Ecuația dată se mai scrie:

$$\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \cos 4x \text{ sau}$$

$1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x = 2 + 4\cos 4x$ de unde

$\cos^2 2x = 2\cos 4x$ sau $\frac{1+\cos 4x}{2} = 2\cos 4x$, Deci $\cos 4x = 1/3$,

$x \in \bigcup \left\{ \pm \frac{1}{4} \arccos \frac{1}{3} + \frac{k\pi}{2} \right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.73. Soluțiile ecuațiilor $\sin x = 0$, $\cos x = 0$ nu convin, astfel că facem ipoteza $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$. Înmulțind ecuația cu $\cos x$ avem

$8\cos^2 x = \sqrt{3}\operatorname{ctg} x + 1$ sau $\frac{8}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg} x} + 1 \Rightarrow \operatorname{tg}^3 x + \sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x -$

$- 7\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$ care se constată că are rădăcina $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ și împărțind polinomul trigonometric cu $\operatorname{tg} x - \sqrt{3}$, obținem cîtul $\operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x -$ $- 1$, care, egalat cu zero, dă celelalte rădăcini: $\operatorname{tg} x_1 = 2 - \sqrt{3}$ și $\operatorname{tg} x_2 = = -2 - \sqrt{3}$. Din $\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \pi/3 + k\pi$. (2)

Din $\operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{-6+4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ și deci

$$2x = \frac{\pi}{6} + k\pi;\ x \in \bigcup \left\{ \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \right\},\ k \in \mathbf{Z}. \qquad (2)$$

Din $\operatorname{tg} x = -2 - \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg}(\pi - x) = 2 + \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} 2(\pi - x) =$

$$= \frac{2(2+\sqrt{3})}{-6-4\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ și deci}$$

$$2(\pi - x) = \frac{5\pi}{6} + k_1\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k_1\frac{\pi}{2}. \qquad (3)$$

Dar mai putem scrie: $x = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{2} + (k_1 + 1)\frac{\pi}{2}$, deci

$$x \in \bigcup \left\{ \frac{\pi}{12} + (k_1 + 1)\frac{\pi}{2} \right\},\ k \in \mathbf{Z}, \qquad (4)$$

care ne arată că soluțiile (3) sînt cuprinse în soluțiile (2). Deci avem soluțiile:

$$x_1 \in \bigcup \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi \right\} \text{ și } x_2 \in \bigcup \left\{ \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \right\}, \text{ unde } k \in \mathbf{Z}.$$

5.74. Avem: $\sin^8 x + \cos^8 x = (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2\sin^4 x \cdot \cos^4 x =$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2x = 1 - \sin^2 2x + \frac{1}{4}\sin^4 x -$$

$$- \frac{1}{8}\sin^4 2x = \cos^2 2x + \frac{1}{8}\sin^4 2x.$$

Ecuația din enunț devine $\sin^4 2x = 0$ deci $x \in \bigcup\{k\pi/2\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.75. Ecuația se mai scrie: $2(\sin 13x - \sin 11x + \sin 9x - \sin 7x + \sin 5x - \sin 3x + \sin x) = \sin 15x$. Înmulțim ambii membri ai ecuației cu $\sin 2x$ și transformăm produsele în sume, apoi facem reducerile și obținem: $\cos 13x - \cos 15x = \sin 15x \sin 2x$, apoi ecuația $\sin 14x \sin x = \sin x \cos x \sin 15x$ de unde $\sin x = 0$ cu soluția $x_1 = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ și ecuația $\sin 14x = \cos x \sin 15$. Folosim relația $\sin 15x = \sin 14x \cos x + \sin x \cos 14x$ și obținem $\sin 14x(1 - \cos^2 x) = \cos 14 x \sin x \cos x$ sau $\sin x(\sin 14 x \sin x - \cos 14x \cos x) = 0$, de unde $\sin x = 0$ și $\cos 15x = 0$, deci $15x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ sau $x_2 = \frac{k\pi}{15} + \frac{\pi}{30} = \frac{(2k+1)\pi}{30}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ținem seama de introducerea rădăcinilor străine date de $\sin 2x = 0$

Pentru $\sin x = 0$, $x = k\pi$ ecuația dată se verifică.

Pentru $\cos x = 0$, avem $x = k\pi + \pi/2$ care introdus în ecuația dată conduce la $8 = 7$ deci nu verifică. Rădăcinile ecuației date sînt deci:

$$x \in \{k\pi\} \cup \left\{\frac{(2k+4)\pi}{30}\right\} \cap \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Rădăcinile situate pe cercul trigonometric care satisfac ecuația dată sînt $x_1 \in \bigcup\left\{\frac{(2k+1)\pi}{30}\right\}$, $k = \{0, 1, ..., 29\} - \{7, 22\}$.

5.76. Notăm $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ deci $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Deci $\frac{2t}{1+4t^2} = at$, de unde $t_1 = 0$ și $t_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{2-a}{3a}}$, cu condiția $\frac{2-a}{3a} > 0$ adică $a \in (0, 2]$. Rezultă $x_1/2 = k\pi$ deci $x_1 \in \bigcup\{2k\pi\}$, $k \in \mathbf{Z}$. și $x_{2,3} \in \bigcup\left\{2k\pi + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2-a}{3a}}\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.77. Ținem seama de relațiile $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ Ecuația dată se poate scrie succesiv: $2(a^2 - b^2) \sin x \cos x - 2ab \sin^3 x = 2 \sin x[(a^2 - b^2) \cos x - ab \sin^2 x] = 2 \sin x[(a^2 - b^2) \cos x - ab + ab \cos^2 x] = 0$, de unde

$$\sin x = 0, \; x_1 \in \bigcup\{k\pi\}, \; k \in \mathbf{Z}. \tag{1}$$

$$ab \cos^2 x + (a^2 - b^2) \cos x - ab = 0.$$

$$\cos x = \frac{b^2 - a^2 \pm (b^2 + a^2)}{2ab}, \text{ deci } \cos x_2 = \frac{b}{a} \text{ și } \cos x_3 = -\frac{a}{b}.$$

Rezultă $x_2 = \arccos\frac{b}{a}$, $x_3 = \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$.

Discuție. Pentru a avea

$$\cos x_2 = b/a \text{ trebuie } |b| \leqslant |a|, \tag{2}$$

iar pentru a avea

$$\cos x_3 = -a/b \text{ trebuie } |a| \leqslant |b|. \tag{3}$$

Inegalitățile (2) și (3) se exclud una pe cealaltă, ceea ce înseamnă că rădăcinile x_2 și x_3 nu au loc simultan.

5.78. a) Avem:

$$2\cos\frac{\pi x^2+2\pi x}{2}\cos\frac{\pi x^2-2\pi x}{2}=0 \text{ de unde}$$

$$\frac{\pi x(x+2)}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi;\ x(x+2)=1+2k \text{ (impar)}$$

$$\frac{\pi x(x-2)}{2}=\frac{\pi}{2}+k_1\pi;\ x(x-2)=1+2k_1 \text{ (impar)}$$

sau $x^2+2x-1-2k=0 \Rightarrow x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+k}$.

b) Pentru x real și întreg avem: $k=1 \Rightarrow x_{1,2}=-1\pm 2$, ($x=1$ $x=-3$); $k=7 \Rightarrow (x=3,\ x=-5)$; ... $k>-1$; $k=17, 31, \ldots$ deci rădăcinile sînt întregi cînd $\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+k}$ este întreg adică $2(k+1)$ să fie un pătrat perfect, $k\in \mathbf{N}$.

5.79. $4\cos(x+\alpha)\cos(x-\alpha)=2\cos 2x+\cos 2\alpha$, deci $2\cos 2x+$ $+\cos 2\alpha=1+2\cos 2\alpha$ de unde $\cos 2x=1/2 \Rightarrow 2x=2k\pi\pm\pi/3 \Rightarrow$ $\Rightarrow x\in \bigcup\{k\pi\pm\pi/6\}$, $k\in \mathbf{Z}$.

5.80. Transformăm produsul dintre primul și ultimul factor în sumă și obținem ecuația echivalentă $\sin 2x(\cos 2x-\cos 4x)=\frac{3}{2}$ și mai departe $\sin 4x-\sin 6x+\sin 2x=3$ relație adevărată numai dacă $\sin 4x=-1$; $\sin 6x=-1$; $\sin 2x=1$. Dar $\sin 4x=2\sin 2x\cos 2x$ și înlocuind obținem $\cos 2x=1/2$, contradictoriu cu $\sin 6x=-1$.

5.81. Avem $\cos x_2\cos 2x,\ \cos 3x,\ \cos 4x\neq 0$; $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 3x+$

$$+\operatorname{tg} 4x=\frac{\sin 5x}{\cos x\cos 4x}+\frac{\sin 5x}{\cos 2x\cos 3x}=$$

$$=\frac{\sin 5x(\cos 2x\cos 3x+\cos x\cos 4x)}{\cos x\cos 2x\cos 3x\cos 4x}=$$

$$=\frac{\sin 5x[\cos 2x(4\cos^2 x-3\cos x)+\cos x\cos 4x]}{\cos 2x\cos 3x\cos 4x}=$$

$$=\frac{\sin 5x(4\cos^2 2x-\cos 2x-1)}{\cos 2x\cos 3x\cos 4x}=0.$$

Rezultă $x_1\in \bigcup\left\{\frac{k\pi}{5}\right\}$; $x_2\in \bigcup\left\{k\pi\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1\pm\sqrt{17}}{8}\right\}$, $k\in \mathbf{Z}$.

5.82. Ecuația dată se mai scrie $\cos^2 x-\cos^2 3x=\cos^2 4x-\cos^2 2x$ sau $(\cos x+\cos 3x)(\cos x-\cos 3x)=(\cos 4x+\cos 2x)(\cos 4x-\cos 2x)$,

de unde $\sin 2x \sin 4x + \sin 2x \sin 6x = 0$ sau $\sin 2x = 0$, $x_1 \in \bigcup \{k\pi/2\}$ şi $\sin 4x + \sin 6x = 0$, de unde mai obţinem şi soluţia $x_2 \in \bigcup \{k\pi/5\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.83. Notăm $\operatorname{arctg} \frac{13}{34} = x$, $\operatorname{arctg} \frac{21}{55} = y$ şi $\operatorname{arctg} \frac{1}{2148} = z$, deci: $x - y = z$. Se aplică formula $\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \operatorname{tg} z$.

5.84. a) Din $\sin a = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}$ cu $a \in (0, \pi/4)$, aflăm $\cos a = \sqrt{1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}$, deci $\sin 2a = \sin a \cos a = 1/2$, de unde $2a = \pi/6$, deoarece $a \in (0, \pi/4)$.

b) Grupăm primul cu ultimul termen şi analog ceilalţi termeni şi transformăm în produs. Avem succesiv:

$$2 \sin 4x \cos 3x + 2 \sin 4x \cos x = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \cos x \cos 2x;$$

$$2 \sin 4x (\cos 3x + \cos x) = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \cos x \cos 2x.$$

Transformăm din nou în produs şi obţinem

$$2 \sin 4x (\cos 3x + \cos x) = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \cos x \cos 2x,$$

$$4 \sin 4x \cos 2x \cos x = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \cos x \cos 2x,$$

de unde $\cos x = 0$ şi $\cos 2x = 0$, care ne dau $x_1 \in \bigcup \{\pi/2 + k\pi\}$, $k \in \mathbf{Z}$,

$$x_2 \in \bigcup \{\pi/4 + k\pi/2\} \text{ şi } \sin 4x = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

care cu ajutorul punctului a) ne dă $x_3 \in \bigcup \left\{(-1)^k \frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{4}\right\}, k \in \mathbf{Z}$.

5.85. a) Distingem următoarele două cazuri:

1) $x \in [-\pi/2, 0]$; ecuaţia devine $-\sin x \cos x = 1/4$ sau $\sin 2x = -1/2$. Rezultă $2x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi$, $(k \in \mathbf{Z})$, de unde $x_1 = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + k \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$. Cum $x \in [-\pi/2, 0]$ avem $x_1 = -\pi/12$ şi $x_2 = -5\pi/12$.

2) $x \in [0, \pi/2]$; ecuaţia devine $\sin x \cos x = 1/4$ sau $\sin 2x = 1/2$. Rezultă $2x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$, $(k \in \mathbf{Z})$, de unde $x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{12} + k \frac{\pi}{2}$, $(k \in \mathbf{Z})$. Cum $x \in [0, \pi/2]$ avem $x_3 = \pi/12$ şi $x_4 = 5\pi/12$. Aşadar rădăcinile ecuaţiei în intervalul $[-\pi/2, /\pi 2]$ sînt $\pm \pi/12$ şi $\pm 5\pi/12$.

b) Dacă $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$, atunci $\cos x < 0$. Cum $|\sin x| \geqslant 0$, rezultă $|\sin x \cos x| \leqslant 0$, deci $|\sin x| \cos x \neq 1/4$ adică ecuația nu are rădăcini pe intervalul $[\pi/2, 3\pi/2]$.

5.86. Dezvoltăm membrii ecuației și avem

$$\sin\frac{\pi}{4}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\sin x = \cos\frac{\pi}{3}\cos x - \sin\frac{\pi}{3}\sin x \text{ sau } \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \text{ de unde } \cos x(1-\sqrt{2}) = \sin x(\sqrt{3} - \sqrt{2}),$$

deci

$$\operatorname{tg} x = \frac{1-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = (1-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}). \tag{1}$$

Pe baza relației $\cos\alpha = \sin(\pi/2 + \alpha)$ ecuația devine $\sin(\pi/4 - x) = \sin(\pi/2 + \pi/3 + x)$ de unde $\pi/4 - x = \pi/2 + \pi/3 + x$ deci $x \in \bigcup \{-7\pi/24 + 2k\pi\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Înlocuind această valoarea a lui x în relația (1) avem $\operatorname{tg}(-7\pi/24) = (1-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ care se mai scrie $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{24} = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

Pe baza relației $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{ctg}(\pi/2 + \alpha)$ putem scrie $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{24}\right) = -\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{24}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{24}$ deci $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{24} = -\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)$.

Mai avem succesiv

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{24} = \operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{24} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{24} - 1}{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{24} + 1} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2}) - 1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2}) + 1} =$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1}{\sqrt{6} + 3 - \sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}-1) - (\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) + \sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = (\sqrt{2}-1):(\sqrt{3}-\sqrt{2}),$$

$$\operatorname{tg}\frac{11\pi}{24} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{24}\right) = \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{5\pi}{24}}{1 - \operatorname{tg}\frac{5\pi}{24}} = \frac{1 + (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{1 - (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} =$$

$= \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$ de unde rezultă că $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{24} = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ și egalitățile au fost astfel stabilite.

5.87. Avem $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} - \operatorname{ctg} x = \frac{1-\operatorname{ctg}^2 x}{\operatorname{ctg} x} =$

$= -2\frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x} = -2\operatorname{ctg} 2x$, unde $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. Folosind relația obținută rezultă $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -2\operatorname{ctg} 2x$; $-2\operatorname{ctg} 2x + 2\operatorname{tg} 2x = 4\operatorname{ctg} 4x$; $-4\operatorname{ctg} 4x + 4\operatorname{tg} 4x = -8\operatorname{ctg} 8x$. Adunînd toate aceste relații parte cu parte obținem $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg} 2x + 4\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} x = -8\operatorname{ctg} 8x$, $(k - k\pi/8,\ k \in \mathbf{Z})$. Deci ecuația dată se mai scrie $-8\operatorname{ctg} 8x = 0$ de unde

$$x_1 \in \bigcup \left\{ \frac{2k+1)\pi}{16} \right\},\quad k \in \mathbf{Z}.$$

5.88. Ecuația se mai poate scrie $1 - \sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right| = |\cos x|$. Cercetăm soluțiile în fiecare din cele 4 cadrane:

1) Dacă $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ecuația este $1 - \sqrt{2}\cos\frac{x}{2} = \cos x$, sau $2\cos^2\frac{x}{2} + \sqrt{2}\cos\frac{x}{2} - 2 = 0$, $\cos\frac{x}{2} = -\sqrt{2}$ și $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ deci $x_1 = \frac{\pi}{2}$.

2) Dacă $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ecuația este $1 - \sqrt{2}\cos\frac{x}{2} = -\cos x$, sau $2\cos^2\frac{x}{2} - \sqrt{2}\cos\frac{x}{2} = 0$, cu soluțiile $x_1 = \frac{\pi}{2}$ și $x_2 = \pi$.

3) Dacă $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ avem $1 + \sqrt{2}\cos\frac{x}{2} = -\cos x$, sau $2\cos^2\frac{x}{2} + \sqrt{2}\cos\frac{x}{2} = 0$ cu soluțiile $x_2 = \pi$ și $x_3 = \frac{3\pi}{2}$.

4) Dacă $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ avem $1 + \sqrt{2}\cos\frac{x}{2} = \cos x$, sau $2\cos^2\frac{x}{2} - \sqrt{2}\cos\frac{x}{2} - 2 = 0$, cu soluția $x_3 = 3\pi/2$. Deci $x_1 = \pi/2$, $x_2 = \pi$, $x_3 = 3\pi/2$.

5.89. Avem $\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 |x| = \dfrac{1-\cos^2 |x|}{1-\sin^2 |x|}$ sau $\dfrac{1-\cos^2 |x|}{1+\sin^2 |x|} = \dfrac{1-\cos |x|}{1-\sin |x|} \Rightarrow 1-\cos^2 |x| = (1-\cos |x|)(1+\sin |x|)$, $(1-\cos |x|)(1+\cos |x| - 1 - \sin |x|) = 0$ sau $(1-\cos |x|)(\cos |x| - \sin |x|) = 0$, de unde

a) $1-\cos |x| = 0$; $\cos |x| = 1$; $x \in \bigcup (2k\pi\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

b) $\cos |x| - \sin |x| = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} |x| = 1$, $|x| \in \bigcup \{k\pi + \pi/4\}$, $k \in Z$. $\Rightarrow \pm x = k\pi + \pi/4$ sau $x \in \bigcup \{k\pi \pm \pi/4\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.90. Ecuația se mai scrie $\left|\dfrac{2}{\sin 2x}\right| = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$. Dacă $\sin 2x > 0$, atunci $\dfrac{2}{\sin 2x} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ de unde $\sin 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $2x = k\pi + (-1)^k \dfrac{\pi}{3}$ sau $x \in \bigcup \left\{\dfrac{k\pi}{2} + (-1)^k \dfrac{\pi}{6}\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$. Dacă $\sin x < 0$, atunci $\sin 2x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ deci $x \in \bigcup \left\{\dfrac{k\pi}{2} + (-1)^{k+1} \dfrac{\pi}{6}\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.91. $5 - \sin^2 3x \geqslant 4$ deci se impune $|\cos 4x - \cos 2x| \leqslant 2$. Semnul egal are loc dacă a) $\cos 2x = -1$ și $\cos 4x = 1$ sau b) $\cos 2x = 1$ și $\cos 4x = -1$ și atunci $5 - \sin^2 3x = 4$ sau $4 + \cos^2 3x = 4$, adică și condiția $\cos 3x = 0$ împreună cu condițiile a) și b); dar în acest caz trebuie să avem simultan unul din cazurile:

1° $\cos 2x = -1$, $\cos 4x = 1$, $\cos 3x = 0$.

2° $\cos 2x = 1$, $\cos 4x = -1$, $\cos 3x = 0$.

1° Pentru $\cos 2x = -1$ avem $x_1 = k\pi + \pi/2$, $\cos 4x = \cos (4k\pi + 2\pi = 1$ și $\cos 3x = 0$ deci $x_1 \in \bigcup \{k\pi + \pi/2\}$, $k \in \mathbf{Z}$ este soluția admisă.

2° Pentru $\cos 2x = 1$ avem $x \in \bigcup \{k\pi\}$, dar $\cos 4x = 1$ ceea ce nu convine. Deci singura soluție este dată de $x \in \bigcup \{k\pi + \pi/2\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.92. Ecuația se mai scrie $(\sin x - \cos x) + \left(\dfrac{\sin x}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{\sin x}\right) + \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\cos x}\right) = 0$ sau $(\sin x - \cos x) + \dfrac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}{\sin x \cos x} + \dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x \cos x} = 0$; sau în ipoteza că $\sin x \cos x \neq 0$, obținem $(\sin x \cos x + \sin x + \cos x - 1)(\sin x - \cos x) = 0$.

Din $\sin x - \cos x = 0$, de unde $x_1 \in \bigcup \{k\pi + \pi/4\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Din $\sin x \cos x + \sin x + \cos x - 1 = 0$ sau $\sin x(1 + \cos x) - (1 - \cos x) = 0$, dar $1 + \cos x = 2\cos^2 \dfrac{x}{2}$; deci $2 \sin \dfrac{x}{2} \cos^3 \dfrac{x}{2} - \sin^2 \dfrac{x}{2} = \sin \dfrac{x}{2} \left(2\cos^3 \dfrac{x}{2} - \sin \dfrac{x}{2}\right) = 0$. Pentru $\sin \dfrac{x}{2} = 0$ avem $x \in \bigcup \{2k\pi\}$, $k \in \mathbf{Z}$ care nu sînt valori admisibile deoarece sîntem în ipoteza $\sin x \neq 0$.

Ecuația $2\cos^2\frac{x}{2} = \operatorname{tg} x/2$ se mai scrie $\frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg}^3\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2 = 0$, sau $\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right)\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2\right) = 0$,

de unde $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow x_3 \in \bigcup \{2k\pi + \pi/2\}$ care nu convine căci în acest caz $\sin x = 0$.

Ecuația $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + \operatorname{tg} x + 2 = 0$ nu are rădăcini reale. Deci numai soluția $x_1 \in \bigcup \{k\pi + \pi/4\{$ verifică ecuația dată, $k \in \mathbf{Z}\}$.

5.93. $\frac{1}{7} < 2 - \sqrt{3}$ implică $\operatorname{arctg}\frac{1}{7} < \operatorname{arctg}(2-\sqrt{3}) = \frac{\pi}{12}$; $\frac{1}{11} < 2 - \sqrt{3}$ implică $\operatorname{arctg}\frac{1}{11} < \operatorname{arctg}(2-\sqrt{3}) = \frac{\pi}{12}$; $\frac{29}{47} < 1$ implică $\operatorname{arctg}\frac{29}{47} < \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Prin urmare $\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{11} + \operatorname{arctg}\frac{29}{47} < \frac{5\pi}{12}$.

Folosim formula $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$ dacă $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \frac{\pi}{2}$. Avem: $\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{11} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{11}}{1-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{11}} =$

$$= \operatorname{arctg}\frac{\frac{18}{77}}{\frac{76}{77}} = \operatorname{arctg}\frac{9}{38} \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{11} + \operatorname{arctg}\frac{29}{47} =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{9}{38} + \operatorname{arctg}\frac{29}{47} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{29}{47}+\frac{9}{38}}{1-\frac{29\cdot 9}{47\cdot 38}} = \frac{\pi}{4}.$$

5.94. Din proporții derivate obținem $\frac{-8x^3+8x}{2x^4-12x^2+2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} =$

$$= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{12}.$$

Notăm $x = \operatorname{tg} a$, deci $\frac{4 \operatorname{tg} a(1 - \operatorname{tg}^2 a)}{\operatorname{tg}^4 a - 6 \operatorname{tg}^2 a + 1} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$, dar $\operatorname{tg} 4a =$

$= \frac{2 \operatorname{tg} 2a}{1 - \operatorname{tg}^2 2a} = \frac{4 \operatorname{tg} a(1 - \operatorname{tg}^2 a)}{\operatorname{tg}^4 a - 6 \operatorname{tg}^2 a + 1}$ deci avem $\operatorname{tg} 4a = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \Rightarrow 4a =$

$= \frac{\pi}{12} + k\pi$ sau $a = \frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$. Pentru $k = 0$ avem $x_1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{48}$.

Pentru $k = 1$ avem $x_2 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{48} + \frac{\pi}{4} = \operatorname{tg} \frac{13\pi}{48}$ apoi $x_3 = \operatorname{tg} \frac{25\pi}{48}$ și $x_4 =$

$= \operatorname{tg} \frac{37\pi}{48}$ care sînt rădăcinile ecuației din enunț.

5.95. a) Pentru $k = 0$ se verifică. Pentru $k = 1, 2$, obținem succesiv: $a + b - c - d = 0$, $a - b + c - d = 0$, adică pentru $a = d$ și $b = c$.

Pentru $k = 3 \Rightarrow a + b - c - d = 0$, care se verifică și pentru $a = d$ și $b = c$, idem pentru $k = 4$, apoi se repetă. Ecuația devine $a(\sin x + \sin 7x) +$ $+ b(\sin 3x + \sin 5x) = 0$; $2a \sin 4x \cos 3x + 2b \sin 4x \cos x = 0$.

Pentru $\sin 4x = 0$ obținem $x_1 \in \bigcup \left\{\frac{k\pi}{4}\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$,

$\cos x(4a \cos^2 x - 3a + b) = 0$ avem $\cos x = 0$, deci $x_2 \in \bigcup \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2}\right\}$

care este inclusă în $x_1 \in \bigcup \left\{\frac{k\pi}{4}\right\}$. Rămîne de studiat și ecuația: $4a \cos^2 x -$

$- 3a + b = 0 \Rightarrow \cos x = \pm \sqrt{\frac{3a - b}{4a}}$; $x \in \bigcup \left\{k\pi \pm \arccos \sqrt{\frac{3a - b}{4a}}\right\}$ cu

condițiile $0 \leqslant \frac{3a - b}{4a} \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \frac{3}{4} - \frac{b}{4a} \leqslant 1$ sau $-1 \leqslant \frac{b}{a} \leqslant 3$.

b) Pentru $b = 1$ avem $\cos x = \pm \sqrt{3/4 - 1/4a}$ care are soluție $x \in \bigcup \{k\pi/4\}$ dacă $a \in (0, 1/3]$ și $3/4 - 1/4a - 1 \geqslant 0 \Rightarrow a \in [-1, 0)$, iar pentru $3/4 - 1/4a = 1/2$ avem $a = 1$, deci $a \in [-1, 0) \cup (0, 1/3] \cup \{1\}$.

5.96. Avem $\sin x(1 - \cos 6x) = 2$ dar $\sin x \in [-1, 1]$ și $\cos x \in [-1, 1]$, $0 \leqslant 1 - \cos x \leqslant 2$. Deci ar trebui să avem $\sin x = 1$ și $1 - \cos 6x = 2$ adică $\sin x = 1$ și $\cos 6x = -1$.

Din ecuația $\sin x_1 = 1$ rezultă $x_1 \in \bigcup \{2k\pi + \pi/2\}$, $k \in \mathbf{Z}$. Din $\cos 6x_2 =$ $= -1$ rezultă $6x_2 = (2m + 1)\pi$, deci $x_2 \in \bigcup \left\{\frac{2m+1}{6}\pi\right\}$, $m \in \mathbf{Z}$. Avem de rezolvat în numere întregi ecuația $2k\pi + \pi/2 = m\pi/3 + \pi/6$ sau $12k +$ $+ 3 = 2m + 1$; $m = 6k + 1$, $k \in \mathbf{Z}$. Pentru $k = 0$ și $m = 1$ avem $x_1 = \pi/2$, $x_2 = \pi/2$. În general, $x_1 \in \bigcup \{2k\pi + \pi/2\}$, $k \in \mathbf{Z}$ și, de asemenea, $\bigcup \{2k\pi + \pi/2\}$, $k \in \mathbf{Z}$ $(x_1 = x_2)$. Verificare: $\frac{(2m+1)}{6} = \frac{[2(6k+1)+1}{6} =$

$= 2k\pi + \frac{\pi}{6}$.

5.97. Ecuația se mai poate scrie $6(2\cos^2\varphi - 1) - 7x\cos^2\varphi + x^3 = 0$ și de aici, $\cos\varphi = \pm\sqrt{\dfrac{x^3-6}{7x-12}}$. Ca să avem soluții trebuie ca:

$$0 \leqslant \frac{x^3-6}{7x-12} \leqslant 1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^3-7x+6}{7x-12} = 0 \\ \dfrac{x^3-6}{7x-12} \geqslant 0. \end{cases}$$

Dar se observă ușor că $x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3)$ și prima devine $\dfrac{(x-1)(x-2)(x+3)}{(7x-12)} \leqslant 0$, care este satisfăcută pentru $x \in [-3, 1] \cup (12/7, 2]$

A doua o putem scrie $\dfrac{(x-\sqrt[3]{6})(x^2+x\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{36})}{7x-12} \geqslant 0$, și $x^2 + x\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{36} > 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, astfel că se reduce la $\dfrac{x-\sqrt[3]{6}}{7x-12} \geqslant 0$, care este satisfăcută pentru $x \in (-\infty, 12/7) \cup [\sqrt[3]{6}, +\infty]$. **(3)**

Soluția este intersecția mulțimilor (2) și (3) adică $x \in [-3, 1] \cup [\sqrt[3]{6}, 2]$.

5.98. Avem $\dfrac{5}{3}\pi\cos\pi x = k\pi + (-1)^k\dfrac{\pi}{6}$, $\cos\pi x = \dfrac{3}{5}k + \dfrac{(-1)^k}{10}$, $k \in \mathbf{Z}$, $|\cos\pi x| \leqslant 1$; iar k poate lua numai valorile $-1, 0, 1$. Pentru satisfacerea inegalităților: $-1 < \left(\dfrac{3}{5}k + \dfrac{(-1)^k}{10}\right) > 1$ obținem: Pentru $k = -1$, $\cos\pi x = 7/10$; pentru $k = 0$, $\cos\pi x = 1/10$, iar pentru $k = 1$, $\cos\pi x = 1/2$. Astfel obținem:

$$x_1 \in \bigcup\left\{2k \pm \frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{7}{10}\right)\right\} = \left\{2k + 1 \mp \frac{1}{\pi}\arccos\frac{7}{10}\right\},\ k \in \mathbf{Z}$$

$$x_2 \in \bigcup\left\{2k \pm \frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{10}\right\};\quad x_3 \in \bigcup\left\{2k \pm \frac{1}{3}\right\},\ k \in \mathbf{Z}$$

5.99. Trebuie să avem $|\arcsin x| \leqslant \pi/2$; $(5/3 > \pi/2)$ deci ecuația nu admite soluții.

5.100. Prima ecuație o putem scrie $\cos\left(\dfrac{1}{2}\pi - \cos x\right) = \cos(\sin x)$,

$$\frac{1}{2}\pi - \cos x = 2k\pi \pm \sin x,\ (-\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{4}\pi^2(1-4k)^2,$$

$$\Rightarrow \pm\sin 2x = \frac{1}{4}\pi^2(1-4k)^2 - 1,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Discuție. Pentru ca această ecuație să admită rădăcini, trebuie ca:

$$-1 \leqslant \frac{1}{4}\pi^2(1-4k)^2 - 1 \leqslant +1,$$

$$-3 \leqslant \pi^2(1-4k)^4,\ \pi^2(1-4k)^2 \leqslant 5.$$

Prima inegalitate este evidentă, iar a doua nu este posibilă pentru $k = 0$ căci $9\pi^2 > 5$, iar dacă avem $k \leqslant -1$ și $k \geqslant 1$, atunci $9\pi^2$ trece peste 5. Ecuația este deci imposibilă.

5.101. Ecuația se mai scrie
$(\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \sin x \cos x + \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x$, sau
$(\cos x + \sin x)[1 - \sin x \cos x - (\cos x - \sin x)] = 0$.
Obținem ecuațiile:

$$\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow x_1 \in \bigcup \{k\pi - \pi/4\},\ k \in \mathbf{Z} \text{ și}$$

$$1 - (\cos x - \sin x) - \sin x \cos x = 0.$$

Notăm $\cos x - \sin x = t$, de unde $\cos x \sin x = \dfrac{1 - t^2}{2}$, deci $1 - t - \dfrac{1 - t^2}{2} = 0$ sau $t^2 - 2t + 1 = 0$, $t = 1$, $\cos x - \sin x = 1$;

$$\cos(x + \pi/4) = 1/\sqrt{2};\ x + \pi/4 = 2k\pi \pm \pi/4.$$

$$x_2 \in \bigcup \{2k\pi\},\quad x_3 \in \bigcup \{2k\pi - \pi/2\},\ k \in \mathbf{Z}.$$

5.102. Ecuația dată se mai scrie $\dfrac{\sin^2 x}{1 + \sin x} + \dfrac{1/2 \sin^2 x}{1 + 1/\sin x} +$

$$+ \frac{\cos^2 x}{1 + \cos x} + \frac{1/\cos^2 x}{1 + 1/\cos x} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg} x} + \frac{1/\operatorname{tg}^2 x}{1 + 1/\operatorname{tg} x} =$$

$= \dfrac{25}{4}$ sau (cu condiția $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$). $\dfrac{\sin^2 x - \sin x + 1}{\sin x} +$

$$+ \frac{\cos^2 x - \cos x + 1}{\cos x} + \frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x} = \frac{25}{4},\ \text{sau}\ \frac{\sin^2 x + 1}{\sin x} +$$

$$+ \frac{\cos^2 x + 1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{25}{4} + 3 = \frac{37}{4}.$$

În aceleași condiții avem $4[(\sin x \cos x + 1)(\sin x + \cos x + 1] = 37 \sin x \cos x$, de unde, notînd $\sin x + \cos x = y$, $y \in \mathbf{R}$, $y \leqslant \sqrt{2}$, obținem ecuația: $4 \cdot \dfrac{y^2 + 1}{2} \cdot y + 4 = 37 \cdot \dfrac{y^2 - 1}{2}$ sau $4y^3 - 37y^2 + 4y + 45 = 0$;
$(y + 1)(4y^2 - 41y + 45) = 0$. Rezultă $y_1 = -1$, $\sin x + \cos x = -1$ sau $\sin(x + \pi/4) = -1/\sqrt{2}$. Deci $x_1 + \pi/4 = 2k_1\pi + 5\pi/4 \Rightarrow x_1 \in \bigcup \{2k_1\pi + \pi\}$, $k_1 \in \mathbf{Z}$ și $x_2 + \pi/4 = 2k_2\pi - \pi/4 \Rightarrow x_2 \in \bigcup \{2k_2\pi - \pi/2\}$, $k_2 \in \mathbf{Z}$.
$y_{2,3} = \dfrac{41 \pm 31}{8}$; $y_2 = 72/8 = 9$ (nu convine); $y_3 = 5/4$ de unde $\sin x + \cos x = 5/4$ sau $\sin(x + \pi/4) = 5\sqrt{2}/8$ deci

$$x_3 \in \bigcup \left\{(-1)^k \arcsin \frac{5\sqrt{2}}{8} + k\pi - \frac{\pi}{4}\right\},\ k \in \mathbf{Z}.$$

5.103. Avem $\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\cos 2x} = 2\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} = 2\,|\cos x|$; $\cos 7x + \cos 5x = 2\cos 6x\cos x$. Ecuația dată se mai scrie $2\,|\cos x|\,(2\cos^2 3x - 1 - \cos 3x + 1) + 2\cos 6x\cos x + 2\cos x(1-\cos 3x) = 0$; $|\cos x|\,(2\cos^2 3x - \cos 3x) + \cos x(2\cos^2 3x - 1) - \cos 3x + 1 = 0$; $(|\cos x| + \cos x)(\cos 3x - 1/2)\cos 3x = 0$. Rezultă: $|\cos x| + \cos x = 0$ de unde $x_1 \in \bigcup[2k\pi + \pi/2,\ 2k\pi + 3\pi/2]$, $k \in \mathbf{Z}$; $\cos 3x = 0$, deci $3x = k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_2 \in \bigcup\left\{\frac{k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6}\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$; $\cos 3x = \frac{1}{2}$, $3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x_3 \in \bigcup\left\{\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.104. a) $\sec x\sqrt{1+\frac{1}{2}a\sin 2x} + \sqrt{1-\frac{1}{2}a\sin 2x} = \sec x(\sin x + \cos x)$, $\sec x \neq \infty$. Prin ridicare la pătrat obținem: $2\sqrt{1-\frac{1}{4}a^2\sin^2 2x} = \sin 2x + 1$. Ridicăm din nou la pătrat și obținem: $(1+a^2)\sin^2 2x - 2\sin 2x - 3 = 0$ de unde:

$$x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1 \pm \sqrt{4+3a^2}}{1+a^2}. \tag{1}$$

Pentru $a = 2$ se obține: $\sin 2x = \frac{1 \pm 4}{5}$ și verifică numai $\sin 2x = 1$ adică $x = k\pi + \pi/4$, $k \in \mathbf{Z}$.

Pentru ca să avem: $1 \geqslant \frac{1 \pm \sqrt{4+3a^2}}{1+a^2} \geqslant -1$ găsim condiția necesară cînd $\sec x \neq \infty$; $-2 \leqslant a \leqslant 2$. (2)

b) *Discuție.* Pentru $a = \pm 2$ ecuația dată devine $1 + \operatorname{tg} x + 1 - \operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg} x$ adică $x = k\pi + \pi/4$. Condiția (2) se mai poate obține și din inegalitățile $0 < \sqrt{\sec^2 x + a\operatorname{tg} x} \leqslant 1 + \operatorname{tg} x$ și $\sqrt{\sec^2 x - a\operatorname{tg} x} \leqslant 1 + \operatorname{tg} x$. Din $1 + \operatorname{tg} x > 0$ deducem că x nu poate fi în intervalele $(\pi/2, 3\pi/4)$ și $(3\pi/2, 7\pi/4)$. Atît pentru $a = 1$ cît și pentru $a = -1$ obținem aceeași ecuație.

Observație. Dacă înlocuim $\sec^2 a = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ și ridicăm la pătrat obținem ecuația $3\operatorname{tg}^4 x + 4\operatorname{tg}^3 x + 2(1-2a^2)\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x + 3 = 0$.

5. 105. Deoarece $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$, $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$, ecuația dată este echivalentă cu $\sin x + |\cos x| = m/\sqrt{2}$, $x \in [0, \pi]$ sau cu $\sin x + \cos x = m/\sqrt{2}$, $x \in [0, \pi/2]$ și $\sin x - \cos x = m/\sqrt{2}$, $x \in (\pi/2, \pi]$. Acestea se pot aduce la forma $\sin(x + \pi/4) = m/2$, $x \in [0, \pi/2[$ și $\sin(x - \pi/4) = m/2$, $x \in [\pi/2, \pi]$. Deoarece $(x + \pi/4) \in [\pi/4, 3\pi/4]$, $(x - \pi/4] \in (\pi/4, 3\pi/4$, rezultă $\sqrt{2}/2 \leqslant m/2 \geqslant 1$, adică $m \in [\sqrt{2}, 2]$. Pentru $m = \sqrt{2}$ găsim $x_1 = 0$ $x_2 = \pi/2$ și $x_3 = \pi$.

5.106. Înmulțim cu $\sin x \sin 2x \sin 4x$ în ipoteza că $\sin x \sin 2x \sin 4x \neq 0$ și avem $\sin 2x \sin 4x \sin 8x = \sin x \sin 2x \sin 4x$, sau $\sin 8x = \sin x$, de

unde rezultă $\sin 8x - \sin x = 2 \sin \frac{7x}{2} \cos \frac{9x}{2} = 0$. Deci:

$7x/2 = k\pi$ adică $x = 2k\pi/7$; pentru $k = 1, 2, 3$ obținem $x_1 = 2\pi/7$ $x_2 = 4\pi/7$, $x_3 = 6\pi/7$; $x \in (0, \pi)$.

$9x/2 = k\pi + \pi/2$ adică $x = \frac{(2k+1)\pi}{9}$, pentru $k = 0, 1, 2, 3$ și obținem $x_4 = \pi/9$, $x_5 = 3\pi/9 = \pi/3$, $x_6 = 5\pi/9$ și $x_7 = 7\pi/9$.

Observație. Dacă în ecuația din enunț înlocuim $\cos 2x$ și $\cos 4x$ în funcție de $\cos x$, obținem o ecuație de gradul 7 în $\cos x$ ale cărei rădăcini sînt date de $\cos x_1$, $\cos x_2$, $\cos x_3$, $\cos x_4$, $\cos x_5$, $\cos x_6$, $\cos x_7$, unde x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 sînt rădăcinile din intervalul $(0, \pi)$ ale ecuației din enunț.

5.107. a) Ecuația se scrie $\sin^2 x + p \sin x + p - 1 = 0$ care ne dă $\sin x = -1$, $\sin x = 1 - p$. Prima ne dă, în intervalul $[0, 2\pi]$, soluția $x = 3\pi/2$. Ca a doua să dea soluții în acest interval, trebuie ca $-1 < 1 - p < 1$ valabilă pentru $p \in [0, 2]$. Ca să ne dea numai o soluție în $[0, 2\pi]$, trebuie ca sau $p = 0$ sau $p = 2$. Pentru $p = 0$ avem soluția $x = \pi/2$, iar pentru $p = 2$ avem $x = 3\pi/2$ aceeași ca și cea dată de prima. Deci ca ecuația să admită două soluții distincte în intervalul $[0, 2\pi]$, trebuie ca $p = 0$.

b) Pentru $p = 1/2$ ecuația devine: $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$, $\sin x = -1$ și $\sin x = 1/2$. Prima ne dă: $x \in \bigcup \left\{(-1)^k = \frac{3\pi}{2} + k\pi\right\}$ și a doua $x \in \bigcup \left\{(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi\right\}$, $(k \in \mathbf{Z})$.

c) $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ și din ecuație avem $p = \frac{\cos 2x + \sin^2 x}{1 + \sin x} =$

$= \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} = 1 - \sin x$ și deci $\sin x = 1 - p$. $\cos x =$

$= \pm \sqrt{1 - (1-p)^2} = \pm \sqrt{2p - p^2}$; $\operatorname{tg} x = \frac{1-p}{\pm \sqrt{2p - p^2}}$ înlocuind în $\operatorname{tg} 2x$,

obținem: $\operatorname{tg} 2x = \pm \frac{2p(1-p)(2-p)}{(-2p^2 + 4p - 1)(\sqrt{p(2-p)})}$.

5.108. Înmulțind cu $\sin x \sin 2x \sin 4x \sin 8x \neq 0$, avem
$16 \sin x \cos x \sin 2x \cos 2x \sin 4x \cos 4x \sin 8x \cos 8x =$
$= \sin x \sin 2x \sin 4x \sin 8x \neq 0$ sau $\sin 2x \sin 4x \sin 8x \sin 16x =$
$= \sin x \sin 2x \sin 4x$ si $n8x$, Rezultă $\sin x = \sin 16x$ sau $2 \sin 15x/2 \sin 17x/2 = 0$. Deci

$$\sin \frac{15x}{2} = 0, \Rightarrow \frac{15x}{2} = k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{15}, \quad k \in (1, 7)$$

$$\cos \frac{17x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{17x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{17}, \; k \in (0, 7).$$

Rezultă: $x \in \left\{ \frac{2\pi}{15}, \frac{4\pi}{15}, \frac{6\pi}{15}, \frac{8\pi}{15}, \frac{10\pi}{15}, \frac{12\pi}{15}, \frac{14\pi}{15}, \frac{\pi}{17}, \frac{3\pi}{17}, \frac{5\pi}{17}, \right.$

$\left. \frac{7\pi}{17}, \frac{9\pi}{17}, \frac{11\pi}{17}, \frac{13\pi}{17}, \frac{15\pi}{17} \right\}$ adică 15 valori distincte ale lui x.

Observație. Dacă în ecuația din enunț înlocuim $\cos 2x$, $\cos 4x$, $\cos 8x$ în funcție de $\cos x$ obținem o ecuație de gradul 15 care este verificată pentru $\cos x_i$, $i \in (1, 15)$.

5.109. Notăm $k\pi/7 = x$ și rezolvăm ecuația $8 \cos x \cos 2x \cos 3x = 1$. Înmulțim cu $\sin x \sin 2x \sin 3x \neq 0$ și obținem $8 \sin x \cos x \sin 2x \cos 2x \sin 3x \cos 3x = \sin x \sin 2x \sin 3x$; sau $\sin 2x \sin 4x \sin 6x = \sin x \sin 2x \sin 3x$, de unde $\sin 4x \sin 6x = \sin 3x \sin x$ sau $\cos 10x - \cos 2x = \cos 4x - \cos 2x$ deci $\cos 10x - \cos 4x = 0$, de unde $\sin 7x \sin 3x = 0$; dar fiindcă am înmulțit ecuația din enunț cu $\sin 3x$, pentru $\sin 3x = 0$, adică $x = k\pi/3$ nu avem $8 \cos \frac{k\pi}{3} \cos \frac{2k\pi}{3} \cos \frac{3k\pi}{3} = 1$. Rădăcinile ecuației $\sin 7x = 0$ corespund și ecuației date: $\sin x = k\pi/7$, unde $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Pentru $k = 0$ sau $k = 7$ avem $\sin 2x = 0$. Am simplificat cu $\sin 2x \neq 0$, iar ecuația $8 \cos x \cos 2x \cos 3x = 1$ nu este verificată cînd $x = 0$, $(k = 0)$ sau cînd $x = \pi$, $(k = 7)$.

Pentru $k = 4$ avem $\sin \frac{4\pi}{7} = \sin \frac{3\pi}{7}$ dar $\cos \frac{4\pi}{7} = -\cos \frac{3\pi}{7}$;

$$\cos \frac{5\pi}{7} = -\cos \frac{2\pi}{7} \text{ și } \cos \frac{6\pi}{7} = -\cos \frac{\pi}{7}.$$

Observație. Dacă notăm $\cos x = y$ avem $\cos 2x = 2y^2 - 1$ și $\cos 3x = 4y^3 - 3y$, iar ecuația $8 \cos x \cos 2x \cos 3x = 1$ devine $8y(2y^2 - 1)(4y^3 - 3y) = 1$ sau $64y^6 - 80y^4 + 24y^2 - 1 = 0$ cu rădăcinile $y_{1,2} = \pm \cos \frac{\pi}{7}$, $y_{3,4} = \pm \cos \frac{2\pi}{7}$ și $y_{5,6} = \pm \cos \frac{3\pi}{7}$.

Ecuația $64z^3 - 80z^2 + 24z - 1 = 0$ are rădăcinile $z_1 = \cos^2 \frac{\pi}{7}$, $z_2 = \cos^2 \frac{2\pi}{7}$, $z_3 = \cos^2 \frac{3\pi}{7}$. Dacă notăm $4z = t$, ecuația în z devine $t^3 - 5t^2 + 6t - 1 = 0$ cu rădăcinile $t_1 = 4 \cos^2 \frac{\pi}{7}$, $t_2 = 4 \cos^2 \frac{2\pi}{7}$, $t_3 = 4 \cos^2 \frac{3\pi}{7}$.

5.110. Notăm $x = \cos y$. Ecuația a doua devine: $(\cos y + i \sin y)^5 + (\cos x - i \sin y)^5 - 1 = 0$ sau $2 \cos 5y = 1$, dar $\cos 5y = 16 \cos^5 y - 20 \cos^3 x + 5 \cos y$, deci $32 \cos^5 y - 40 \cos^3 y + 10 \cos y - 1 = 0$, $\cos y = x$ devine $32x^5 - 40x^3 + 10x - 1 = 0$, deci ecuațiile sînt echivalente.

Rezolvăm deci ecuația $\cos 5y = 1/2$; $y = 72k \pm 12°$, $k = 0, 1, 2$.

Pentru $k = 0$, $y_1 = 12°$, $x_1 = \cos 12°$.

Pentru $k = 1$, $y_2 = 60°$, $x_2 = \cos 60° = 1/2$ și

$y_3 = 84°$, $x_3 = \cos 84° = \sin 6°$.

Pentrn $k = 2$, $y_4 = 156°$, $x_4 = \cos 156° = -\cos 24°$.

$y_5 = 132°$, $x_5 = \cos 132° = -\sin 43°$.

5.111. Ținem seama că $\dfrac{\sin(a+x)+1}{\cos(a+x)} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{a+x}{2}\right)$, deci

$\operatorname{tg} nx = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{a+x}{2}\right)$ de unde $nx = k\pi + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{a+x}{2}$ sau

$x \in \bigcup \left\{ \dfrac{(4k+1)\pi + 2a}{2(2n-1)} \right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.112. a) Avem $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}(1 - 3x^2) = 3x - x^3$ sau $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2} =$

$$= \frac{3\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{36} - \operatorname{tg}^3\dfrac{\pi}{36}}{1 - 3\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{36}}.$$

Egalitatea este verificată deoarece $\operatorname{tg} 3a = \dfrac{3\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$ sau $a = \dfrac{\pi}{36}$.

În general, pentru $3a = k\pi + \pi/12$ avem $a = k\pi/3 + \pi/36$, $k \in \mathbf{Z}$.

Pentru $k = 0$, $a = \dfrac{\pi}{36}$, adică $x_1 = \dfrac{\pi}{36}$.

Pentru $k = 1$, $a = \pi/3 + \pi/36$ deci

$$x_2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{36}\right) = \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{36}}{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{36}} = \frac{\sqrt{3} + x_1}{1 - x_1\sqrt{3}} = \operatorname{tg}\frac{13\pi}{36} = \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{36},$$

$$x_3 = \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{35}\right) = \operatorname{tg}\frac{25\pi}{36} = \operatorname{ctg}\left(\frac{-7\pi}{36}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{36} = \frac{-\sqrt{3} + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{36}}{1 + \sqrt{3}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{36}}$$

b) Înlocuim astfel $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$; $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{36} = \dfrac{1 - t\sqrt{3}}{\sqrt{3} + t}$; $\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{36} =$

$= \dfrac{1 + t\sqrt{3}}{\sqrt{3} - t}$, unde $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{36} = t$ și obținem

$$\frac{3t - t^3}{1 - 3t^2} \cdot \frac{1 - t\sqrt{3}}{\sqrt{3} + t} \cdot \frac{1 + t\sqrt{3}}{\sqrt{3} - t} = \frac{t(3 - t^2)(1 - 3t^2)}{(1 - 3t^2)(3 - t^2)} = t,$$

și astfel este stabilită egalitatea.

5.113. Ecuația dată se mai scrie:
$\sin x \sin a - \cos x \cos a = 2 \sin a \cos a = \sin 2a$,
$\cos(x + a) = -\sin 2a$, de unde:
$x + a = 2k\pi \pm \arccos(-\sin 2a) = 2k\pi \pm (2a + \pi/2)$

$$x_1 \in \bigcup \left\{2k\pi + \frac{\pi}{2} + a\right\}, \quad x_2 \in \bigcup \{2k\pi - \pi/2 - 3a\}, \quad k \in \mathbf{Z}$$

5.114. $\sin 3x + \sin 2x - m \sin x = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x + \sin 2x - m \sin x = \sin x(2\cos^2 x + \cos 2x + 2\cos x - m) = 0$ sau $\sin x(4\cos^2 x + 2\cos x - m - 1) = 0$.

Avem $\sin x = 0$ deci $x_1 \in \bigcup \{k\pi\}$, $k \in \mathbf{Z}$;

$$4\cos^2 x + 2\cos x - (m + 1) = 0, \quad \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{4m + 5}}{4} \Rightarrow 4m + 5 \geqslant 0; \quad m \geqslant -5/4.$$

Pentru $m < -5/4$ nu avem soluții reale pentru $\cos x$. Dacă $m \geqslant -5/4$ mai punem condițiile:

$$\text{a)} \left|\frac{-1 + \sqrt{4m + 5}}{4}\right| \leqslant 1; \quad \text{b)} \left|\frac{-1 - \sqrt{4m + 5}}{4}\right| \leqslant 1.$$

a) Pentru $|-1 + \sqrt{4m + 5}| \leqslant 4$ sau $-4 \leqslant -1 + \sqrt{4m + 5} \leqslant 4 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow -3 \leqslant \sqrt{4m + 5} \leqslant 5$, de unde $4m + 5 \leqslant 25$ sau $m \leqslant 5$ deci $-5/4 \leqslant m \leqslant 5$ pentru $\cos x = \dfrac{-1 + \sqrt{4m + 5}}{4}$.

b) Pentru $|-1 - \sqrt{4m + 5}| \leqslant 4$ sau $-4 \leqslant -1 - \sqrt{4m + 5} \leqslant 4$ rezultă $-5/4 \leqslant m \leqslant 1$, iar $\cos x = \dfrac{-1 - \sqrt{4m + 5}}{4}$.

Răspuns: 1) $x_1 \in \bigcup \{k\pi\}$ dacă $m < -5/4$; $k \in \mathbf{Z}$.

2) $x_1 \in \bigcup \{k\pi\}$, $x_2 \in \bigcup \left\{2k\pi \pm \arccos \dfrac{-1 \pm \sqrt{4m + 5}}{4}\right\}$, dacă $-5/4 \leqslant m \leqslant 1$.

3) $x_1 \in \bigcup \{k\pi\}$, $x_2 \in \bigcup \left\{2k\pi \pm \arccos \dfrac{-1 + \sqrt{4m + 5}}{4}\right\}$, dacă $1 < m \leqslant 5$.

4) $x_1 \in \bigcup \{k\pi\}$ dacă $m > 5$.

5.115. Fie $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t$, deci $\sin x = \dfrac{2t}{1 + t^2}$; $\cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$.

Ecuația dată se mai scrie:

$$\frac{2t}{3t^2 + 1} = at, \text{ de unde } t = 0, \frac{x}{2} = k\pi, \quad x_1 \in \bigcup \{2k\pi\}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

$$\frac{2}{3t^2 + 1} = a \text{ de unde } \frac{2 - a}{3a} = t^2.$$

Pentru $\frac{2-a}{3a} \geqslant 0$ adică pentru $0 < a \leqslant 2$ avem $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2-a}{3a}} +$ $+ k\pi$, deci $x \in \bigcup \left\{2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2-a}{3a}} + 2k\pi\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$, unde $0 < a \leqslant 2$.

5.116. Ecuația dată se mai scrie: $m - 2m \sin^2 3x + (4 - m)\sin 3x + 2 - m = 0$ sau $2m \sin^2 3x - (4 - m) \sin 3x - 2 = 0$. Notăm $\sin 3x = y$. Obținem: $2my^2 - (4 - m)y - 2 = 0$ cu rădăcinile

$$y_{1,2} = \frac{4 - m \pm \sqrt{(4-m)^2 + 16m}}{4m} = \frac{4 - m \pm (4 + m)}{4m},$$

de unde $y_1 = -1/2$ deci $\sin 3x = -1/2$; $3x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi$,

$$x_1 \in \bigcup \left\{(-1)^{k+1} \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}\right\}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

b) $y_2 = 2/m$ cu condiția $m \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ deci $x_2 \in$ $\in \bigcup \left\{\frac{(-1)^k}{3} \arcsin \frac{2}{m} + \frac{2}{m} + \frac{k\pi}{3}\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

c) Pentru $m = 2\sqrt{2}$ avem $x_1 \in \{7\pi/18\}$, $x_2 \in \{11\pi/18\}$, $x_3 \in \{\pi/4\}$ și $x_4 \in \{3\pi/4\{$, sau în grade $x_1 = 70°$, $x_2 = 110°$, $x_3 = 45°$, $x_4 = 135°$.

5.117. a) $\sin(\pi/2 - 2x) = \cos 2x$; iar ecuația devine $\cos 3x - \cos 2x = 0$. Avem $3x - 2x = 2k\pi$, deci $x = 2\pi k$ și $3x + 2x = 2k\pi$, deci $x \in \bigcup \{2k\pi/5\}$. $k \in \mathbf{Z}$.

b) Folosim relațiile $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ și $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Notăm $\cos x = y$ și obținem $4y^3 - 2y^2 - 3y + 1 = 0$ sau $(y - 1)(4y^2 +$ $+ 2y - 1) = 0$, de unde $y_1 = 1 = \cos 2k\pi = \cos x$; $y_2 = \cos \frac{2\pi}{5} =$ $= \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$, deoarece $\cos \frac{2\pi}{5} > 0$, $y_3 = \cos \frac{4\pi}{5} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$, deoarece $\cos \frac{4\pi}{5} < 0$; $\cos \frac{\pi}{5} = -\cos \frac{4\pi}{5}$ și $\cos \frac{3\pi}{5} = -\cos \frac{2\pi}{5}$; $\sin \frac{\pi}{10} =$ $= \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$; $\sin \frac{3\pi}{10} = \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

5.118. Avem $\frac{\operatorname{tg}(m-3)x}{\operatorname{tg}(m+1)x} = \frac{\operatorname{tg}(m+2)x}{\operatorname{tg} mx}$ sau

$$\frac{\operatorname{tg}(m+3)x - \operatorname{tg}(m+1)x}{\operatorname{tg}(m+3)x + \operatorname{tg}(m+1)x} = \frac{\operatorname{tg}(m+2)x - \operatorname{tg} mx}{\operatorname{tg}(m+2)x + \operatorname{tg} mx},$$ de unde

$\frac{\sin 2x}{\sin(2m+4)x} = \frac{\sin 2x}{\sin(2m+2)x}$ sau $\sin(2m+4)x = \sin(2m+2)x$. Prin urmare $(2m+4)x_1 + (2m+2)x_1 = (2k+1)\pi$, de unde $x_1 \in \bigcup \left\{\frac{(2k+1)\pi}{4m+6}\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$ sau $(2m+4)x_2 - (2m+2)x_2 = 2k\pi$, de unde $x_2 \in \bigcup \{k\pi\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Discuție. Soluția $x_0 = k\pi/2$ introdusă dă $\sin 2x = 0$, care nu corespunde decît pentru k par, căci altfel $\operatorname{tg} mx$ și $\operatorname{tg}(m+2)x$ sau $\operatorname{tg}(m+1)x$ și $\operatorname{tg}(m+3)x$, după cum m este impar sau par, nu are sens.

5.119. a) Pentru ca ecuația $a \sin x + b \cos x = c$ să aibă soluții reale trebuie ca $\sqrt{b^2} \geq |c|$ deci în cazul din enunț $1\sqrt{n + m^2} \geq |n|$ adică $n \in [-\sqrt{1+m^2}, \sqrt{1+m^2}]$.

$$(m \sin x - \cos x)^2 = m^2 \sin^2 x + \cos^2 x + 2m \sin x \cos x. \quad (1)$$

$$(\sin x) + m \cos x)^2 = \sin^2 x + m^2 \cos^2 x + 2m \sin x \cos x = n^2. \quad (2)$$

Din (1) și (2) obținem

$(m \sin x - \cos x)^2 + n^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x)(1 + m^2) = 1 + m^2$, deci $m \sin x - \cos x = \pm \sqrt{1+m^2 - n^2}$, relație care este adevărată și dacă $\sin x + m \cos x = -n$.

b) Avem $m \cos x = n - \sin x$ sau $m^2 \cos^2 x = n^2 + \sin^2 x - 2n \sin x$, dar $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, deci $(1 + m^2) \sin^2 x - 2n \sin x + n^2 - m^2 = 0$.

5.120. Notăm $\sin^2 a \cos^2 a = u$ și obținem

$$u^2 + u(x^2 - x + 1) + (x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x) = 0.$$

unde $u = \sin^2 a \cos^2 a \in [0, 1/4]$, de unde $x_1 = -x^2 + 3x - 2$ și $u_2 = -x^2 - x$ de unde $x_1 = 1 + \sin^2 \alpha$, $x_2 = 1 + \cos^2 \alpha$, $x_3 = \cos^2 \alpha - 1$ și $x_4 = 5 \sin^2 \alpha - 1$

5.121. $4 \sin^2 x - 4 \sin x \sin^2 nx + \sin^4 nx - \sin^4 nx + \sin^2 nx = 0$. sau $(2 \sin x - \sin^2 nx)^2 + \sin^2 nx(1 - \sin^2 nx) = 0$.

Rezultă $2 \sin x - \sin^2 nx = 0$ și $\sin^2 nx \cos^2 nx = 0 \Rightarrow \sin^2 2nx = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2nx = k\pi;\ x = \frac{k\pi}{2n},\ k \in \mathbf{Z} \quad (1)$$

Dar trebuie ca pentru $x = k\pi/2n$ să mai avem $2 \sin x - \sin^2 nx = 0$ adică

$$2 \sin \frac{k\pi}{2n} = \sin^2 n \cdot \frac{k\pi}{2n} \Rightarrow \sin \frac{k\pi}{2n} = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{k\pi}{2}.$$

Dacă $k = \text{par} = 2p$, $p \in \mathbf{Z}$, atunci $\sin \frac{p\pi}{n} = 0$ sau $\frac{p\pi}{n} = l\pi$, unde p, $l \in \mathbf{Z}$ condiția este $\frac{k}{2}$ să se dividă cu n. Pentru $k = \text{impar}$, trebuie să avem $\sin \frac{k\pi}{2n} = \frac{1}{2}$.

$\frac{k\pi}{2n} = (-1)^m \frac{\pi}{6} + m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$, deci $k = \frac{n}{3}[(-1) + 6m]$, unde $n = (2p + 1)^3$, $p \in \mathbf{Z} \Rightarrow \{0\}$. Pentru $n = 3$ avem $x \in \{0, 5\pi/6, \pi, 2\pi, 13\pi/(6, 7\pi/6, 3\pi\}$.

5.122. Ecuația este $\sin 3x + \sin 2x = n \sin x$. sau $3 \sin x - 4 \sin^3 x + 2 \sin x \cos s - n \sin x = 0$, de unde $\sin x(3 - 4 + 4 \cos^2 x + 2 \cos x - n = 0$ și deci

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \text{ sau } 4 \cos^2 x + 2 \cos x - n - 1 = 0. \quad (1)$$

Ca rădăcinile ecuației (1) să fie reale, trebuie ca

$$\Delta = 4n + 5 \geqslant 0 \text{ adică } n \leqslant -5/4. \quad (2)$$

Rădăcinile ecuației (1) sînt: $\cos x = \dfrac{-1+\sqrt{4n+5}}{4}$, $\cos x = -\dfrac{-1-\sqrt{4n+5}}{4}$.

În condiția (2) inegalitatea din stînga este satisfăcută și ca să fie satisfăcută și cea din dreapta, trebuie să avem: $4n+5 \geqslant 25 \Rightarrow n \leqslant 5$.

Deci prima dă soluția pentru $n \in [-5/4, 5]$. Ca și a doua să dea soluții, trebuie ca $-1 \leqslant \dfrac{-1-\sqrt{4n+5}}{4} \leqslant 1$ sau $-3 \leqslant -\sqrt{4n+5} \leqslant 5$. Inegalitatea din dreapta în condiția (2) este satisfăcută și ca să fie satisfăcută și cea din stînga, trebuie ca $4n+5 \leqslant 9 \Rightarrow n \leqslant 1$, adică $n \in [-5/4, 1]$.

Ambele vor da soluții pentru $n \in [-5/4, 5] \cap [-5/4, 1] = [-5/4, 1]$.

Numai prima dă soluții, dacă $n \in [1, 5]$, iar dacă $n > 5$ nici una din ele nu dă soluții.

b) Avem $E(x) = \sin 3x + \dfrac{1-a^2}{2\sqrt{1+a^2}} \sin 2z$, iar din relația dintre x și a avem succesiv

$$1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{a}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + \frac{2}{a}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{a\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)} -$$

$$-\frac{2}{a}\cdot\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \text{ sau } 1-\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{a\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)} \text{ și cum } \frac{x}{2} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$$

putem simplifica cu $1 - \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} \neq 0$ și obținem $a = \operatorname{tg} x$.

Pe de altă parte, $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x = \sin x(3 - 4\sin^2 x)$ și cum $\sin x = \pm\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \dfrac{-a}{\sqrt{1+a^2}}$ deoarece $\sin x > 0$ și $a < 0$;

$$\sin 3x = -\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\left(3 - \frac{4a^2}{1+a^2}\right) = -\frac{a(3-a^2)}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}};$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = -\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}\left(-\sqrt{1-\frac{a^2}{1+a^2}}\right);$$

$\sin 2x = \dfrac{2a}{1+a^2}$, $\cos x < 0$ pentru că $x \in (\pi/2, \pi)$. Astfel că $E(x) =$

$$= -\frac{a(3-a^2)}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}} + \frac{1-a^2}{a\sqrt{1+a^2}}\cdot\frac{2a}{(1+a^2)} = -\frac{2a}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}}.$$

5.123. Ecuația se mai poate scrie

$$x^2 + 2x \sin(xy) + \sin^2(xy) + \cos^2(xy) = 0,$$

$$[x + \sin(xy)]^2 + \cos^2(xy) = 0,$$

de unde rezultă că: $x + \sin(xy) = 0$ și $\cos(xy) = 0$. Rezultă că $xy = k\pi + \pi/2$ și $x + \sin(k\pi/2) = 0$, $k \in \mathbf{Z}$. Pentru $k = 2n + 1$, atunci $x_1 = 1$ și pentru $k = 2n$, atunci $x_2 = -1$, de unde rezultă $y_1 \in \bigcup\{2n\pi + 3\pi/2\}$ și $y_2 \{\bigcup\} -(2n\pi + \pi/2)\}$, unde $n \in \mathbf{Z}$.

5.124. Ecuația dată se mai scrie
$(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x) = 0$ sau

$$1 - 3\sin^2 \cos^2 x = 0, \text{ deci } 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = a.$$

Știind că $\sin^2 2x \in [0, 1]$ rezultă $a \in [1/4, 1]$; $\sin^2 2x = \frac{4}{3}(1 - a)$ de unde $\sin 2x = \pm\sqrt{\frac{3}{4} \cdot (1 - a)}$, care implică $2x = \pm \arcsin\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{1 - a}\right) + k\pi$, sau $x \in \bigcup\left\{\pm\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{1 - a} + \frac{k\pi}{2}\right\}\right.$, $k \in \mathbf{Z}$, și $a \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$.

5.125. Ecuația $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$ se rezolvă prin substituția $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$ de unde $\cos x = \pm 1/2$, iar $\varphi = \pi/3$. Soluțiile ecuației sînt $x_1 = \pi/2$; $x_2 = 7\pi/6$. Pentru inecuație avem $x \in [0, \pi/2] \cup (7\pi/6, 2\pi]$ sau $x \in [0, 2\pi] - [\pi/2, 7\pi/6]$.

5.126. Se impune $1 + \cos x \neq 0$, $1 + \sin x \neq 0$ sau $x \neq (2k + 1)\pi$ și $x \neq 2k\pi + 3\pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$. Inecuația dată se mai scrie $\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant a$. Notăm $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Deci $t + \frac{1 + t}{1 - t} \leqslant a$ sau $\frac{t^2 - (a + 2)t + a - 1}{t - 1} \leqslant 0$.

1° Pentru $t > 1$ avem $t^2 - (a + 2)t + a - 1 \leqslant 0$, unde $t_1 < t_2$ $t \in [t_1, t_2]$ adică $x/2 \in \bigcup_{k \in Z}[k\pi + \operatorname{arctg} t_1; k\pi + \operatorname{arctg} t_2]$ și rezultă:

$$x \in \bigcup_{k \in Z}[2k\pi + 2\operatorname{arctg} t_1; 2k\pi + 2\operatorname{arctg} t_2] \cap \bigcup_{k \in Z}[2(k\pi + \pi/2, 2k\pi + \pi)$$

2° Pentru $t < 1$ avem $t^2 - (a + 2)t + a - 1 \geqslant 0$ sau $t \in (-\infty, t_1) \cup (t_2, +\infty)$ sau $x \in \bigcup_{k \in Z}\{2k\pi - \pi, 2\operatorname{arctg} t_1 + 2k\pi) \cup (2\operatorname{arctg} t_2 + 2k\pi + \pi)\}$

$\bigcap_{k \in Z}(2k\pi - \pi, 2k + \pi/2)$, $k \in \mathbf{Z}$, unde $t_1 < t_2$, $t_{1,2} = \frac{a + 2 \pm \sqrt{a^2 + 8}}{2}$

5.127. Inecuația se mai scrie $\frac{1 - \cos 2x}{2} + \sin 2x \geqslant a$. Notăm $t = \operatorname{tg} x$. Avem

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) + \frac{2t}{1 + t^2} \geqslant a \Rightarrow (a - 1)t^2 - 2t + a \leqslant 0. \qquad (1)$$

Dacă $a = 1$ obținem $2 \operatorname{tg} x \geqslant 1$, de unde $x \in \bigcup_{k \in Z} [k\pi + \operatorname{arctg} 1/2, k\pi + \pi/2)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Realizantul ecuației $(a-1)t^2 - 2t + 2 = 0$ este $\Delta = 1 - (a-1)a = -a^2 + a + 1$.

Dacă $a < 1$ și $\Delta \leqslant 0$ obținem $a \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ și $(a-1)t^2 - 2t + a \leqslant 0$, adică inegalitatea (1) are loc oricare ar fi x.

Dacă $a > 1$ și $(a-1)t^2 - 2t + a \leqslant 0$, atunci $a \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$ și inecuația dată nu poate avea loc pentru nici o valoare a lui x. Dacă $\Delta > 0$ adică $a \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, atunci pentru $a \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right)$ avem $(a-1)t^2 - 2t + a > 0$ și relația (1) nefiind îndeplinită nu avem soluții.

Pentru $a \in \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ relația (1) este îndeplinită și $t \in \left[\frac{1-\sqrt{-a^2+a+1}}{a-1}, \frac{1+\sqrt{-a^2+a+1}}{a-1}\right]$ adică $t \in [A, B]$ și $x \in \bigcup_{k \in Z} [\pi/2 + \operatorname{arctg} A, \pi/2 + \operatorname{arctg} B]$,

5.128. $\frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = -1$ sau $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = -1$ și $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = -2\sqrt{3}$

Sistemul este simetric față de x și y.

Notăm $\operatorname{tg} x = z$ și obținem $z^2 + 2\sqrt{3}z - 1 = 0$, de unde $\operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$ și $\operatorname{tg} y = -(2+\sqrt{3}) = \operatorname{tg}(-5\pi/12)$. Rezultă

x	$k\pi + \pi/12$	$k\pi - 5\pi/12$
y	$k\pi - 5\pi/12$	$k\pi + \pi/12$

, unde $k \in \mathbf{Z}$.

5.129. Se obține ecuația: $\cos \frac{x-y}{2}\left(3 \sin \frac{x+y}{2} - \cos \frac{x+y}{2}\right) = 0$.

Deci $\cos \frac{x-y}{2} = 0 \Rightarrow x - y = (2k+1)\pi$;

$$\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow x + y = 2k\pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

5.130. Avem $\frac{\cos x \sin y}{\sin x \cos y} = \frac{6}{5}$, de unde $\frac{\cos x \sin y - \sin x \cos y}{\cos x \sin y + \sin x \cos y} = \frac{6-5}{6+5} = \frac{1}{11}$ sau $\frac{\sin(y-x)}{\sin(x+x)} = \frac{1}{11} = \frac{2\sin(y-x)}{\sqrt{2}}$ de unde $\sin(y-x) = \sqrt{2}/22$, $\Rightarrow y - x = 3°41'8''$. Rezultă $x = 20°39'26''$ și $y = 24°20'34''$.

5.131. Rezultă $x,\ y = k\pi, \cos x = \pm 1, \cos y = \pm 1, k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ Cele două arce x și y situate pe cercul trigonometric au extremitățile la capetele diametrului orizontal AA', fie că sînt simetrice față de origine, fie că se confundă în A sau în A'.

5.132. Avem $\sin x \cos y = \cos x \sin y = \sin(x + y) = 0$; $\cos x \sin y - \sin x \cos y = \sin(y - x) = 1$. Rezultă sistemul $x + y = k_1\pi$; $y - x = 2k_2\pi + \pi/2$; $x \in \bigcup\{\pi(k_1/2 - k_2 - 1/4)\}$ și $y \in \bigcup\{\pi(k_1/2 + k_2 + 1/4)\}$, unde $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$.

5.133. Rezultă sistemul $\sin(x + y) = -1$; $\cos(x - y) = 1$, de unde $x + y = 2k_1\pi - \pi/2$ și $x - y = 2k_2\pi$, $k_{1,2} \in \mathbf{Z}$. Deci $x = (k_1 + k_2)\pi - \pi/4$ și $y = (k_1 - k_2)\pi - \pi/4$, sau $x \in \bigcup\{m\pi - \pi/4\}$ și $y \in \bigcup\{n\pi - \pi/4\}$, unde $m, n \in \mathbf{Z}$.

5.134. $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x + y) = \cos(x - y)] = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$. Ținînd seama de relația $\cos(x + y) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ obținem $\cos(x - y) = 1/2$, deci $x - y = 2k\pi \pm \pi/3$, $k \in \mathbf{Z}$.

Răspuns: $x_1 \in \bigcup\{k\pi + \pi/4\}$; $y_1 \in \bigcup\{-\pi/12 - k\pi\}$ și $x_2 \in \bigcup\{-\pi/12 - k\pi\}$ și $y_2 \in \bigcup\{\pi/4 - k\pi\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.135. Sistemul se mai scrie $\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 2y}{2} = \frac{1}{2}$ sau $\cos 2y - \cos 2x = -1$ și $x + y = \pi/4$ sau $2\sin(x + y)(\sin x - y) = -1$; $x + y = \pi/4$, sau $\sin(x - y) = -1/\sqrt{2}$; $x + y = \pi/4$, de unde $x - y = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} = k\pi$; $x + y = \frac{\pi}{4}$. Deci

$$x \in \bigcup\left\{\frac{k\pi}{2} + [1 + (-1)^{k+1}]\frac{\pi}{8}\right\}; y \in \bigcup\left\{-\frac{k\pi}{2} + [1 + (-1)^k]\frac{\pi}{8}\right\},\ k \in \mathbf{Z}.$$

5.136. Avem $\cos x = 2 - 3\cos y$, de unde obținem $\sin^2 x = 25\sin^2 y$ și $\cos x = 2 - 3\cos y$ sau $1 - \cos^2 x = 25(1 - \cos^2 y)$, $\cos x = 2 - 3\cos y$, $1 - (2 - 3\cos y)^2 = 25 - 25\cos^2 y \Rightarrow 1 - 4 + 9\cos^2 y + 12\cos y = 25 - 25\cos^2 y$ sau $16\cos^2 y + 12\cos y - 28 = 0$, de unde $\cos x = 1$, $y = 2k\pi$; $\cos y = -7/4$ (nu convine); $\cos x = -1$; $x = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

5.137. Avem $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{3}{4\cos x \cos y} = 3$, deci $\cos x \cos y = 1/4$. Obținem sistemul $\sin x \sin y = 3/4$, $\cos x \cos y = 1/4$, de unde $\cos(x - y) = 1$, $\cos(x + y) = -1/2$, deci $x - y = 2n\pi$; $x + y = (2m + 1)\pi \pm \pi/3$ și rezultă $x \in \bigcup\{(n - m)\pi \pm \pi/3\}$, $y \in \bigcup\{(n - m)\pi \pm \pm \pi/3\}$, $n, m \in \mathbf{Z}$.

5.138. Avem $\sin y = \frac{-\cos^2 x}{3\sin x}$, unde $\sin x \neq 0$ și $2\cos^2 2x + 25\cos 2x - 13 = 0$ de unde $\cos 2x = 1/2$ și $\cos 2y = 1/2$. Deci $x \in \bigcup\{k_1\pi \pm \pi/6\}$, $y \in \bigcup\{k_2 \pm \pi/6\}$, $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$.

5.139. Ecuația a doua se mai scrie $\frac{\sin x \cos y}{\cos x \sin y} = -3$ sau

$\frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\sin x \cos y + \cos x \sin y} = \frac{-3-1}{-3+1} = 2$, de unde $\frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)} = 2$,

dar $\sin \frac{7\pi}{6} = \sin(x+y) = -1/2$. Rezultă $\sin(x-y) = -1$ deci $x - y = -\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Deci $x \in \bigcup\{\pi/3 + k\pi\}$, $y \in \bigcup\{5\pi/6 - k\pi\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.140. Notăm $\sin x = z_1$ și $\sin y = z_2$. Rădăcinile ecuației $(a-1)z^2 - 2(a-2)z + a - 3 = 0$ sînt z_1 și z_2. Avem $z_1 = 1 = \sin x$ și $z_2 = \frac{a-3}{a-1}$ cu condiția $-1 \leqslant \frac{a-3}{a-1} \leqslant 1 \Rightarrow a \geqslant 2$. Pentru $a \geqslant 2$, avem

$$x_1 \in \bigcup\left\{2\pi k + \frac{\pi}{2}\right\} \text{ și } y_1 \in \bigcup\left\{(-1)^n \arcsin\frac{a-3}{a-1} + n\pi\right\};\ k, n \in \mathbf{Z};$$

$$x_2 \in \bigcup\left\{(-1)^n \arcsin\frac{a-3}{a-1} + n\pi\right\} \text{ și } y_2 \in \bigcup\left\{2k\pi + \frac{\pi}{2}\right\},\ k, n \in \mathbf{Z}.$$

5.141. a) Prima ecuație se scrie

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{a+b}{a-b} \text{ sau } \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{\sin(x+y) + \sin(x-y)} = \frac{b}{a}.$$

Efectuînd calculele se obține $\frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x} = \frac{a}{b}$; $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = ab$, de unde

$$\begin{matrix}\operatorname{tg} y = \pm b \\ \operatorname{tg} x = \pm a\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \bigcup\{k_1\pi \pm \operatorname{tg} a\}; \\ y \in \bigcup\{k_2\pi \pm \operatorname{tg} b\},\ k_1, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

b) Pentru $a = -1$ și $b = \sqrt{3}$, soluțiile sistemului sînt

$$x \in \bigcup\{k_1\pi \pm \pi/4\},\ k_1 \in \mathbf{Z}; \qquad y \in \bigcup\{k_2\pi \pm \pi/3\},\ k_2 \in \mathbf{Z}.$$

5.142. Sistemul se mai poate scrie:

$$\sin x + \sin y = 2 - \frac{3}{a+1};\ \sin x \cos y = 1 - \frac{3}{a+1}.$$

Deci $\sin x$ și $\cos y$ sînt soluțiile cuprinse în intervalul $[-1, 1]$ ale ecuației în Z^m; $z^2 - \left(2 - \frac{3}{a+1}\right)z + 1 - \frac{3}{a+1} = 0$, care se mai scrie:

$$(a+1)z^2 - (2a-1)z + (a-2) = 0.$$

$\Delta = 4a^2 + 1 - 4a - 4a^2 + 4a + 8 = 9 > 0$, soluțiile sînt reale: $z_{1,2} = \frac{2a-1\pm 3}{2(a+1)}$ sau $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{a-2}{a+1}$.

unde $z_2 \in [-1, 1]$ adică $\frac{a-2}{a+1} + 1 \geqslant 0$ și $\frac{a-2}{a+1} - 1 \leqslant 0$, sau $\frac{2a-1}{a+1} \geqslant 0$ și $\frac{-3}{a+1} \leqslant 0$, de unde rezultă $a \geqslant \frac{1}{2}$.

1° Pentru $\sin x = 1$ avem $\cos y = \frac{a-2}{a+1}$, $a \geqslant \frac{1}{2}$, de unde $x \in$

$\in \bigcup \left\{2k_1\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$, $k_1 \in \mathbf{Z}$; $y \in \bigcup \left\{\pm \arccos \frac{a-2}{a+2} + 2k_2\pi\right\}$, $k_2 \in \mathbf{Z}$, $a \geqslant \frac{1}{2}$.

2°. Pentru $\cos y = 1$ avem $\sin x = \frac{a-2}{a+1}$, adică $y \in \bigcup\{2m\pi\}, m \in \mathbf{Z}$

și $x \in \bigcup \left\{(-1)^n \arcsin \frac{a-2}{a+1} + n\pi\right\}$, $n \in \mathbf{Z}$ și $a \geqslant \frac{1}{2}$.

5.143. $\sin y = -\operatorname{tg} x \Rightarrow \sin^2 y = \operatorname{tg}^2 x$, dar rezultatele trebuie la sfîrșit verificate pentru a elimina soluțiile introduse care nu convin. Avem sistemul:

$(1 - \cos x)(1 - 2\sin^2 y) - \sin x \operatorname{tg} x + 1 = 0$; $\sin^2 y = \operatorname{tg}^2 x$, deci

$(1 - \cos x)(1 - 2\operatorname{tg}^2 x) - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = 0$, de unde $(\cos x - 2)(2\cos^2 x -$

$- 1 = 0$, obținem deci numai $\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, adică $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$\sin y = -\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}\left(k\pi \pm \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1,$$

de unde $y = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$. Se verifică și se obțin soluțiile:

x	$2k\pi + \frac{\pi}{4}$	$2k\pi + \frac{5\pi}{4}$
y	$2k\pi - \frac{\pi}{2}$	$2k\pi - \frac{\pi}{2}$

$k \in \mathbf{Z}$.

5.144. Din prima ecuație obținem $\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 2y} = \frac{3}{4}$, iar din a doua

$$\sin(2x - y) + \sin y = \sin y \Rightarrow \sin(2x - y) = 0, \sin y \neq 0.$$

$$2x - y = -k\pi, \; y \in \bigcup \{k\pi + 2x\}, k \in \mathbf{Z}$$

$\operatorname{tg} 2y = \operatorname{tg}(2k\pi + 4x) = \operatorname{tg} 4x$, astfel că ecuația întîi se mai scrie

$\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 4x} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} 4x - \operatorname{tg} 3x} = \frac{7}{1}$; de unde $\frac{\sin 7x}{\sin x} = 7$ și

$\frac{\sin 7x - \sin x}{\sin x} = 6$; $\frac{2\sin 3x \cos 4x}{\sin x} = 6 \Rightarrow (3 - 4\sin^2 x)\cos 4x = 3$ sau

$$\left(3 - 4 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2}\right)(2\cos^2 2x - 1) = 3 \text{ sau}$$

$(\cos 2x - 1)(2\cos^2 2x + 3\cos 2x + 2) = 0$.

$\cos 2x = 1$; $x_1 = k\pi$, $\cos 2x = \dfrac{-3 \pm j\sqrt{7}}{4}$, nu convine.

Rezultă $x \in \bigcup \{k\pi\}$ și $y \in \bigcup \{(2k+1)\pi\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.145. Prima ecuație se poate scrie succesiv:

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{\sin \dfrac{\pi + B}{3} + \sin \dfrac{\pi + C}{3}}{\sin \dfrac{\pi + B}{3} - \sin \dfrac{\pi + C}{3}} \quad \text{sau}$$

$$\frac{2 \sin \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}}{2 \cos \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}} = \frac{2 \sin \left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{B+C}{6} \right) \cos \dfrac{B-C}{6}}{2 \cos \left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{B+C}{6} \right) \operatorname{ctg} \dfrac{B-C}{6}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{B+C}{6} \right) \operatorname{ctg} \frac{B-C}{6}. \qquad (1)$$

Deoarece $A + B + C = \pi$ și $\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A}{6}$ (din enunț) $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{B+C}{6} =$

$= \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{B}{6}$. Din ecuația (1) rămîne $\operatorname{ctg} \dfrac{x-y}{2} = \operatorname{ctg} \dfrac{B-C}{6}$ sau $\dfrac{x-y}{2} =$

$= \dfrac{B-C}{6} + k\pi$. $k \in \mathbf{Z}$.

Obținem: $3x - 3y = B - C + 6k\pi$, $3x + 3y = 3\pi - A$.

Rezultă $6x = 3\pi - A - C + 6k\pi$ sau $x \in \bigcup \left\{ \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A + C - B}{6} + k_1\pi \right\}$ și

$y \in \bigcup \left\{ \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A + B - C}{6} + k_2\pi \right\}$, $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$. Pentru $k_1 = k_2 = 0$ avem $x =$

$= \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A + C - B}{6} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{B}{3} = \dfrac{\pi - B}{3}$ și $y = \dfrac{\pi - C}{3}$.

Numere complexe sub formă trigonometrică. Ecuații binome. Aplicații. Diverse

PROBLEME

ENUNȚURI

6.1. Să se determine unghiul x pentru care exprssia $E = (\cos x - \mathrm{i} \sin x)\cdot(\cos 5x + \mathrm{i} \sin 5x)$ are valoare reală, unde $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

(Universitatea din Tokio, 1964)

6.2. Să se rezolve ecuația $(1/x + x)^4 + (1/x - x)^4 = 8$. (*C. Ionescu-Țiu*)

6.3. Să se pună sub formă trigonometrică rădăcinile ecuației $z^3 = 1 - i$.

(Institutul Politehnic, București)

6.4. Se notează $\cos a + \mathrm{i} \sin a = x$; $\cos b + \mathrm{i} \sin b = y$, unde $a, b \in \mathbf{R}$; $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

1) Să se exprime în funcție de a și b expresiile $A = (xy + 1/xy)^2$; $B = (x/y + y/x)^2$; $C = (x + 1/x)^2$; $D = (y + 1/y)^2$.

2) Să se arate că $B + C + D - A = 4(\cos^2 a + \cos^2 b + \sin 2a \sin 2b)$.

(G.M.B., 15510, *C.I.-Ț.*)

6.5. Să se arate, fără tabele, că $\dfrac{1}{\cos^2 10^\circ} + \dfrac{1}{\sin^2 20^\circ} + \dfrac{1}{\sin^2 40^\circ} = 12$.

(*C.I.-Ț.*)

6.6. Să se arate că $\dfrac{\cos a + \mathrm{i} \sin a}{\sin a + \mathrm{i} \cos a} + \dfrac{\cos a - \mathrm{i} \sin a}{\sin a - \mathrm{i} \cos a} = 2 \sin 2a$, unde $\mathrm{i}^2 = -1$. (N. 6, 2950, *C.I.-Ț.*) 1937)

6.7. Să se rezolve ecuația $\left(\dfrac{1 + x\mathrm{i}}{1 - x\mathrm{i}}\right)^n = \dfrac{1 + \mathrm{i} \operatorname{tg} a}{1 - \mathrm{i} \operatorname{tg} a}$, $n \in \mathbf{N}$.

6.8. Se consideră ecuația $x^2 - x\sqrt{2} + 1 = 0$ cu rădăcinile x_1 și x_2. Să se arate că: $E = \dfrac{x_1^{1971} + x_2^{1971}}{x_1^{1977} + x_2^{1977}} = -1$. (G.M.B., 12 365, *C.I.-Ț.*)

6.9. Să se arate că:

$2 \cos (n \arccos x) = (x + \mathrm{i}\sqrt{1 - x^2})^n + (x - \mathrm{i}\sqrt{1 - x^2})^n$

$\cos (n\alpha + \alpha) + \cos (n\alpha - \alpha) = 2 \cos \alpha \cos n\alpha$.

Caz particular $n = 6$.

6.10. Să se arate fără tabele că:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{13}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi}{13}\cdot\operatorname{tg}\frac{3\pi}{13}\cdot\operatorname{tg}\frac{4\pi}{13}\cdot\operatorname{tg}\frac{5\pi}{13}\cdot\operatorname{tg}\frac{6\pi}{13}=\sqrt{13}.$$

Generalizare. (Pitagora, S. 150, *C.I.-Ţ.*)

6.11. Să se rezolve ecuaţia $(x+\mathrm{i})^n+(x-\mathrm{i})^n=0$, $n\in\mathbf{N}$.

6.12. Să se arate că $\sin 5x=16\sin^5 x-20\sin^3 x+5\sin x$, apoi să se arate că ecuaţia $16y^4-20y^2+5=0$ admite rădăcinile: $\pm\sin\frac{\pi}{5}$ şi $\pm\sin\frac{2\pi}{5}$ şi că $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$; $\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$. (*C.I.-Ţ.*

6.13. Să se arate că ecuaţia $(x+\sqrt{x^2-1})^{60}+(x-\sqrt{x^2-1})^{60}=1$ admite rădăcinile $\pm\sin k°$, $\pm\cos k°$, unde k este un întreg cuprins între 0° şi 45° fără a fi divizibil nici cu 2 nici cu 3. (G.M.B., 13 660, *C.I.-Ţ.*)

6.14. Să se scrie sub formă trigonometrică numerele complexse $z_1=1+\mathrm{i}$ şi $z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}$. Apoi folosind formula lui *Moivre*, să se scrie numărul complex $z=\frac{(1+\mathrm{i})^8}{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^3}$ sub formă trigonometrică.

6.15. Să se rezolve ecuaţia $(x\mathrm{i}+\sqrt{1-x^2})^6+(x\mathrm{i}-\sqrt{1-x^2})^6+1=0$, unde $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$. (G.M.B., 13 592, *C.I.-Ţ.*)

6.16. Să se arate că rădăcinile ecuaţiei $x^4+1=0$ satisfac relaţia $x_1^n+x_2^n+x_3^n+x_4^n=(-1)^n 4\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{4}$, $n\in\mathbf{N}$. (G.M.B., 13 401, *C.I.-Ţ.*)

6.17. Să se rezolve ecuaţia $(x+1)^m-(x-1)^m=0$; $m\in\mathbf{N}$.

6.18. Să se găsească toate numerele complexe care satisfac ecuaţia: $\bar{z}=z^{n-1}$, unde prin $\bar{z}$ am notat conjugatul lui z.

6.19. Să se calculeze sumele:

$$S_1=\cos x\cos x+\cos^2 x\cos 2x+\cos^3 x\cos 3x+\ldots+\cos^n x\cos nx,$$

$$S_2=\cos x\sin x+\cos^2 x\sin 2x+\cos^3 x\sin 3x+\ldots+\cos^n+x\sin nx$$

6.20. Să se calculeze $z^{1978}+\frac{1}{z^{1978}}$ ştiind că $z+\frac{1}{\bar{z}}=1$.

(*C.I.-Ţ.*)

1.26. Notăm $\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=A$,

$\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=B$ fiind în total cîte şase radicali suprapuşi. Să se arate că $(A+B\mathrm{i})^{16}=2^{14}(1+\mathrm{i})(\sqrt{3}-\mathrm{i})$; $(A+B\mathrm{i})^{192}+2^{192}=0$. (G.M.B.7817, *C.I.-Ţ*

6.22. a) Să se scrie sub formă trigonometrică $1 + i$ și $1 - i$.

b) Să se determine modulul și argumentul numerelor complexe: $\frac{(1+i)^4}{1-i}$ și $\frac{(1-i)^4}{1+i}$.

6.23. Să se arate că $\cos^2 10^0 + \sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ - \cos^2 45^\circ = 1$.

(Baraj elevi 1969, *C.I.-T.*)

6.24. Să se arate că $\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \sqrt[4]{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$. (G.M.B., 13425 *C.I.-T.*)

6.25. Să se arate că dacă $x = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, atunci

$$(ax + bx^2)(yx^2 + bx) = a^2 - ab + b^2.$$

6.26. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^4 - 2z^2\cos 2a + 1 = 0$.

6.27. Să se arate că dacă $x = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, atunci

$$E = (ax + b + c)(a + bx + cx)^2(a + bx^2 + cx) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

6.28. Să se arate că dacă x, y, z, verifică relațiile

$$\sin x + \sin y + \sin z = 0 \text{ și } \cos x + \cos y + \cos z = 0 \quad (1)$$

atunci ele verifică și relațiile:

$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0 \text{ și } \cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0. \quad (2)$$

6.29. Să se arate că $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$; $i = \sqrt{-1}$.

6.30. Să se arate că $(\sqrt{3} - i)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} - i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$, $i = \sqrt{-1}$.

6.31. Să se rezolve ecuația $x^{10} + x^9 + x^8 + \ldots + x^2 + x + 1 = 0$.

6.32. Scriind expresia $(-1 + i\sqrt{3})^n$ sub formă trigonometrică și dezvoltînd după binomul lui *Newton* și apoi aplicînd formula lui Moivre să se calculeze suma $S = C_n^1 - 3C_n^3 + 3^2C_n^5 - 3^3C_n^7 + \ldots$

6.33. Se consideră sumele:

$S_1(x) = \cos x + C_n^1\cos 2x + \ldots + C_n^n\cos(n+1)x$,

$S_2(x) = \sin x + C_n^1\sin 2x + \ldots + C_n^n\sin(n+1)x$

unde $n \in \mathbf{N}$ și $x \in \mathbf{R}$.

a) Să se scrie sub formă trigonometrică numărul complex $S_1(x) + iS_2(x)$

b) Să se rezolve ecuațiile $S_1(x) = 0$ și $S_2(x) = 0$.

(Facultatea de Matematică, Informatică, Cluj-Napoca, 1978)

6.34. Să se arate că:

$$S_1 = 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots = \sqrt{2^n}\cos\frac{n\pi}{4},$$

$$S_2 = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots = \sqrt{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}.$$

6.35. Să se arate că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem:

$$\sin^6 x = -\frac{1}{32}(\cos 6x - 6\cos 4x + 15\cos 2x - 10).$$

$$\sin^7 x = -\frac{1}{64}(\sin 7x - 7\sin 5x + 21\sin 3x - 35\sin x),$$

$$\cos^6 x = \frac{1}{32}(\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10),$$

$$\cos^7 x = \frac{1}{64}(\cos 7x + 7\cos 5x + 21\cos 3x + 35\cos x).$$

6.36. Să se calculeze $\sum_{k=0}^{10} \sin\frac{k\pi}{20} + \sum_{k=0}^{10} \cos\frac{k\pi}{20}$.

6.37. Fie ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, unde a, b, c sînt numere complexe și sînt îndeplinite condițiile $\arg(a) + \arg(c) = 2\arg(b)$; arg (argument) și $|a| + |c| = |b|$, unde $|a|$ exte modulul numărului complex a. Să se arate că cel puțin o rădăcină a ecuației are modulul unu.

(G.M.B., 13 104, *L. Panaitopol*)

6.38. Să se arate că:

a) $\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \sin\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) \ldots \sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{n}\right) = c_n \sin nx$,

unde c_n este o constantă pe care o veți determina.

b) $\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \ldots \sin\frac{(n-1)}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$, unde $n \in \mathbf{N}$ și $n > 2$.

(Matematika v škole, 1968)

6.39. Notînd cu l_n, a_n, S_n, respectiv latura, apotema și aria poligonului regulat cu n laturi, înscris în cercul de rază R, să se arate că

$$2S_{50}(l_{15}^4 + 16a_{25}^4 - l_{25}^2R^2 + 4a_{25}^2R_2 - 10R^4) = 25R^6\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

(G.M.B., 8 782, *C. Băluță*)

6.40. Să se rezolve ecuația $4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} = 8$.

(Admitere în treapta a II-a, Vaslui, 1978)

6.41. Se dă polinomul $P(x) = x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 1$.

a) Să se rezolve inecuația $P(x) \geqslant 0$.

b) Știind că $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ să se arate că rădăcinile ecuației $P(x) = 0$ sînt $\operatorname{tg}\frac{k\pi}{20}$, unde $k = 1, 9, 13, 17$.

c) Să se arate fără tabele că $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ apoi să se arate că $\sin\frac{\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{5} - \frac{1}{2}$.

(G.M.B., 12 338, *C.I.-T.*)

6.42. Diagonalele unui paralelipiped fac cu cele trei muchii care pleacă din același vîrf unghiurile x, y, z.

Să se arate că

a) $3(\sin^2 2x + \sin^2 2y + \sin^2 2z) \leqslant 8$,

b) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{tg}^2 z \geqslant 6$,

c) $3(\cos^2 2x + \cos^2 2y + \cos^2 2z) \geqslant 1$,

d) $3(\cos 4x + \cos 4y + \cos 4z) + 7 \geqslant 0$. (G.M.B., 11 217, *C.I.-Ţ.*)

6.43. Dacă $x^3 + ax^2 + bx + a \equiv (x - \operatorname{tg} A)(x - \operatorname{tg} B)(x - \operatorname{tg} C)$, unde $b \neq 1$ să se arate că $S = \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C$ nu depinde de a.

b) Dacă A, B, C sînt unghiurile unui triunghi ascuțitunghic, atunci sînt necesare și condițiile $a < 0$, $b > 1$ și $a^2 \geqslant 27$.

(Concurs elevi, 1970, *C.I.-Ţ.*)

6.44. Fie $\operatorname{tg} \alpha = p/q$, p și q întregi, $q \neq 0$. Să se arate că toate numerele $\operatorname{tg} \beta$, pentru care avem $\operatorname{tg} 2\beta = \operatorname{tg} 3\alpha$ sînt numere raționale în cazul că $p^2 + q^2$ este pătratul perfect al unui număr întreg diferit de zero.

6.45. Să se rezolve ecuația în x: $\log_{\sec a}(1 + x) = \log_{\operatorname{tg} a} x$, unde $a \in (0, \pi/4) \cup (\pi/4, \pi/2)$. (G.M. ., 12 715 *C.I.-Ţ.*)

6.46. Să se rezolve ecuația $\log_{\sec x} 13{,}25 = \log_{\operatorname{tg} x} 12{,}25$, unde $x \in (0, \pi/2)$.

(G.M.B, 13 102, *C.I.-Ţ.*)

6.47. Știind că $f\left(\dfrac{2 \sin x}{1 + \sin^2 x}\right) = g(\sin x)$, $x \in \mathbf{R}$, să se afle mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $g\left(\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right) = f(\sin x)$.

(G.M..,8 377, *C.I.-Ţ.*)

6.48. Să se arate că dacă numitorii sînt diferiți de zero, și $\dfrac{\sin(a + b)}{\sin(a - b)} = \dfrac{\sin(c + d)}{\sin(c - d)}$, atunci mai există și relația $\dfrac{\cos(a + d)}{\cos(a - d)} = \dfrac{\cos(b + c)}{\cos(b - c)}$.

6.49. Să se arate că dacă: $\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b = \operatorname{tg}^2 c$, atunci avem și $\dfrac{\sin^2(a + c)}{\sin^2(b + c)} = \dfrac{\sin 2a}{\sin 2b}$, $(a \neq b \neq c \neq 0)$.

6.50. Să se rezolve inecuația $\arcsin \lg x > 0$.

6.51. Dacă suma a n arce variabile pozitive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ este constantă și mai mică decît $\pi/2$, $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a < \pi/2)$, produsul $P = \operatorname{tg} x_1 \cdot \operatorname{tg} x_2 \ldots \operatorname{tg} x_n$ este maxim cînd arcele sînt egale, $x_1 = x_2 = \ldots x_n$.

6.52. Să se arate că dacă $a \in \left[\arccos \dfrac{4}{5}, \dfrac{\pi}{2} + \arccos \dfrac{4}{5}\right]$, atunci:

$$3\sqrt{5 + \cos a - 4 \sin a} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{5 - 4 \cos a - 3 \sin a} = 5\sqrt{1 + \cos a}.$$

$$3\sqrt{5 + 3 \sin a - 4 \cos a} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{5 - 4 \sin a + 3 \cos a} = 7\sqrt{1 + \sin a}.$$

(G.M.B., 15 263, *C.I.-Ţ.*)

6.53. Să se arate că într-un patrulater $ABCD$ circumscris unui cerc există relațiile:

a) $\cos^2 \dfrac{A}{2} + \cos \dfrac{C}{2} \cos\left(D + \dfrac{C}{2}\right) = \cos^2 \dfrac{D}{2} + \cos \dfrac{B}{2} \cos\left(A + \dfrac{B}{2}\right)$

b) Dacă $E = AB \cap DC$, iar $\sphericalangle BEC = \sphericalangle E$, atunci $\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B-E}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos\frac{C-E}{2} = \cos\frac{E}{2}$. (G.M.B., 16 538, *C.I.-Ţ.*)

6.54. Să se arate că dacă a_1, a_2, a_3 sînt rădăcinile ecuaţiei $a^3 - 3a^2 - 3a + 1 = 0$, atunci cele trei ecuaţii de forma $x^3 - 3a\,x^2 - 3x + a_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ admit următoarele 9 rădăcini: tg 5°, ctg 5°, —tg 15°, —ctg 15°, tg 25°, ctg 25°, —tg 35°, —ctg 35°, tg 45°; iar suma acestor rădăcini este egală cu 9. (G.M.B., 1977, *C.I.-Ţ.*)

6.55. Să se arate că dacă $0 < \alpha < \pi/4(n-1)$, atunci $\operatorname{tg} n\alpha > n \operatorname{tg}\alpha$, $n \in \mathbf{N}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $n > 1$.

6.56. Să se calculeze valoarea expresiei $E = (1 - \cos a)\cdot S_n$, unde $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, $S_n = 1 + 2\cos a + 3\cos^2 a + \ldots + n\cos^{n-1} a$. (R.M.T., 252, *A. Rotea*)

6.57. Să se rezolve ecuaţia $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2$.

6.58. Să se rezolve inecuaţia $\log_{2\sin x}\sqrt{\cos 2x} \leq 1/2$, pentru $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

6.59. Să se rezolve ecuaţia $3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(1 - \cos 2x) = 2$.

6.60. Să se determine valorile lui m pentru care ecuaţia $\sqrt{1-\cos 2x} + \sqrt{1+\cos 2x} = m$ admite soluţii în intervalul $I = [0, \pi]$. Pentru $m = \sqrt{2}$ să se determine soluţiile acestei ecuaţii care se găsesc în intervaiul I.

6.61. Să se demonstreze că:

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3n} + \operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3n} + \operatorname{ctg}\frac{7\pi}{3n} + \ldots + \operatorname{ctg}\frac{(3n-2)\pi}{3n} = n\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}.$$

6.62. Să se rezolve inecuaţia $\lg \sin x \leqslant 0$.

6.63. Să se arate că $32 \sin 10° \cdot \sin 18° \cdot \cos 20° \cdot \cos 36° \cdot \cos 40° = 1$. (*C.I.-Ţ.*)

6.64. a) Să se arate că ecuaţia $8x^3 \cdot 6x - 1 = 0$ admite rădăcinile: — sin 10°, cos 20° şi — cos 40°.

b) Să se deducă egalităţile:

$\cos^2 20° + \cos^2 40° + \cos^2 80° = 1{,}5$; $\cos^3 20° - \cos^3 40° - \cos^3 80° = 0{,}375$. (*C.I.-Ţ.*)

6.65. Ecuaţia $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, cu $a, b, c \in \mathbf{R}$, admite rădăcinile $\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta, \operatorname{tg}\gamma$. Să se afle, în funcţie de a, b, c, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$; $\cos(2\alpha + 2\beta + 2\gamma)$, $\sin(2\alpha + 2\beta + 2\gamma)$.

6.66. a) Să se arate că ecuaţiile: $8\cos x \cos 2x \cos 4x = 1$ şi $128\cos^7 x - 192\cos^5 x + 8\cos^3 x - 8\cos x - 1 = 0$ sînt echivalente.

b) Să se arate că dacă notăm $2\cos x = y$, obţinem ecuaţia:

$$(y-1)(y^6 + y^5 - 5y^4 - 5y^3 + 5y^2 + 5y + 1) = 0.$$

c) Să se deducă relaţiile:

$$2\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9}\right) = -1.$$

$$64\cos^2\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{5\pi}{9}\cdot\cos\frac{7\pi}{9} = 1$$

$$\cos^2\frac{\pi}{9}+\cos^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{18}+\sin^2\frac{\pi}{14}+\cos^2\frac{2\pi}{9}+\cos^2\frac{2\pi}{9}+\cos^2\frac{2\pi}{7}=\frac{11}{4}\cdot$$

(C. Ionescu-Ţiu)

6.67. a) Să se arate că dacă $16\cos x\cos 2x\cos 3x\cos 4x=1$ şi $y=4\cos^2 x$, atunci

$$y^5-9y^4+28y^3-24y^3+3y-1=0 \tag{1}$$

b) Rezolvînd ecuaţia (1) precedentă să se arate că

$$4(\sin^2 10^0+\sin^2 18^\circ+\cos^2 20^\circ+\cos^2 36^\circ+\cos^2 40^\circ)=0. \tag{2}$$

c) Să se arate că valorile lui x cuprinse în intervalul $(0°, 360°)$ care verifică ecuaţia $16\cos x\cos 2x\cos 3x\cos 4x=1$ sînt: 20°, 36°, 40°, 72°, 80°, 200°, 216°, 220°, 252°, 260°.

d) Să se deducă relaţia $32\sin 10^\circ\cdot\sin 18^\circ\cdot\cos 20^\circ\cdot\cos 36^\circ\cdot\cos 40^\circ=1$.

(C. Ionescu-Ţiu)

6.68. Să se rezolve şi să se discute natura rădăcinilor ecuaţiei: $x^4-2\sqrt{2}\,x^2+2-2\operatorname{tg}^2 a=0$, unde $a\in\mathbf{R}$. *Discuţie.* (G.M.B., 14 090)

C. Ionescu-Ţiu)

6.69. a) Să se arate că ecuaţia $3x^3-2\sqrt{3}x^2-9x+\sqrt{3}=0$ admite rădăcinile $x_1=\operatorname{tg}10^\circ$, $x_2=\operatorname{ctg}20^\circ$ şi $x_3=-\operatorname{ctg}40^\circ$.

b) $\operatorname{tg}10^\circ+\operatorname{ctg}20^\circ+\operatorname{ctg}30^\circ+\operatorname{ctg}40^\circ$; $\operatorname{tg}10^\circ\cdot\operatorname{ctg}20^\circ\cdot\operatorname{ctg}40^\circ=\operatorname{tg}30^\circ$.

(C. Ionescu-Ţiu)

5.70. Să se afle mulţimea valorilor reale ale parametrului m pentru care ecuaţia $(m+1)\cos^2 x+m\cos x+m-1=0$ are rădăcinile reale.

(C. Ionescu-Ţiu)

6.71. Să se arate că oricare ar fi m real şi $x>0$, $y>0$, $x+y<180^\circ$, există relaţia $m(m-1)\sin(x+y)+m(\sin x-\sin y)+\sin y>0$.

(C. Ionescu-Ţiu)

6.72. Să se arate că dacă $a\in\left[\arcsin\frac{3}{5},\ \frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{3}{5}\right]$, atunci

$$3\sqrt{5+4\sin a-3\cos a}-2\sqrt{2}\sqrt{5-3\sin a-4\cos a}=5\sqrt{1+\cos a}.$$

(C. Ionescu-Ţiu)

6.73. Să se afle valorile lui x pentru care

$$3\sqrt{5-4\cos x\,3\sin x}+2\sqrt{2}\sqrt{5+3\cos x-4\sin x}=5\sqrt{1+\sin x}.$$

(C. Ionescu-Ţiu)

6.74. Fie patru puncte din spaţiu A, B, C, D, iar G_a, G_b, G_c, G_d, centrele de greutate ale triunghiurilor BAC, ACD, ABD, ABC. Notăm cu M mijlocul segmentului care uneşte mijloacele segmentelor $|AB|$ şi $|CD|$.

a) Să se arate că $\mathbf{AB}+\mathbf{AC}+\mathbf{AD}=4\mathbf{AM}$ şi analoagele; $\mathbf{MG}_a+\mathbf{MG}_b+\mathbf{MG}_c+\mathbf{MG}_d=0$.

b) Cunoscînd lungimile $\|AB\|=b$, $\|AC\|=c$, $\|AD\|=c$, $\|AD\|=d$, $\sphericalangle DAC=\beta$, $\sphericalangle BAD=\gamma$, $\sphericalangle BAC=\delta$, să se calculeze lungimea $|AM|$ şi $\cos BAM$, $\cos CAM$, $\cos DAM$. *(C. Ionescu-Ţiu)*

6.1. $E = [\cos(2\pi - x) + i\sin(2\pi - x)](\cos 5x + i\sin 5x) = \cos(2\pi + 4x) + i\sin(2\pi + 4x)$, $\sin(2\pi + 4x) = \sin 4x = 0$;

$x = k\frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$ sau $x \in \frac{\pi\mathbf{Z}}{4}$.

6.2. Dezvoltînd obținem ecuația $x^4 + 1/x^4 = -2$. Notăm $x^4 = y$ deci avem $y + 1/y = -2$, $y^2 + 2y + 1 = 0$, $y_{2,1} = -1$; deci $x^4 = -1$; $\sqrt[4]{-1} = \cos\frac{2k+1}{4}\cdot\pi + i\sin\frac{2k+1}{4}\cdot\pi$, $k = 0, 1, 2, 3$. Rezultă:

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i);$$

$$x_2 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i);$$

$$x_3 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i);$$

$$x_4 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i).$$

Rădăcinile distincte sînt date de $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$ semnele + și − se pot lua în orice fel.

6.3. Notînd $u = 1 - i$ găsim $|u| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Apoi, din $\cos(\arg u) = 1/\sqrt{2}$, și $\sin(\arg u) = -1/\sqrt{2}$ deducem $\arg u = -\pi/4$. De aceea forma trigonometrică a numărului u este $u = \sqrt{2}[(\cos(-\pi/4 + i\sin(-\pi/4)]$. Cu acestea, din $z = \sqrt[4]{1 - i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]}$ găsim

$$z_k = 2^{1/2}\cos\left(\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right),$$

$$k = 0, 1, 2 \text{ sau } z_0 = 2^{1/6}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right];$$

$$z_1 = 2^{1/6}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right), \quad z_2 = 2^{16}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

6.4. 1° Avem $\cos a = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$; $\sin a = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{2} - x\right)$; $\cos b = \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)$, $\cos c = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{y} - y\right)$.

$A = 4\cos^2(a + b)$; $B = 4\cos^2(a - b)$, $C = 4\cos^2 a$; $D = 4\cos^4 b$.

2° $B + C + D - A = 4\cos^2 a + 4\cos^2 b + 4\cos^2(a - b) - 4\cos^2(a + b) = 4(\cos^2 a + \cos^2 b + \sin 2a \sin 2b)$.

6.5. $E = \dfrac{1}{\sin^2 80^\circ} + \dfrac{2\cos 40^\circ + 3}{\sin^2 40^\circ} = \dfrac{1 + 2(2\cos 40^\circ + 3)\cdot 4\cos^2 40^\circ}{\sin^2 80^\circ} =$

$$= \frac{1 + 4\cos 40^\circ + 6 + 4\cos 40^\circ \cos 80^\circ + 6\cos 80^\circ}{\sin^2 80^\circ} =$$

$$= \frac{7 + 4\cos 40^\circ + 2\cos 120^\circ + 2\cos 40^\circ + 6\cos 80^\circ}{\sin^2 80^\circ} =$$

$$\frac{6 + 6\cos 40^\circ + 6\cos 30^\circ}{\sin^2 80^\circ} = \frac{6(1 + 2\cos 60^\circ \cos 20^\circ)}{\sin^2 80^\circ} = \frac{6\cdot 2\cos^2 10^\circ}{\cos^2 10^\circ} = 12$$

6.6. Aducem la același numitor și obținem:

$(\cos a + \mathrm{i}\sin a)(\sin a - \mathrm{i}\cos a) + (\cos a - \mathrm{i}\sin a)(\sin a + \mathrm{i}\cos a) =$
$= 2\sin 2a$ sau

$2\sin a\cos a + \mathrm{i}(\sin^2 a - \cos^2 a) + 2\sin a\cos a - \mathrm{i}(\sin^2 a - \cos^6 a) =$
$= 4\sin a\cos a = 2\sin 2a.$

6.7. $\dfrac{1 + \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\, a}{1 - \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\, a} = \dfrac{\cos a + \mathrm{i}\sin a}{\cos a - \mathrm{i}\sin a} = \cos 2a + \mathrm{i}\sin 2a.$

$$\left(\frac{1 + xi}{1 - xi}\right)^n = \cos(2a + 2k\pi) + \mathrm{i}\sin(2a + 2k\pi) \text{ sau } \frac{1 - xi}{1 - xi} =$$

$$= \cos\frac{2(a + k\pi)}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2(a + k\pi)}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1.$$

Rezultă $x_k = \mathrm{tg}\,\dfrac{a + k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$).

6.8. $x_{1,2} = \dfrac{\sqrt{2} \pm \mathrm{i}\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm \mathrm{i}) = \cos\dfrac{\pi}{4} \pm \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}$.

$$x_1^{1971} + x_2^{1971} = 2\cos\frac{1971\,\pi}{4} = 2\cos\frac{3\pi}{4} = -\sqrt{2}.$$

$$x_1^{1977} + x_2^{1977} = 2\cos\frac{1977\,\pi}{4} = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}.$$

Rezultă $E = -1$.

6.9. Notăm $\cos\alpha = x^n$, deci $\arccos x = \alpha$. Formula lui *Moivre* este $(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + \mathrm{i}\sin n\alpha$. Dezvoltăm și egalăm părțile reale:

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\cdot\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\cdot\sin^4\alpha + \ldots, \text{ sau}$$

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha + C_n^4\cos^n\alpha - 2C_n^4\cos^{n-2}\alpha +$$
$$+ C_n^4\cos^n\alpha + \ldots \text{ sau}$$

$$\cos n\alpha = (1 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots)\cos^n\alpha - (C_n^2 + 2C_n^4 + \ldots)\cos^{n-2}\alpha +$$
$$+ (C_n^4 + \ldots)\cos^{n-4}\alpha - \ldots$$

Coeficientul lui $\cos^n \alpha$ este 2^{n-1}. Notăm acum $\cos(n \arccos x) = P_n(x) = \cos n\alpha = 2^{n-1}\cos^n \alpha - (C_n^2 + 2C_n^4 + \ldots)\cos^{n-2}\alpha + \ldots$ sau $P_n(x) = 2^{n-1}x^n - (C_n^4 + 2C_n^2 + \ldots)x^{n-2} + \ldots$ Ecuația $P_n(x) = 0$ are rădăcinile ecuației $\cos n\alpha = 0$, adică $x = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$, unde $k = 1, 2, 3, \ldots n$. Rădăcinile ecuației $P(x) = 0$ sînt toate reale diferite și cuprinse între -1 și $+1$.

Deoarece $0 < \frac{(2k-1)\pi}{2n} < \pi$, rezultă că pe măsură ce k crește pînă la $[n/2]$, x descrește de la 1 către zero, apoi descrește spre -1.

$P_n(x)$ este egal cu 1 în cazul cînd $\cos(n \arccos x) = 1$ adică $n \arccos x = 2k\pi$ adică dacă $\arccos x = 2k\pi/n$ sau $x = 2k\pi/n$, unde $k = 1, 2, 3, \ldots n$.

$P_n(x)$ este egal cu -1 adică $\arccos(n \arccos x) = -1$ sau $n \arccos x = (2k-1)\pi$, deci pentru $x = \cos \frac{(2k-1)\pi}{n}$, unde $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Cazul particular pentru $n = 6$. Avem $\cos 6x = 2^5 \cos^6 \alpha - 48\cos^4 \alpha + 18\cos^2 \alpha - 1$. Notăm $\cos \alpha = x$ și avem $P(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$.

$P(x) = 0$ pentru $6 \arccos x = (2k-1)\frac{\pi}{2}$ sau $x = \cos \frac{(2k-1)\pi}{12}$, unde $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Soluțiile în ordine descrescătoare sînt:

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{12}, \quad x_2 = \cos \frac{\pi}{4}, \quad x_3 = \cos \frac{5\pi}{12}, \quad x_4 = \cos \frac{7\pi}{12} = -\sin \frac{\pi}{12},$$

$$x_5 = \cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ și } x_6 = \cos \frac{11\pi}{12} = -\cos \frac{\pi}{12}.$$

$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 = 1$ pentru $x = \cos \frac{2k\pi}{6} = \cos \frac{k\pi}{3}$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, iar $32x - 48x^4 + 18x^2 - 1 = -1$ pentru

$$x = \cos \frac{(2k-1)\pi}{6}, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Rezultă că $32x^3 - 48x^2 + 18x - 2 = 0$ cînd $x = \cos^2 \frac{k\pi}{3}$, $k = 1, 2, 3$ deci ecuația $4x^3 - 12x^2 + 9x - 2 = 0$ are rădăcinile $x_1 = 2\cos^2 \frac{\pi}{3} = 1/2$, $x_2 = 2\cos^2 \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $x_3 = 2\cos^2 \pi = 2$ care verifică. Ecuația $4x^3 - 12x^2 + 9x = 0$ are rădăcinile $x_1 = 2\cos^2 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$, $x_2 = 2\cos^2 \frac{3\pi}{6} = 0$ și $x_3 = 2\cos^2 \frac{5\pi}{6} = \frac{3}{2}$ care verifică.

6.10. Din dezvoltarea binomului $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n$ în două moduri; aplicînd binomul lui *Newton* și formula lui *Moivre*: $\sin n\alpha = C_n^1 \cos^{n-1} \alpha \cdot$

$\cdot \sin\alpha - C_n^3 \cos^{n-3}\alpha \cdot \sin^3\alpha + C_n^5 \cos^{n-5}\alpha \cdot \sin^5\alpha - \ldots$ Pentru $n = 13$, avem după o grupare convenabilă, $\sin 13\alpha = \sin^{13}\alpha(C_{13}^1 \operatorname{ctg}^{12}\alpha - C_{13}^3 \operatorname{ctg}^{10}\alpha + \ldots + C_{13}^{13})$. Pentru $\alpha = \pi/13, 2\pi/13, \ldots, 6\pi/13$; $\sin 13\alpha = 0$ şi $\sin^n\alpha \neq 0$, $\cos^3\alpha \neq 0$. Deci $C_{13}^1 \operatorname{ctg}^{12}\alpha - C_{13}^3 \cdot \operatorname{ctg}^{10}\alpha + \ldots + C_{13}^{13} = 0$.

Considerînd o ecuaţia în $\operatorname{ctg}^2\alpha$ avem

$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{13} \cdot \operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{13} \ldots \operatorname{ctg}^2\frac{6\pi}{13} = \frac{1}{13}$ sau $\operatorname{tg}\frac{\pi}{13} \cdot \operatorname{tg}\frac{2\pi}{13} \cdots \operatorname{tg}\frac{6\pi}{13} = \sqrt{13}$. În cazul general, notînd $n = 2m + 1$ şi $\alpha = \frac{\pi}{2m+1}, \frac{2\pi}{2m+1}, \ldots, \frac{m\pi}{2m+1}$, $\sin(2m+1)\alpha = 0$, iar $\sin^n\alpha \neq 0$, $\cos^n\theta \neq 0$, deci ecuaţia

$$C_{2m+1}^1 x^m - C_{2m+1}^2 x^{m-1} + \ldots + C_{2m-1}^{2m+1} = 0,$$

admite rădăcinile $x = \operatorname{ctg}^2\frac{k\pi}{2m+1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots, m$.

Folosind relaţiile între rădăcini şi coeficienţi, avem

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2m+1}\operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2m+1} \ldots \operatorname{ctg}^2\frac{m\pi}{2m+1} = \frac{1}{2m+1} \cdot \text{ de unde}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2m+1} \cdot \operatorname{tg}\frac{2\pi}{2m+1}, \ldots, \operatorname{tg}\frac{m\pi}{2m+1} = \sqrt{2m+1}.$$

Pentru $m = 6$ avem cazul particular din enunţ.

6.11. Avem $\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^n = -1$, $(x \neq i)$ de unde $\frac{x+i}{x-i} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$.

$$\left(\frac{x+i}{x-i} - 1\right)\frac{1}{i} = \sin\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\left[1 - \cos\frac{(2k+1)\pi}{n}\right] = \frac{2}{x-i} =$$

$$= 2\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}\left(\cos\frac{2k+1)\pi}{2n} + 2i\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right).$$

Obţinem

$$x - i = \frac{1}{\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n} \cdot \left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)} =$$

$$\frac{\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} - i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}}{\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}} = \operatorname{ctg}\frac{(2k+1)\pi}{2n} - i, \text{ de unde}$$

$$x = \operatorname{ctg}\frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1).$$

6.12. Plecăm de la formula $(\cos x + i \sin x)^5 = \cos 5x + i \sin 5x =$ $= \cos^5 x + 5\cos^4 x \sin x - 10\cos^3 x \sin^2 x - 10\cos^2 x \sin^3 x +$ $+ 5\cos x \sin^4 x + i \sin^5 x$. Înlocuind $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ și separînd părțile reale, obținem
$\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x = \sin x(16\sin^4 x - 20\sin^2 x + 5)$.
Ecuația $\sin 5x = 0$ are rădăcinile distincte $x = k\pi/5$, $k = k \in \mathbf{Z}$, deci ecuația $16y^4 - 20y^2 + 5 = 0$ admite rădăcinile:

$$y_1 = \sin\frac{\pi}{5},\quad y_2 = \sin\frac{2\pi}{5},\quad y_3 = -\sin\frac{\pi}{5},\quad y_4 = -\sin\frac{2\pi}{5},$$

$$y^2 = \frac{10 \pm \sqrt{20}}{16} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8};\quad y = \pm\frac{\sqrt{5 \pm \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}}{4}.$$

$$0 < \sin\frac{\pi}{5} < \sin\frac{2\pi}{5};\ \text{deci}\ \sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4};\quad \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

6.13. Notăm $x = \cos a$. Ecuația se mai scrie

$$(\cos a + i \sin a)^{60} + (\cos a - i \sin a)^{60} = 1 \text{ sau}$$

$$2\cos 60^\circ a = 1,\ \cos 60^\circ a = \cos(360^\circ m \pm 60^\circ,,\quad m \in \mathbf{Z}$$

Rezultă $a = 6m \pm 1$.

Se observă că dacă soluțiile $x = \cos(6m \pm 1)$ sînt de forma $\sin k^\circ$, $-\sin k^\circ$, $\cos k^\circ$, $\cos(180^\circ - k^\circ)$ care se mai scriu $\cos(90^\circ - k^\circ)$, $\cos(90^\circ + k^\circ$ $\cos k^\circ$, $\cos(180^\circ - k^\circ)$, unde k nu este divizibil cu 3 nici cu 2 adică este de forma $6n \pm 1$, $n \in \mathbf{Z}$, și deci $90^\circ - k^\circ$, $90^\circ + k^\circ$, k°, $180^\circ - k^\circ$ sînt de această formă și deci a poate lua ca valori $90^\circ - k^\circ$, $90^\circ + k^\circ$, k° și $180^\circ - k^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$, adică cele patru valori sînt soluții.

6.14. Forma trigonometrică a numerelor date este

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right);\quad \sqrt{3} - i = 2[\cos(-\pi/6) \pm i \sin(-\pi/6)],$$

Găsim $(1 + i)^8 = 16(\cos 2\pi + i \sin 2\pi)$, $(\sqrt{3} - i)^3 = 8[\cos(-\pi/2) +$ $+ i \sin(-\pi/2)$ și deci $z = 2[\cos(2\pi + \pi/2) + i \sin(2\pi + \pi/2)] = 2(\cos \pi/2 +$ $+ i \sin \pi/2]$.

6.15. Notăm $x = \sin y$ și ecuația devine $(\cos y + i \sin y)^6 + (-\cos y +$ $+ i \sin y)^6 + 1 = 0$ sau $\cos 6y + i \sin 6y + \cos(6\pi - 6y) + i \sin(6\pi -$ $- 6y) + 1 = 0$, deci
$2\cos 6y = -1$, $6y = 2k\pi \pm 2\pi/3$ de unde $y = k\pi/3 \pm \pi/9$ și $x =$ $= \sin(k\pi/3 \pm \pi/9)$, $k \in \mathbf{Z}$.

6.16. Avem $x^4 - 1 = \cos(2k + 1)\pi + i \sin(2k + 1)\pi$, $k = 0, 1, 2, 3$. Rezultă:

$$x_1^n = \cos\frac{n\pi}{4} + i \sin\frac{n\pi}{4};\quad x_2^n = \cos\frac{3n\pi}{4} + i \sin\frac{3n\pi}{4};$$

$$x_3^n = \cos\frac{5n\pi}{4} + i \sin\frac{5n\pi}{4};\quad x_4^n = \cos\frac{7n\pi}{4} + i \sin\frac{7n\pi}{4}.$$

$$\cos\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{7n\pi}{4}+\left(\cos\frac{3n\pi}{4}+\cos\frac{5n\pi}{5}\right)=2\cos n\pi\cos\frac{3n\pi}{4}+$$

$$+2\cos n\pi\cos\frac{n\pi}{4}=4\cos\pi\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{4}=(-1)^n 4\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{4}.\quad n\in\mathbf{N}.$$

$$\sin\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{7n\pi}{4}+\sin\frac{3n\pi}{4}+\sin\frac{5n\pi}{4}=2\sin n\pi\cos\frac{3n\pi}{4}+$$

$+2\sin n\pi\cos\frac{n\pi}{4}=0$. Rezultă relația cerută.

6.17. Avem

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^m=1=\cos 2k\pi+\mathrm{i}\sin 2k\pi,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

$$\frac{x+1}{x-1}=\cos\frac{2k\pi}{m}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{m},\quad k=1,2,\ldots,(m-1).$$

$$x_k=\mathrm{i}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{m},\quad k=1,2,\ldots,(m-1).$$

6.18. Considerăm pe $\bar{z}$ sub formă trigonometrică $z=\rho(\cos x+\mathrm{i}\sin x)$. deci conjugatul lui z va fi $z=\rho[\cos(-x)+\mathrm{i}\sin(-x)]$. Rezultă că $\rho[\cos(-x)+\mathrm{i}\sin(-x)]=\rho^{n-1}[(\cos(n-1)x+\mathrm{i}\sin(n-1)x]$ de unde avem că $\rho=\rho^{n-1}$ și $(n-1)x+x=2k\pi$, deci $\rho_1=0$ și $\rho_2=1$, iar $x=2k\pi/n$.

Soluțiile vor fi $z_1=0$ și $z_2=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}$.

6.19. $S_1+\mathrm{i}S_2=\cos x(\cos x+\mathrm{i}\sin x)+\cos^2 x(\cos 2x+\mathrm{i}\sin 2x)+\ldots+\cos^n x(\cos nx+\mathrm{i}\sin nx)$.

Ținîndu-se seama de formula lui *Moivre* se obține

$S_1+\mathrm{i}S_2=\cos x(\cos x+\mathrm{i}\sin x)+\cos^2 x(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^2+\ldots\cos^n x(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n$, de unde:

$$S_1+\mathrm{i}S_2=\frac{\cos^{n+1}x(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^{n+1}-\cos x(\cos x+\mathrm{i}\sin x)}{\cos x(\cos x+\mathrm{i}\sin x-1)}.$$

$$\text{sau } S_1+\mathrm{i}S_2=\frac{\cos x(\cos x+\mathrm{i}\sin x)[\cos^n x(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n-1]}{-\sin x(\sin x-\mathrm{i}\cos x)}.$$

Amplificăm cu i:

$$S_1+\mathrm{i}S_2=\frac{\mathrm{i}\cos x(\cos x+\mathrm{i}\sin x)[\cos^n x(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n-1}{-\sin x(\cos x+\mathrm{i}\sin x)}.$$

Deci, ținînd seama din nou de formula lui *Moivre*, grupînd părțile reale și egalîndu-le obținem

$$S_1=\operatorname{ctg}x\cos^n x\sin nx,\ S_2=\operatorname{ctg}x(1-\cos^n x\cos nx).$$

6.20. Avem $z = \cos y + i \sin x$.

$$z^{1978} + \frac{1}{z^{1978}} = (\cos x + i \sin x)^{1978} + (\cos x - i \sin x)^{1978} =$$

$= 2 \cos 1978\, x$. Ecuația $z + 1/z - 1 = 0$ ne dă

$$z = \frac{1}{2} \pm \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) i = \cos\frac{\pi}{3} \pm i \sin\frac{\pi}{3}.$$

$$z^{1978} + \frac{1}{z^{1978}} = 2 \cos\frac{1978\,\pi}{3} = 2 \cos\frac{\pi}{3} = 1.$$

6.21. Avem: $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$. Deci

$$A = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}}}}} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{12}}}}} =$$

$$= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{24}}}} = \sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{48}}} =$$

$$= \sqrt{2+\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{96}}} = \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{192}} = 2\cos\frac{\pi}{192}.$$

Asemănător se arată că $B = 2 \sin \dfrac{\pi}{192}$.

Demonstrația formulelor se face astfel:

$$(A + Bi)^{16} = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{192} + i \sin\frac{\pi}{192}\right)\right]^{16} = 2^{14}\left[4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i \sin\frac{\pi}{12}\right)\right] =$$

$$= 2^{14}\left[4\,\frac{\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)}{4}\right] = 2^{14}[(\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)] \text{ sau}$$

$$= (A + Bi)^{16} = 2^{14}[\sqrt{3}(1+i) - (1+i)] \text{ sau } (A + Bi)^{16} =$$

$$= 2^{14}(1+i)(\sqrt{3}-i), \text{ deci } (A + Bi)^{192} + 2^{192}(\cos\pi + i \sin\pi) - 2^{192} =$$

$$= -2^{192} + 2^{192} = 0,$$

adică ceea ce trebuie demonstrat.

6.22. a) $1 + i = \sqrt{1+1}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \cos\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \sin\dfrac{\pi}{4}\right)$;

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

b) $\dfrac{(1+i)^4}{1-i}=\dfrac{(\sqrt{2})^4(\cos\pi+i\sin\pi)}{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)}=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\pi-\dfrac{7\pi}{4}\right)+\right.$

$\left.+i\sin\left(\pi-\dfrac{7\pi}{4}\right)\right]=2\sqrt{2}\left[\cos\left(2\pi-\pi+\dfrac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(2\pi-\pi+\dfrac{7\pi}{4}\right)\right]=$

$=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{4}+i\sin\dfrac{11\pi}{4}\right)\cdot$

$\dfrac{(1-i)^4}{1+i}=\dfrac{(\sqrt{2})^4(\cos 7\pi+i\sin 7\pi}{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)\cdot$

6.23. Notăm $z=\cos 10^\circ+i\sin 10^\circ\Rightarrow z^9=\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ=i$ şi $z^{18}=-1$;

$\cos^2 10^\circ=\left(\dfrac{z^2+1}{2z}\right)^2$; $\sin^2 20^\circ=\left(\dfrac{z^4-1}{2iz^2}\right)^2$; $\sin^2 40^\circ=\left(\dfrac{z^8-1}{2iz^4}\right)^2\cdot$

Înlocuind avem de arătat că:

$$\frac{(z^2+1)^2}{4z^2}+\frac{(z^4-1)^2}{4i^2z^2}+\frac{(z^6-1)^2}{4i^2z^8}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot$$

Într-adevăr, efectuînd calculele avem

$$\frac{z^6(z^4+2z^2+1)-z^4(z^6-2z^4+1)-z^{16}+2z^8-1}{4z^8}=$$

$$=\frac{-z^{16}-z^{12}+z^{10}+z^6-z^4-1+6z^8}{4z^8}=$$

$$=\frac{-(z^{16}-z^{14}+tz^{12}-z^{10}+z^8-z^6+z^4-z^2+1-(z^{14}-z^8+z^2)+6z^8}{4z^8}=$$

$$=\frac{\dfrac{-z^{18}+1}{z^2+1}-z^2\cdot\dfrac{z^{16}+1}{z^6+1}+6z^8}{4z^8}=\frac{6z^8}{4z^8}=\frac{3}{2}\cdot$$

6.24. Avem $E_1=\sqrt[4]{\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}}+\sqrt[4]{\cos\left(\dfrac{-2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{-2\pi}{3}\right)}=$

$$=\cos\frac{2k\pi+\frac{2\pi}{3}}{4}+i\sin\frac{2k\pi+\frac{2\pi}{3}}{4}+\cos\frac{2n\pi-\frac{2\pi}{3}}{4}+i\sin\frac{2n\pi-\frac{2\pi}{3}}{4},$$

$k,n\in\mathbf{Z}$, $k=0,1,2,3$ cu soluţia $E_1=\sqrt{3}$.

6.25. Avem $x^2=\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}=\cos\dfrac{2\pi}{3}-i\sin\dfrac{2\pi}{3}$; $x^3=$

$=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$; $x^4=\cos\dfrac{8\pi}{3}+i\sin\dfrac{8\pi}{3}=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}=x$.

$$(ax + bx^2)(ax^2 + bx) = a^2x^3 + abx^2 + abx^4 + b^2x^3 =$$

$$= a^2 + b^2 + ab\left(2\cos\frac{2\pi}{3}\right) = a^2 + b^2 - ab.$$

6.26. $z^2 = \cos 2a \pm \sqrt{\cos^2 2a - 1} = \cos 2a \pm i \sin 2a$;
$z = \pm(\cos a \pm i \sin a)$, adică 4 rădăcini complexe.

6.27. Avem $x^3 = 1$, $x^2 + x + 1 = 0$, $x^2 + x = -1$, $x^4 = x$.
$E = (a + b + c)[a^2 + (ab + ac)x + (ab + bc + ac)x^2 + (c^2 + b^2)] + bcx^4 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

6.28. Notăm $z_1 = \cos x + i \sin x$, $z_2 = \cos y + i \sin y$, $z_3 = \cos z + i \sin z$. Prin adunarea acestor relații și ținînd cont de ipoteză rezultă $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

Folosind formula lui Moivre avem

$$z_1^2 = \cos 2x + i \sin 2x;\ z_2^2 = \cos 2y + i \sin 2y;\ z_3^2 = \cos 2z + i \sin 2z.$$

Pentru a arăta că sînt adevărate relațiile (2) trebuie să arătăm că $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$. Din $\cos x + \cos y + \cos z = 0$, rezultă

$$\frac{z_1^2 + 1}{2z_1} + \frac{z_2^2 + 1}{2z_2} + \frac{z_3^2 + 1}{2z_3} = 0 \text{ sau } \frac{z_1^2z_2z_2 + z_2^2z_1z_3 + z_3^2z_1z_2 + z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_2}{2z_1z_2z_3} =$$

$$= \frac{z_1z_2z_3(z_1 + z_2 + z_3) + z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3}{2z_1z_2z_3} = 0. \text{ Deci } z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 = 0.$$

La același rezultat se ajunge și dacă se pleacă de la relația $\sin x + \sin y + \sin z = 0$.

Dar $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3) = 0$, ceea ce trebuia arătat.

6.29. Pentru $n = 1$ avem $(1 + i) = 2^{1/2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$, deci se verifică.

Fie $(1 + i)^k = 2^{k/2}\left(\cos\frac{k\pi}{4} + i \sin\frac{k\pi}{4}\right)$. În acest caz avem $(1 + i)^{k+1} =$

$$= 2^{k/2}\left(\cos\frac{k\pi}{4} + i \sin\frac{k\pi}{4}\right) \cdot 2^{1/2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) = 2^{(k+1)/2}\left(\cos\frac{(k+1)\pi}{4} +\right.$$

$$\left. + i \sin\frac{(k+1)\pi}{4}\right).$$

6.30. Pentru $n = 1$ este adevărată deoarece $\sqrt{3} - i =$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i \sin\frac{\pi}{6}\right). \text{ Fie } (\sqrt{3} - i)^k = 2^k\left(\cos\frac{k\pi}{6} - i \sin\frac{k\pi}{6}\right). \text{ Rezultă}$$

$$(\sqrt{3} - i)^{k+1} = 2^k\left(\cos\frac{k\pi}{6} - i \sin\frac{k\pi}{6}\right)2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i \sin\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 2^{k+1}\left[\cos\frac{(k+1)\pi}{6} - i \sin\frac{(k+1)\pi}{6}\right].$$

6.31. Înmulțind cu $x - 1$ și obținem $(x^{11} - 1) = 0$, unde s-a introdus rădăcina $x = 1$.

Rădăcinile ecuației $x^{11} - 1 = 0$ sînt $x_k = \cos\frac{2k\pi}{11} + i\sin\frac{2k\pi}{11}$, $k = 1, 2, 3, \ldots 10$, și $x = 1$, care este rădăcina introdusă și nu aparține ecuației date.

6.32. *Indicație.* Separînd părțile reale din egalitatea celor două forme obținute după aplicarea formulei lui *Newton* și a lui *Moivre* obținem

$$S = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{3}} \sin\frac{2n\pi}{3}, \quad n \in \mathbf{N}^+$$

6.33. a) Avem $S_1(x) + iS_2(x) = (\cos x + i\sin x) + C_n^1(\cos x + i\sin x)^2 + \ldots + C_n^n(\cos x + i\sin x)^{n+1} = (\cos x + i\sin x)[1 + C_n^1(\cos x + \sin x) + \ldots + C_n^n(\cos x + i\sin x)^n] = (\cos x + i\sin x)(1 + \cos x + i\sin x)^n =$

$$= (\cos x + i\sin x)\left[\sqrt{(1+\cos x)^2\sin^2 x^n} \cdot \left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right)^n\right] =$$

$$= (\cos x + i\sin x)\left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right) \cdot \left|2\cos\frac{x}{2}\right|^2 = 2^n\left|\cos\frac{x}{2}\right|^n \cdot$$

$$\cdot\left(\cos\frac{n+2}{2}x + i\sin\frac{n+2}{2}x\right) \cdot$$

b) $S_1(x) = 2^n\left|\cos\frac{x}{2}\right|^n \cos\left(\frac{n+2}{2}x\right) = 0$ deci $\cos\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = (2k+1)$ și $\cos\frac{(n+2)x}{2} = 0$ de unde $x_2 = \frac{(2k+1)\pi}{n+2}$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$.

$S_2(x) = 2^n\left|\cos\frac{x}{2}\right|^n \cdot \sin\left(\frac{n+2}{2}x\right) = 0$. Deci $\cos\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = (2k+1)\pi$ și $\sin\frac{(n+2)x}{2} = 0$ deci $x_2 = \frac{2k\pi}{n+2}$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$.

6.34. Folosim relația $(1+i)^n = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n$. Prima parte o dezvoltăm după binomul lui *Newton*, iar la a doua aplicăm formula lui *Moivre* și din separarea părților reale obținem formulele cerute în ecuație.

6.35. Dacă $u = \cos x + i\sin x$ și $v = \cos x - i\sin x$, avem $u^k = \cos kx + i\sin kx$; $v^k = \cos kx - i\sin kx$, de unde $u^k + v^k = 2\cos kx$; $u^k - v^k = 2i\sin kx$ și $u^k v^k = 1$, $u + v = 2\cos x$; $(u+v)^n = 2^n\cos^n x = u^n + C_n^1 uv^{n-1} + C_n^2 u^2 v^{n-2} + \ldots$, $(2i)\sin^n x = (u-v)^n = u^n - C_n^1 vu^{n-1} + C_n^2 v^2 u^{n-2} \ldots$ Ținem seama că $u^k v^k = 1$ și grupăm termenii egal depărtați de extremi. Pentru formula generală se ține seama de paritatea lui n.

6.36. Notăm $S_1 = \sum_{k=0}^{10} \sin\frac{k\pi}{20}$; $S_2 = \sum_{k=0}^{10} \cos\frac{k\pi}{20}$ $\cos\frac{\pi}{20} + i\sin\frac{\pi}{20} = z$.

Avem $S_1 + iS_2 = 1 + z^2 + z^4 + z^6 + \ldots + z^{20} = \frac{z^{22} - 1}{z^2 - 1} = \frac{z(z^{11} - z^{11})^{11}}{z(z - z^1)} =$

$= z^{10} \cdot \frac{z^{11} - z^{-11}}{z - z^{-1}} = \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \frac{\sin(\pi/4 + \pi/40)}{\sin \frac{\pi}{40}}.$

Rezultă $S_1 + S_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sin(\pi/4 + \pi/40)}{\sin \frac{\pi}{40}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sin(\pi/4 + \pi/40)}{\sin \frac{\pi}{40}}.$

6.37. Fie $a = \rho_1(\cos \alpha + i \sin \alpha_1)$, $c = \rho_2(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2)$,

$$b = (\rho_1 + \rho_2) \cdot \cos\left(\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)\Big],$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1}\left[\cos \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} + i \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right].$$

$$x_1 x_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}[\cos(\alpha_2 - \alpha_1) + i \sin(\alpha_2 - \alpha_1)],$$

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{\rho_1^2}[\cos(\alpha_2 - \alpha_1) +$$

$+ i \sin(\alpha_2 - \alpha_1)]$. Luînd $x_1 - x_2 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1^2} \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + i \sin(\alpha_2 - \alpha_1)]$,

obținem $x_1 = -\left(\cos \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} + i \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)$ și deci $|x_1| = 1$.

6.38. Rădăcinile ecuației: $x^{2n-2} + x^{2n-4} + \ldots + x^2 + 1 = 0$ sînt complexe și conjugate. Dacă $x_k = \cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n}$, este o soluție a ecuației, atunci $\bar{x}_k = \cos \frac{k\pi}{n} - i \sin \frac{k\pi}{n}$ este de asemenea o soluție ($k = 1, 2, \ldots, n - 1$).

Avem identitatea $x^{2n+2} + x^{2n-4} + \ldots + x^2 + 1 = \prod_{k=1}^{n-1}(x - \bar{x}_k)(x - \bar{x}_k) =$

$= \prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1\right)$.

Pentru $x = 1$ obținem: $n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(2 - 2 \cos \frac{k\pi}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} 4 \sin^2 \frac{k\pi}{n} =$

$= 4^{n-1} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2n} \sin^2 \frac{2\pi}{2n} \ldots \sin^2 \frac{(n-1)\pi}{2n}$ de unde rezultă

$$\sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sin \frac{2\pi}{2n} \ldots \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} \tag{1}$$

Dar: $\sin \frac{k\pi}{2n} = \cos \frac{(n-k)\pi}{2n}$, $k = 1, 2, \ldots, n - 1$ și de aceea

$$\cos \frac{\pi}{2n} \cdot \cos \frac{2\pi}{2n} \ldots \cos \frac{(n-k)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}. \tag{2}$$

Din (1) și (2) obținem $2^{n-1}\left(\cos\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{2n}\right)\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\right)\ldots\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\cdot\right.$

$\left.\cdot\sin\frac{(n+k)\pi}{2n}\right)=2^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}=\frac{n}{2^{n-1}}$ adică $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$.

6.39. Ținem seama că $\alpha=\frac{180^\circ}{25}=\frac{36^\circ}{5}$, $l_{25}=2R\sin\alpha$, $a_{25}=R\sin\alpha$, $S_{50}=25R^2\sin\alpha$. Avem $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^5=\cos 36^\circ+i\sin 36^\circ$.

Dezvoltăm după formula binomului lui *Newton* și egalăm coeficienții părților imaginare:

$$C_5^1\cos^4\alpha\sin\alpha-C_5^3\cos^2\alpha\sin^3\alpha+C_5^5\sin^5\alpha=\sin 36^\circ;$$

$\sin 36^\circ=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ și transformăm cosinusurile în sinusuri; avem:

$2(32\sin^5\alpha-40\sin^3\alpha+10\sin\alpha)=\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, deci

$2\sin\alpha(32\sin^4\alpha-40\sin^2\alpha+10)=\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, sau

$2\sin\alpha(16\sin^4\alpha+16\cos^4\alpha-4\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha-10)=\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

$2\frac{S_{50}}{25R^2}\left(16\cdot\frac{l_{25}^4}{16R^4}+16\cdot\frac{a_{25}^2}{R^4}-4\cdot\frac{l_{25}^2}{4R^2}+4\cdot\frac{a_{25}^2}{R^2}-10\right)=\sqrt{10-2\sqrt{5}}$,

de unde avem $2S_{50}(l_{25}^4+16a_{25}^4-l_{25}^2R^2+4a_{25}^2R-10R^4)=25R^6\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ ceea ce trebuie arătat.

6.40. Notăm $4^{\sin^2 x}=y$. Avem $4^{\sin^2 x}+4^{1-\sin^2 x}=4^{\sin^2 x}+4\cdot\frac{1}{4^{\sin^2 x}}=8$, deci $y^2-8y+4=0$ sau $y_{1,2}=4^{\sin^2 x}=2\pm\sqrt{12}=2(2\pm\sqrt{3})$.

Fie $4^{\sin^2 x}=2(2\pm\sqrt{3})=4^{\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}}$, deci $\sin^2 x=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$ sau $\sin x=\pm\sqrt{\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}}$. Dar convin numai $\sin x=\pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$. Notăm $a=\arcsin\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$, rezultă $x=k\pi\pm\arcsin\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}=k\pi\pm a$, $k\in\mathbf{Z}$.

6.41. a) Notăm: $x+1/x=y$ și rezultă $y^2-4y-16=0$; $y_{1,2}=2\pm2\sqrt{5}$. Pentru $x+1/x=2+2\sqrt{5}$; $x^2-2(1+\sqrt{5})x+1=0$; $x_1=1+\sqrt{5}+\sqrt{5+2\sqrt{5}}$; $x_2=1+\sqrt{5}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$. Pentru $x+1/x=2-2\sqrt{5}$, obținem $x^2-2(1-\sqrt{5})x+1=0$, $x_3=1-\sqrt{5}+\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ și $x_4=1-\sqrt{5}-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$. Ținînd seama că $x_4<x_3<x_2<x_1$, rezultă $P(x)\geqslant 0$, dacă: $x\in(-\infty,1-\sqrt{5}-\sqrt{5-2\sqrt{5}}]\cup[1-\sqrt{5}+\sqrt{5-2\sqrt{5}},1+\sqrt{5}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}]\cup[1+\sqrt{5}+\sqrt{5+2\sqrt{5}},+\infty)$.

b) Deoarece în primul cadran tangenta trigonometrică este pozitivă și crescătoare, iar în al doilea cadran negativă crescătoare, să arătăm că:

$$x_1 = \operatorname{tg}\frac{9\pi}{20},\quad x_2 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{20},\quad x_3 = \operatorname{tg}\frac{17\pi}{20} \text{ și } x_4 = \operatorname{tg}\frac{13\pi}{20}.$$

Se mai observă că: $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{20}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{20} = \operatorname{tg}\frac{9\pi}{20}\cdot\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{20} = 1 = x_1x_2$;

$$\operatorname{tg}\frac{17\pi}{20}\operatorname{tg}\frac{13\pi}{20} = 1 = x_3x_4;\quad x_1 + x_2 = x_1 + \frac{1}{x_1} = \operatorname{tg}\frac{9\pi}{20} + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{9\pi}{20}} =$$

$$= \frac{2}{\sin\left(2\cdot\frac{9\pi}{20}\right)} = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{10}} = \frac{8}{\sqrt{5}-1} 2(\sqrt{5}+1) = y_1.$$

Analog $x_3 + x_4 = \dfrac{-2}{\sin\frac{3\pi}{10}}$; dar $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, deci: $\sin\frac{3\pi}{10} =$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(3 - \frac{4(6-2\sqrt{5})}{16}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4};\ \text{iar } x_3+x_4 = 2(1-\sqrt{5}).$$

Rezultă că x_1, x_2, x_3, x_4 sînt tocmai $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{20}, \operatorname{tg}\frac{\pi}{20}, \operatorname{tg}\frac{17\pi}{20}, \operatorname{tg}\frac{13\pi}{20}$, deoarece sumele și produsele ultimelor două tangente luate două cîte două coincind și ele cu semnele și produsele rădăcinilor (x_3, x_4), adică verifică ecuația de gradul doi corespunzătoare.

c) Dacă arătăm că $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ și relația a doua este evidentă, căci $\cos\frac{\pi}{5} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{10} = 1 - 2\,\frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, iar $\cos\frac{\pi}{5} - \frac{1}{2} =$

$= \frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sin\frac{\pi}{10}$. Observăm că $\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{20}\right) = \cos\frac{\pi}{10}$. Fie $\sin\cdot\frac{\pi}{10} = x$ și $\cos\frac{\pi}{10} = y$. Avem $x^2 + y^2 = 1$, $y = \sin\left(4\cdot\frac{\pi}{10}\right) = 4\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}\times$

$\times\cos\frac{\pi}{5} = 4x\sqrt{1-x^2}\left(1 - 2\sin^2\frac{\pi}{10}\right) = 4\sqrt{1-x^2}(1-2x^2)$ sau x^2+

$+16x^2\cdot(1-x^2)(1-2x^2) = 1$; $16x^2(1-2x^2)^2 = 1$, unde $x^2 = 1/4$; $x = \pm 1/2 \neq$

$\neq \sin\frac{\pi}{10}$, iar $x^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$.

Se verifică ecuația obținută deoarece $16\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{8}\left(1 - \frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^2 =$

$$= 2(3-\sqrt{5})\cdot\frac{(1+\sqrt{5})^2}{16} = \frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{4} = 1$$

6.42. Fie a, b, c, lungimile muchiilor, adică $\sin^2 x = \dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$, $\cos^2 x = \dfrac{b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}$ și analoagele

a) $3(\sin^2 2x + \sin^2 2y + \sin^2 2x) = 12\,\Sigma \dfrac{a^2(b^2+c^2)}{(a^2+b^2+c^2)^2} =$

$= 24 \cdot \dfrac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} \leqslant 24 \cdot \dfrac{1}{3} = 8$, deoarece $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leqslant a^4 +$
$+ b^4 + c^4$ sau $3\Sigma a^2b^2 \leqslant (a^2+b^2+c^2)^2$.

b) Avem $\Sigma \operatorname{tg}^2 x = \Sigma \dfrac{b^2+c^2}{a^2} = \left(\dfrac{b^2}{a^2} + \dfrac{a^2}{c^2} + \dfrac{c^2}{b^2}\right) + \left(\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{c^2} + \dfrac{c^2}{a^2}\right) \geqslant$

$\geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{a^2} \cdot \dfrac{a^2}{c^2} \cdot \dfrac{c^2}{b^2}} + 3\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b^2} \cdot \dfrac{b^2}{c^2} \cdot \dfrac{c^2}{a^2}} = 3 + 3 = 6.$

c) $3\Sigma\cos^2 2x = 3\Sigma(1 - \sin^2 2x) = 3\,[3 - \Sigma \sin^2 2x] \geqslant 3\left(3 - \dfrac{8}{3}\right) = 1$,

ţinînd seama de a).

d) $3\Sigma \cos 4x = 3\Sigma \cos^2 2x - 3\Sigma \sin^2 2x \geqslant 1 - 8 = -7$, deci

$$3\Sigma \cos 4x + 7 \geqslant 0.$$

6.43. a) Din identitatea din enunţ rezultă că polinomul $x^3 + ax^2 + bx +$
$+ a$ are rădăcinile $x_1 = \operatorname{tg} A$, $x_2 = \operatorname{tg} B$, $x_3 = \operatorname{tg} C$, şi deci avem relaţiile:

$$\begin{gathered} \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = -a, \\ \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \operatorname{t} g C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A = b, \\ \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = -a. \end{gathered} \tag{1}$$

Avem $S = \cos 2A + \cos 2B + 2\cos C = \Sigma \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 A}{1 + \operatorname{tg}^2 A}$. Formăm ecuaţia în
y cu rădăcinile $\operatorname{tg}^2 A, \operatorname{tg}^2 B, \operatorname{tg}^2 C$. Din relaţiile (1) deducem $\Sigma \operatorname{tg}^2 A =$
$= a^2 - 2b$; $\Sigma \operatorname{tg}^2 A \operatorname{tg}^2 B = b^2 - 2a^2$ şi $\operatorname{tg}^2 A \operatorname{tg}^2 B \operatorname{tg}^2 C = a^2$. Ecuaţia în
y este

$$y^3 - (a^2 - 2b)y^2 + (b^2 + 2a^2)\,y - a^2 = 0. \tag{2}$$

Să formăm ecuaţia în z cu rădăcinile $\cos 2A$, $\cos 2B$, $\cos 2C$ adică

$$z = \frac{1-y}{1+y}. \tag{3}$$

Deci $y = \dfrac{1-z}{1+z}$ şi obţinem $(b-1)^2 z^3 + (b^2 + 2b - 3)\,z^2 - (b^2 - 2b - 3 -$
$- 4a^2)\,z + 4a^4 - (b+1)^2 = 0.$ (4)

Avem $S = \Sigma z_i = \Sigma \cos 2A = \dfrac{-b^2 - 2b + 3}{(b-1)^2} = -\dfrac{b+3}{b-1}$, $(b \neq 1)$ care
nu depinde de a.

b) Dacă A, B, C, sînt unghiurile unui triunghi ascuţit unghi, atunci
$\operatorname{tg} A, \operatorname{tg} B, \operatorname{tg} C$ sînt pozitive şi deoarece $\Sigma \operatorname{tg} A = \Pi \operatorname{tg} A = -a$, avem
$\Sigma \operatorname{tg} A = -a > 0$, adică $a < 0$ deci o condiţie necesară.

Avem suma

$S = \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 2(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) - 3 =$

$= \dfrac{b+3}{1-b}.$ (5)

Dar într-un triunghi oarecare ABC avem relaţia $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C =$
$= 1 - 2\cos A \cos B \cos C$, deci relaţia (5) devine $\cos A \cos B \cos C$

$= \frac{1}{b-1} > 0$, triunghiul fiind ascuțitunghi. Deci este necesară și condiția $b - 1 > 0$ adică $b > 1$.

Să cercetăm între ce limite poate varia a. Avem $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = -a > 0$, deoarece $\operatorname{tg} A, \operatorname{tg} B, \operatorname{tg} C > 0$. Conform teoremei mediilor avem $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C \geqslant 3\sqrt[3]{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}$, deci $-a \geqslant 3\sqrt[3]{-a}$ sau $a \leqslant 3\sqrt[3]{a}$ deci $a^3 \leqslant 27a$ sau împărțind cu $a < 0$ rezultă condiția necesară $a^2 \geqslant 27$ dar $a < 0$ deci $a \leqslant -3\sqrt{3}$.

Observație. Se mai poate arăta că $\Sigma \cos 2A$ nu depinde de a, fără a se efectua calculele. Deoarece $\cos 2A = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 A}{1 + \operatorname{tg}^2 A}$ și analoagele, iar $\cos 2A$ nu se schimbă dacă înlocuim pe $\operatorname{tg} A$ cu $-\operatorname{tg} B$, la fel $\cos 2B$ nu se schimbă dacă înlocuim $\operatorname{tg} B$ cu $-\operatorname{tg} B$, și analog $\cos 2C$. Deci dacă plecăm de la ecuația dată $x^3 - ax^2 + bx - a = 0$ cu rădăcinile $-\operatorname{tg} A, -\operatorname{tg} B, -\operatorname{tg} C$ obținem pentru $\Sigma \frac{1 - x_i^2}{1 + x_i^2} = \Sigma \cos 2A = \frac{b+3}{1-b}$ ca și în cazul ecuației $x^3 + ax^2 + bx + a = 0$, dar $a \neq -a$, astfel că $\Sigma \cos 2A$ nu depinde de a.

6.44. Avînd $\operatorname{tg} 2\beta = \operatorname{tg} 3\alpha$ să găsim condiția pe care trebuie s-o îndeplinească p și q. Egalitatea se mai scrie: $\frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\beta}$. Cum $\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{q}$, avem $\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\beta} = \frac{p(3q^2 - p^2)}{q(q^2 - 3q^2)}$, sau notînd $\operatorname{tg}\beta = x$ avem $p(3q^2 - p^2)\, x^2 + 2(q^2 - 3p^2)\, qx - p(3q^2 - p^2) = 0$. Dar $x = \operatorname{tg}\beta$ trebuie să fie rațional, deci discriminantul ecuației trebuie să fie un pătrat perfect. Avem:

$$q^2(q^2 - 3p^2)^2 + p^2(3q^2 - p^2) = (p^2 + q^2)(p^2 + q^2)^2,$$

care este pătrat perfect cînd $p^2 + q^2$ este pătrat perfect. Implicit, aceasta este condiția pentru ca $\operatorname{tg}\beta$ să fie rațional conform enunțului.

6.45. Notăm cu $y = \log_{\sec a}(1 + x) \Rightarrow 1 + x = (\sec a)^y$ și $x = (\operatorname{tg} a)^y$. Deci $1 = (\sec a)^y - (\operatorname{tg} a)^y$ sau $(\sec^2 a)^{y/2} = 1 + (\operatorname{tg}^2 a)^{y/2} \Rightarrow \frac{y}{2} = 1$ sau $y = 2$ deci $x = \operatorname{tg}^2 a$, unde $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

6.46. Notăm $\log_{\sec x}(13, 25) = y \Rightarrow (\sec x)^y = 1 + 12, 25$.
$\log_{\operatorname{tg} x}(12, 25) = y \rightarrow (\operatorname{tg} x)^y = 12{,}25$, deci $(\sec x)^y = 1 + (\operatorname{tg} x)^y$; dar $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, de unde $(\sec^2 x)^{y/2} = 1 + (\operatorname{tg}^2 x)^{y/2} \Rightarrow \frac{y}{2} = 1$. adică $y = 2$, iar $\operatorname{tg}^2 x = 12{,}25 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{12{,}25} = 3{,}5 = \frac{7}{2}$. Rezultă $x = \operatorname{arctg}\frac{7}{2}$.

6.47. Notăm $\sin x = \operatorname{tg}\frac{y}{2}$ deci $\sin y = \frac{2\operatorname{tg}\frac{y}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{y}{2}} = \frac{2\sin x}{1 + \sin^2 x}$,

unde $-1 \leqslant \operatorname{tg}\frac{y}{2} \leqslant 1$. Avem $f\left(\frac{2\sin x}{1+\sin^2 x}\right) = f(\sin y) = g(\sin x) = g\left(\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right)$. Prin urmare $g\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = f(\sin x)$ pentru $-1 \leqslant \operatorname{tg}\frac{x}{2} \leqslant 1$. Rezultă că $\frac{x}{2} \in \bigcup_{k\in Z}[k\pi - \pi/4,\ k\pi + \pi/4]$ sau $x = \bigcup_{k\in Z}[2k\pi - \pi/2,\ 2k\pi + \pi/2]$, $k \in \mathbf{Z}$.

6.48. Notînd $\cos y + \mathrm{i}\sin a = x$; $\cos b + \mathrm{i}\sin b = y$; $\cos c + \mathrm{i}\sin c = z$; $\cos d + \mathrm{i}\sin d = t$ şi folosind formulele stabilite avem de arătat că dacă

$$\frac{x^2y^2-1}{2\mathrm{i}\,xy}\cdot\frac{2\mathrm{i}\,xy}{x^2-y^2} = \frac{z^2t^2-1}{2\mathrm{i}\,zt}\cdot\frac{2\mathrm{i}\,zt}{z^2-t^2} \tag{1}$$

este adevărată, atunci avem şi

$$\frac{y^2t^2+1}{2xt}\cdot\frac{2xt}{x^2+t^2} = \frac{y^2z^2+1}{2yz}\cdot\frac{2yz}{y^2+z^2} \tag{2}$$

şi:

$$\frac{x^2-1}{\mathrm{i}(x^2+1)}\cdot\frac{\mathrm{i}(y^2+1)}{y^2-1} = \frac{z^2-1}{\mathrm{i}(z^2+1)}\cdot\frac{\mathrm{i}(t^2+1)}{\mathrm{i}^2-1} \tag{3}$$

sînt adevărate.

Efectuînd calculele se constată uşor că toate cele trei egalităţi pot fi aduse la aceeaşi formă.

Într-adevăr, relaţia (1) se mai poate scrie: $\frac{x^2y^2-1}{x^2-y^2} = \frac{z^2t^2-1}{z^2-t^2} \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2y^2z^2 - x^2y^2t^2 - x^2z^2t^2 + z^2y^2t^2 + x^2 - y^2 - z^2 + t^2 = 0$, iar relaţia (2) $\frac{x^2t^2+1}{x^2+t^2} = \frac{y^2z^2+1}{y^2+z^2} \Rightarrow x^2y^2z^2 - x^2y^2t^2 - x^2y^2t^2 + z^2y^2t^2 + x^2 - y^2 - z^2 + t^2 = 0$.

6.49. Notînd $\cos a + \mathrm{i}\sin a = x$; $\cos b + \mathrm{i}\sin b = y$; $\cos c + \mathrm{i}\sin c = z$ şi ţinînd cont de formulele stabilite iniţial avem de arătat că dacă relaţia

$$\frac{x^2-1}{\mathrm{i}(x^2+1)}\cdot\frac{y^2-1}{\mathrm{i}(y^2+1)} = \left(\frac{z^2-1}{\mathrm{i}(z^2+1}\right)^2 \tag{1}$$

este adevărată, atunci avem şi:

$$\left(\frac{x^2z^2-1}{2\mathrm{i}\,xz}\right)^2\left(\frac{2\mathrm{i}\,yz}{y^2z^2-1}\right)^2 = \frac{x^4-1}{2\mathrm{i}\,x^2}\cdot\frac{2\mathrm{i}\,y^2}{y^4-1}\cdot \tag{2}$$

Într-adevăr, relaţia (1) se mai poate scrie $\frac{x^2y^2-x^2-y^2+1}{x^2y^2+x^2+y^2+1} = \frac{z^4-2z^2+1}{z^4+2z^2+1}$, iar dacă la numărători adunăm numitorii şi din numitori scădem numărătorii avem $\frac{x^2y^2+1}{x^2+y^2} = \frac{z^4+1}{2z^2}$, adevărată.

Efectuînd calculele în relaţia (2) avem

$$(x^4y^4 - 2x^2z^2 + 1)(y^4 - 1) = (y^4z^4 - 2y^2z^2 + 1)(x^4 - 1).$$

Efectuînd înmulțirile, reducînd termenii asemenea și simplificînd cu $z_1^2 - z_2^2$, care nu poate fi zero căci aceasta implică $a = b = c$, găsim: $2x^2(x^2y^2 + 1) - (x^2 + y^2)(1 + z^2) = 0 \Rightarrow \frac{x^2y^2 + 1}{x^2 + y^2} = \frac{z^4 + 1}{2x^2}$ adică forma mai simplă la care a fost adusă relația (1) este adevărată.

6.50. Trebuie să avem $0 < \lg x \leqslant 1$, de unde rezultă $1 < x \leqslant 10$.

6.51. Într-adevăr, fie P maximul produsului și să presupunem prin absurd că două arce oarecare nu ar fi egale, $x_p \neq x_q$. Vom arăta că în acest caz putem găsi un produs $P_1 > P$, ceea ce contrazice presupunerea că P este maximum și deci $x_p = x_q$ oricare ar fi numerele naturale p și q mai mici decît n. Conform teoremei că dacă $x_p \neq x_q$, avem

$$\operatorname{tg} \frac{x_p + x_q}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{x_p + x_q}{2} > \operatorname{tg} x_p \operatorname{tg} x_q. \tag{1}$$

Dacă în produsul $P = \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2 \ldots \operatorname{tg} x_p \ldots \operatorname{tg} x_q \ldots \operatorname{tg} x_n$ înlocuim $\operatorname{tg} x_p \cdot \operatorname{tg} x_q$ prin $\operatorname{tg} \frac{x_p + x_q}{2} \operatorname{tg} \frac{x_p + x_q}{2}$ obținem produsul: $P_1 = \operatorname{tg} x_1 \cdot \operatorname{tg} x_2 \ldots \operatorname{tg} \frac{x_p + x_q}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{x_p + x_q}{2} \ldots \operatorname{tg} x_n$. Ținem seama de (1) și rezultă $P_1 > P$.

6.52. Dacă $\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$, atunci $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$; $t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1}{3}$, $\frac{\alpha}{2} \in \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{3}, \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} \right]$; $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 2$.

$\cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$; $\sin \alpha = \frac{2t}{1 + t^2}$; $\frac{\alpha}{2} \in \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{3}, \operatorname{arctg} 2 \right]$; $t \in \left[\frac{1}{3}, 2 \right]$.

Înlocuind $\cos \alpha$ și $\sin \alpha$ în funcție de t și înmulțind cu $\sqrt{1 + t^2}$ prima relație devine: $3\sqrt{5 + 5t^2 + 3 - 3t^2 - 8t} + \sqrt{2}\sqrt{5 + 5t^2 - 4 + 4t^2 - 6t} = 5\sqrt{1 + t^2 + 1 - t^2}$ sau $3\sqrt{2}(2 - t) + \sqrt{2}(3t - 1) = 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2}t + 3\sqrt{2}t - \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ (verificat).

A doua relație devine: $3\sqrt{5 + 5t^2 + 6t - 4 + 4t^2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{5 + 5t^2 - 8t + 3 - 3t^2} = 7\sqrt{1 + t^2 + 2t}$ sau $3(3t + 1) + \sqrt{2}\sqrt{2}(2 - t) = 7(1 + t)$ (verificat)

6.53. a) Folosim formulele: $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2}$; $\cos \frac{C}{2} \cos\left(D + \frac{C}{2}\right) = \left(\frac{\cos(C + D) + \cos D}{2}\right)$ și prima parte a egalității devine succesiv:

$$\frac{1 + \cos A + \cos D + \cos(C + D)}{2} = \frac{1 + \cos D}{2} +$$

$$+ \frac{\cos A + \cos(360° - A - B)}{2} = \cos^2 \frac{D}{2} + \cos \frac{B}{2} \cos\left(A + \frac{B}{2}\right).$$

b) Avem: $\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B-E}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{C-E}{2}=\frac{1}{2}\left[\cos\left(B-\frac{E}{2}\right)+\right.$
$\left.+\cos\frac{E}{2}+\cos\left(C-\frac{E}{2}\right)+\cos\frac{E}{2}\right]=\cos\frac{B+C-E}{2}\cdot\cos\frac{B-C}{2}+$
$+\cos\frac{E}{2}\cdot$ Dar $\frac{B+C-E}{2}=\frac{1}{2}(180^\circ-\sphericalangle CBE+180^\circ-\sphericalangle BCE-E)=$
$=90^\circ$, deci $\cos\frac{B+C-E}{2}=0$ și astfel egalitatea este justificată.

6.54. Avem $a^3-3a^2-3a+1+a^3+1-3a(a+1)=(a+1)a^2-$
$-4a+1)=0$. Rezultă $a_1=1$, $a_2=2+\sqrt{3}$, $a_3=2-\sqrt{3}$ sau $a_3=2-$
$-\sqrt{3}=\operatorname{tg}15^\circ$, $a_2=2+\sqrt{3}=\operatorname{tg}75^\circ=\operatorname{tg}(60^\circ+15^\circ)$ și $a_1=\operatorname{tg}(120^\circ+15^\circ)=$
$=-1$. Deci a poate fi înlocuit cu $\operatorname{tg}15^\circ$, $\operatorname{tg}75^\circ$, $\operatorname{tg}135^\circ$.

Din ecuația $x^3-3ax^2-3x+a=0$ avem $a=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\cdot$ Notăm $x=\operatorname{tg}\alpha$ și avem

$$a=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}=\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}(180^\circ k+3\alpha),\ k\in\mathbf{Z}.$$

1° Cazul $a=\operatorname{tg}15^\circ$. Pentru $k=0$ avem $3\alpha=15^\circ$, $\alpha_1=5^\circ$, $k=1$; $\alpha_2=65^\circ$, $k=2$, $\alpha_3=125^\circ$. Rezultă $x_1=\operatorname{tg}5^\circ$, $x_2=\operatorname{tg}65^\circ=\operatorname{ctg}25^\circ$; $x_3=$ $=\operatorname{tg}125^\circ=-\operatorname{ctg}35^\circ$.

2° Cazul $a=\operatorname{tg}75^\circ$. Avem $x_4=\operatorname{tg}75^\circ/3=\operatorname{tg}25^\circ$, $x_5=\operatorname{tg}(60^\circ+$ $+25)=\operatorname{tg}85^\circ=\operatorname{ctg}5^\circ$ și $x_6=\operatorname{tg}(120^\circ+25^\circ)=\operatorname{tg}145^\circ=-\operatorname{tg}35^\circ$.

3° Cazul $a=\operatorname{tg}135^\circ$, $\operatorname{tg}\frac{135^\circ}{3}=\operatorname{tg}45^\circ=1$ avem $x_7=\operatorname{tg}45^\circ=1$, $x_8=\operatorname{tg}(60^\circ+45^\circ)=\operatorname{tg}105^\circ=-\operatorname{tg}75^\circ=-\operatorname{ctg}15^\circ$; $x_9=\operatorname{tg}(120^\circ+$ $+45^\circ)=\operatorname{tg}160^\circ=-\operatorname{tg}95^\circ$. Avem $x_1+x_2+x_3=3a_1$; $x_4+x_5+x_6=$ $=3a_2$; $x_7+x_8+x_9=3a_3$.

$$\sum_{i=1}^{9}x_i=3(a_1+a_2+a_3)=3(-1+2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3})=3\cdot3=9.$$

6.55. Fie $E_n=\operatorname{tg}n\alpha-n\operatorname{tg}\alpha$. Pentru $n=1$, $E_1=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=0$. Pentru $n=2$, $E_2=\operatorname{tg}2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha$ și $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$. Putem scrie $E_2=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ $-2\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}^3\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot$ și cum $0<\operatorname{tg}\alpha<1$ rezultă $E_2>0$ adică $\operatorname{tg}2\alpha>2\operatorname{tg}\alpha$.

Să presupunem că este adevărată pentru un $n>1$ oricare adică $E_n=$ $=\operatorname{tg}n\alpha-n\operatorname{tg}\alpha>0$ și $0<\alpha<\frac{\pi}{4(n-1)}$ și să arătăm că în acestă ipoteză avem și $E_{n+1}=\operatorname{tg}(n+1)\alpha-(n+1)\operatorname{tg}\alpha>0$, $0<\alpha<\frac{\pi}{4n}\cdot$ Dar $\operatorname{tg}(n+1)\alpha-(n+1)\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{tg}n\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}n\alpha}-(n+1)\operatorname{tg}\alpha=$
$=\frac{\operatorname{tg}n\alpha-n\operatorname{tg}\alpha+(n+1)\operatorname{tg}n\alpha\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}n\alpha}\cdot$ Numărătorul este pozitiv.

Numitorul este de asemenea pozitiv, căci $0 < \pi/4n < \pi/4$ rezultă $0 < \operatorname{tg}\alpha < 1$ și cum $0 < n\alpha < \pi/4$ și $0 < \operatorname{tg} n\alpha < 1$ și deci produsul $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} n\alpha < 1$. Astfel că $E_{n+1} > 0$, adică $\operatorname{tg}(n+1) > (n+1)\operatorname{tg}\alpha$.
Prin urmare inegalitatea este demonstrată.

6.56. $E = (1 + 2\cos\alpha + 3\cos^2\alpha + \ldots + n\cos^{n-1}\alpha)(1 - \cos\alpha) = 1 + 2\cos\alpha + 3\cos^2\alpha + \ldots + n\cos^{n-1}\alpha - \cos\alpha - 2\cos^2\alpha - 3\cos^3\alpha - \ldots - n\cos^n\alpha = 1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \ldots + \cos^{n-1}\alpha - n\cos^n\alpha = \dfrac{1 - \cos^n\alpha}{1 - \cos\alpha}$

$$- n\cos^n\alpha = \frac{1 - \cos^n\alpha - n\cos^n\alpha + n\cos^{n+1}\alpha}{1 - \cos\alpha} =$$

$$= \frac{1 - (n+1)\cos^n\alpha + n\cos^{n-1}\alpha}{1 - \cos\alpha} \text{ deci } S_n = \frac{E}{1 - \cos\alpha} =$$

$$= \frac{1 - (n+1)\cos^n\alpha + n\cos^{n-1}\alpha}{(1 - \cos\alpha)^2}, \text{ unde } \cos\alpha \neq 1.$$

6.57. Se impune condiția $\cos x \neq 0$, $\sin x \neq 0$, $\cos x > 0$, $\sin x > 0$ și $\cos x \neq 1$, $\sin x \neq 1$, Ecuația se mai scrie $\lg_{\cos x}\sin x + \dfrac{1}{\lg_{\cos x}\sin x} =$
$= 2$ de unde $(\lg_{\cos x}\sin x - 1)^2 = 0$ sau $\lg_{\cos x}\sin x = 1 \Rightarrow \cos x = \sin x$, $\operatorname{tg} x = 1$, dar $x = 2k\pi + \pi/4$ pentru a avea $\sin x \in (0, 1)$ și $\cos x \in (0, 1)$. Soluția $x = (2k+1)\pi + \pi/4$, $k \in \mathbf{Z}$, nu convine deoarece $\sin x$ și $\cos x$ ar fi negative.

6.58. Notăm $\sin x = y$; rezultă inegalitățile $2y \neq 1$, $y > 0$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$; $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x > 0 \Rightarrow -\sqrt{2}/2 < y < \sqrt{2}/2$. Deci $0 < y < 1/2 < y < \sqrt{2}/2$.
Pentru $y > 1/2$ avem $\sqrt{\cos 2x} = \sqrt{1 - 2\sin^2 x} = \sqrt{1 - 2y^2} \leqslant 1. \Rightarrow \sqrt{1 - 2y^2} < \sqrt{2}y \Rightarrow 1 - 2y^2 - 2y \leqslant 0$, $y \leqslant \dfrac{-1 - \sqrt{3}}{2}$; $y \geqslant \dfrac{-1 + \sqrt{3}}{2}$, dar $y > 1/2$ deci rămîne valabil $1/2 < y < \sqrt{2}/2$; $\pi/6 < x < \pi/4$; $3\pi/4 < x < 5\pi/6$. Pentru $0 < y < 1/2$ reținem $\dfrac{-1 + \sqrt{3}}{2} \leqslant y < \dfrac{1}{2}$.

6.59. Domeniul soluțiilor acestei ecuații este dat de soluția inecuației $\sin x > 0$, deoarece $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$, deci $x \in \bigcup_{k\in Z}(2k\pi, (2k+1)\pi)$. Pentru a rezolva ecuația vom nota $\log_2 \sin x = y$ și ecuația devine: $3y^2 + 2y - 1 = 0 \Rightarrow y_1 = \dfrac{1}{3}$; $y_2 = 1 -$. deci $\sin x = 2^{\frac{1}{3}} > 1$, care nu corespunde sau $\sin x = 2^{-1}$, de unde rezultă soluția ecuației $x = k\pi + (-1)\dfrac{\pi}{6}$, unde $k \in \mathbf{Z}$.

6.60. Deoarece $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$, $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$, ecuația dată este echivalentă cu $\sin x + |\cos x| = m/\sqrt{2}$, $x \in [0, \pi]$ sau cu $\sin x + \cos x = m/\sqrt{2}$, $x \in [0, \pi/2]$ și $\sin x - \cos x = m/\sqrt{2}$, $x \in [\pi/2, \pi]$.
Aceasta se poate aduce la forma $\sin(x + \pi/4) = m/2$, $x \in [0, \pi/2]$ și $\sin(x - \pi/4) = m/2$, $x \in (\pi/2, \pi]$. Deoarece $(x + \pi/4) \in [\pi/4, 3\pi/4]$, $(x - \pi/4) \in (\pi/4,$

$3\pi/4]$ rezultă $\sqrt{2}/2 \leqslant m/2 \leqslant 1$, adică $m \in [\sqrt{2}, 2]$. Pentru $m = \sqrt{2}$ găsim $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/2$ și $x_3 = \pi$.

6.61. În identitatea $\operatorname{ctg} n\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2 \alpha + C_n^2 \cdot \operatorname{ctg}^{n-2} \alpha + \ldots}{C_n^1 \cdot \operatorname{ctg}^{n-1} - C_n^3 \operatorname{ctg}^{n-3} \alpha + \ldots}$, punem $n\alpha = \pi/3 + k\pi \Rightarrow \alpha = \dfrac{(3k+1)\pi}{3n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, și obținem egalitatea $\dfrac{\operatorname{ctg}^n \alpha - C_n^2 \operatorname{ctg}^{n-2} \alpha + \ldots}{C_n^1 \cdot \operatorname{ctg}^{n-1} \alpha - C_n^3 \cdot \operatorname{ctg}^{n-3}\alpha + \ldots} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, de unde deducem că ecuația:

$$\sqrt{3} \cdot x^n - C_n^1 \cdot x^{n-1} - 3C_n^2 \cdot x^{n-2} + C_n^3 \cdot x^{n-3} + \ldots = 0 \qquad (1)$$

admite rădăcinile: $\operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{3n}, \operatorname{ctg} \dfrac{4\pi}{3n}; \operatorname{ctg} \dfrac{7\pi}{3n}; \ldots; \operatorname{ctg} \dfrac{(3n-2)\pi}{3n}$.

Avînd în vedere relațiile dintre rădăcini și coeficienți în ecuația (1) deducem $\operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{3n} + \operatorname{ctg} \dfrac{4\pi}{3n} + \operatorname{ctg} \dfrac{7\pi}{3n} + \ldots + \operatorname{ctg} \dfrac{(3n-2)\pi}{3n} = \dfrac{C_n^1}{\sqrt{3}} = \dfrac{n}{\sqrt{3}} = \dfrac{n\sqrt{3}}{3} = n \operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{3}$.

6.62. Avem $\sin x > 0$ de unde $2k\pi < x < (2k+1)\pi$. Semnul egal, adică $\lg_{\sin x} = 0$, are loc adică $x = 2k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$.

6.63. Înmulțind în ambele părți ale egalității cu $\cos 10^\circ \cos 18^\circ \neq 0$ și relația cerută se mai scrie:

$2^5 \sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ \sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 40^\circ = \cos 10^\circ \cdot \cos 18^\circ$,

$2^3 \sin 20^\circ \cdot \sin 36^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 40^\circ = \cos 10^\circ \cdot \cos 18^\circ$,

$2 \sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \sin 72^\circ = \cos 10^\circ \cdot \cos 18^\circ$,

$\sin 80^\circ \cdot \sin 72^\circ = \cos 10^\circ \cdot \cos 18^\circ$ egalitate adevărată deoarece $\sin 80^\circ = \cos 10^\circ$ și $\sin 72^\circ = \cos 18^\circ$.

6.64. a) Folosim relațiile $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

$\cos 60^\circ = 4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ = 1/2 \Rightarrow 8\cos^3 20^\circ - 6\cos 20^\circ - 1 = 0$ deci $x_1 = \cos 20^\circ$ este o rădăcină a ecuației date.

$$-\sin 30^\circ = -\sin 3(10^\circ) = -3\sin 10^\circ + 4\sin^3 10^\circ = -\frac{1}{2} \quad \text{sau}$$

$8(-\sin 10^\circ)^3 - 6(-\sin 10^\circ) - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = -\sin 10^\circ$; $\cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2} = \cos(3 \cdot 40^\circ) = 4\cos^3 40 - 3\cos 40^\circ$ sau $-8\cos^3 40^\circ + 6\cos 40^\circ - 1 = 0$, sau $8(-\cos 40^\circ) - 6(-\cos 40^\circ) - 1 = 0$.

b) Rădăcinile ecuației date slnt :

$$\cos 20^\circ - \cos 40^\circ \text{ și } -\sin 10^\circ = -\cos 80^\circ.$$

Folosind formulele lui Viéte avem

$$x_1 + x_2 + x_3 = \cos 20^\circ - \cos 40^\circ - \cos 80^\circ = 0,$$

$$\Sigma x_1 x_2 = -6/8 = -3/4;\ \Sigma x_i = \Sigma x_i)^2 - 2\Sigma x_1 x_2 = 0 - 2(-3/4) = 6/4 = 1{,}5 \Rightarrow \cos^2 20^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 80^\circ = 1{,}5.$$

Dacă $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, atunci $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3x_1x_2x_3 =$

$= 3\cos 20° (-\cos 40°)(-\cos 80°) = +3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = +0{,}375.$

6.65. Relațiile între rădăcini și coeficienți ne dau

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = -a;$$

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma = b;\ \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma = -c.$$

Dar $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma} = \frac{c-a}{1-b};$

$$\cos(2\alpha + 2\beta + 2\gamma) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha+\beta+\gamma)}{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha+\beta+\gamma)} = \frac{(1-b)^2 - (c-a)^2}{(1-b)^2 + (c-a)^2}.$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta + 2\gamma) = \frac{2\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)}{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha+\beta+\gamma)} = \frac{2(1-b)(c-a)}{(1-b)^2 + (c-a)^2};$$

6.66. a) $8\cos x \cos 2x \cos 4x = 8\cos x (2\cos^2 x - 1) \cdot [(2\cos^2 x - 1)^2 - 1] = 1$ sau $(16\cos^3 x - 8\cos x)(8\cos^4 x - 8\cos x + 1) = 1$ de unde $128\cos^7 x - 128\cos^5 x + 16\cos^3 x - 64\cos^5 x + 64\cos^2 x - 8\cos x - 1 = 0$ sau

$$128\cos^7 x - 192\cos^5 x + 8\cos^3 x - 8\cos x - 1 = 0. \qquad (1)$$

b) Notînd $2\cos x = y$ obținem $y^7 - 6y^5 + 10y^3 - 4y - 1 = (y - 1)(y^6 + y^5 - 5y^4 - 5y^3 + 5y^2 + 5y + 1) = 0.$

c) Rezolvăm ecuația $8\cos x \cos 2x \cos 4x = 1$. Avem

$8\cos x \cos 2x \cos 4x \sin x \sin 2x \sin 4x = \sin x \sin 2x \sin 4x \neq 0$

sau $\sin 2x \sin 4x \sin 8x = \sin x \sin 2x \sin 4x \neq 0.$

Rezultă $\sin 8x - \sin x = 0$ și $\sin x \sin 2x \sin 4x \neq 0$

sau $2\sin\frac{7x}{2} = 0;\ x_1 = \frac{2k\pi}{7} \Rightarrow y_1 \in \left\{\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}, \frac{8\pi}{7}, \frac{10\pi}{7}, \frac{12\pi}{7}\right\}.$

$\cos\frac{9x}{2} = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{(2k+1)\pi}{9} \Rightarrow x_2 \in \left\{\frac{\pi}{9}, \frac{3\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}\right\}.$

$y \in \left\{2\cos\frac{2\pi}{7}, 2\cos\frac{4\pi}{7}, 2\cos\frac{6\pi}{7}, 2\cos\frac{\pi}{9}, 2\cos\frac{3\pi}{9}, 2\cos\frac{5\pi}{9}, 2\cos\frac{7\pi}{9}\right\}.$

Observăm că $2\cos\frac{3\pi}{9} = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 = y_7.$

c) Rădăcinile ecuației $y^6 + y^5 - 5y^4 - 5y^3 + 5y^2 + 5y + 1 = 0$. sînt $y \in \left\{2\cos\frac{2\pi}{7}, 2\cos\frac{4\pi}{7}, 2\cos\frac{6\pi}{7}, 2\cos\frac{\pi}{9}, 2\cos\frac{5\pi}{9}, 2\cos\frac{7\pi}{9}\right\}$. Dar $\Sigma y_i = -1$ și rezultă prima relație.

$\Pi y_i = 64\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9} = 1,$

$\frac{y^2}{4} \in \left\{\cos^2\frac{\pi}{7};\ \cos^2\frac{4\pi}{7} = \left(-\sin\frac{\pi}{14}\right)^2;\ \cos^2\frac{6\pi}{7} = \left(-\cos\frac{\pi}{7}\right)^2;\ \cos^2\frac{\pi}{9};\right.$

$\cos^2\frac{5\pi}{9}=\left(-\sin\frac{\pi}{18}\right)^2\Big\}$ și $\cos^2\frac{7\pi}{9}=\left(-\cos\frac{\pi}{9}\right)^2$. Mai avem $\Sigma y_i^2=(\Sigma y_i)^2-$ $-2\Sigma y_1y_2=12(-5)=11$ deci $\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{6}y_i^2=\frac{11}{4}$, ceea ce trebuie arătat.

6.67. a) ,b) Înmulțind ecuația dată cu $\sin x\sin 2x\sin 3x\sin 4x\neq 0$ și obținem $\sin 2x\sin 4x\sin 6x\sin 7x=\sin 2x\sin 3x\sin 4x\neq 0$, sau $\sin 6x\cdot$ $\cdot\sin 8x=\sin x\sin 3x$, cu $\sin x\sin 2x\sin 3x\sin 4x\neq 0$. Avem: $\cos 14x-$ $-\cos 2x=\cos 4x-\cos 2x$ sau $\cos 14x-\cos 4x=0$, $\sin 9x\sin 5x=0$. adică $x_1=k\pi/9$ și $x_2=k\pi/5$, $k\in\mathbf{Z}$ și condiția: $\sin x\sin 2x\sin 3x\sin 4x\neq 0$.

c) Valorile lui x cuprinse în $(0, 360°)$ rezultă că sînt $\frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{10\pi}{9}$ $\frac{11\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}$ adică 36°, 72°, 216°, 252°, sau $x\in\left\{\frac{k\pi}{9}\cup\frac{k\pi}{5}, \frac{k\pi}{12}\right\}$, $k\in\mathbf{Z}$.
$\cos x$ poate lua valorile: $\pm\cos 20°$, $(\cos 200°=-\cos 20°)$, $\pm\cos 40°$, $(\cos 220°=-\cos 40°)$, $\pm\cos 80°$, $(\cos 260°=-\cos 80°)$, $\pm\cos 36°$, $(\cos 216°=-\cos 36°)$, $\pm\cos 72°$, $(\cos 252°=-\cos 72°)$.
Prin urmare, $y=2\cos^2 x\in\{4\cos^2 20°,\ 4\cos^2 40°,\ 4\cos^2 80°,\ 4\cos^2 36°$ $4\cos^2 72°\}$ sau $y\in\{4\sin^2 10°,\ 4\sin^2 18°,\ 4\cos^2 20°,\ 4\cos^2 36°,\ 4\cos^2 40°\}$.

Pentru a stabili ecuația (1) din enunț folosim formulele:
$\cos 2x=2\cos^2 x-1$, $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$,
$\cos 4x=2(2\cos^2 x-1)^2-1=8\cos^4 x-8\cos^2 x-1$.
$16\cos x(2\cos^2 x-1)(4\cos^3 x-4\cos 3x)(8\cos^4 x-8\cos^2 x+1)=1$
sau $(32\cos^3 x-16\cos x)(4\cos^3 x-3\cos x)(8\cos^4 x-8\cos^2 x+1)=1$;
$(128\cos^6 x-16\cos^4 x+48\cos^2 x)(8\cos^4 x-8\cos^2 x+1)=1$.
$1\,024\cos^{10} x-2304\cos^8 x+1\,792\cos^6 x-384\cos^4 x+48\cos^2 x-1=0$.
Pentru $4\cos^2 x=y$ obținem

$$y^5-9y^4+28y^3-24y^2+3y-1=0. \tag{1}$$

b) Din relația (1), conform relațiilor lui Viète, $\Sigma y_i=9$ deci

$$4\Sigma\cos^2 x_i=4(\sin^2 10°+\sin^2 18°+\cos^2 20°+\cos^2 36°+\cos^2 40°)=9. \tag{2}$$

d) Pentru $x=20°$, ecuația $16\cos x\cos 2x\cos 3x\cos 4x=1$ ne dă:
$16\cos 20°\cos 40°\cos 60°\cos 80°=1$ sau $8\sin 10°\cos 20°\cos 40°=1$; (3)
iar pentru $x=36°$ avem $16\cos 36°\cos 72°\cos 108°\cos 144°=1$ sau

$$16\cos 36°\cos 72°(-\cos 72°)(-\cos 36°)=1,\ 16\cos^2 36°\cos^2 72°=1,$$
$$4\cos 36°\cos 72°=4\sin 18°\cos 36°=1. \tag{4}$$

Înmulțind (1) cu (2) obținem $32\sin 10°\sin 18°\cos 20°\cos 36°\cos 40°=1$.

6.68. Avem $x^2=\sqrt{2}\pm\sqrt{2-2+2\operatorname{tg}^2 a}=\sqrt{2}\pm\sqrt{2\operatorname{tg}^2 a}=\sqrt{2}(1\pm$ $\pm|\operatorname{tg} a|)$.

Discuție. Dacă $\operatorname{tg}^2 a>1$, ecuația dată are numai două rădăcini reale (2 complexe). Dacă $\operatorname{tg}^2 a\leqslant 1$, ecuația are toate cele patru rădăcini reale.

Dacă $\operatorname{tg}^2 a > 1 \Rightarrow a \in [45°, 90°) \cup (90°, 135°) \cup (225,°, 270°) \cup$
$\cup (270°, 315°)$.

Dacă $\operatorname{tg}^2 a \leqslant 1 \Rightarrow a \in [0, 45°) \cup [135°, 225°] \cup [375°, 360°]$.

6.69. a) Avem $3(x^3 - 3x) = \sqrt{3}\ (3x^2 - 1)$ sau $\dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} =$

$= \operatorname{tg}(30° + 180°k) = \dfrac{3\operatorname{tg}(10° + 60°k) - \operatorname{tg}^3(10° + 60°k)}{1 - 3\operatorname{tg}^2(10° + 60°k)} \Rightarrow x = \operatorname{tg}(10° +$
$+ 60°k), \quad k \in \mathbf{Z}$.

Rezultă $x_1 = \operatorname{tg} 10°$, $x_2 = \operatorname{tg}(10° + 60°) = \operatorname{tg} 70° = \operatorname{ctg} 20°$,

$x_3 = \operatorname{tg}(10° + 120°) = \operatorname{tg} 130° = -\operatorname{tg} 50° = -\operatorname{ctg} 40°$.

b) $x_1 + x_2 + x_3 = \sqrt{3}$ sau $\operatorname{tg} 10° + \operatorname{ctg} 20° - \operatorname{ctg} 40° = \operatorname{ctg} 30°$ sau
$\operatorname{tg} 10° + \operatorname{ctg} 20° = \operatorname{ctg} 30° + \operatorname{ctg} 40°$.

$x_1 x_2 x_3 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} = -\operatorname{tg} 30°$, sau $\operatorname{tg} 10° \operatorname{ctg} 20° (-\operatorname{ctg} 40°) = -\operatorname{tg} 30°$,
deci $\operatorname{tg} 10° \operatorname{ctg} 20° \operatorname{ctg} 40° = \operatorname{tg} 30°$.

6.70. Notăm $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$, deci $\cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$. Ecuația devine
$(m + 1)(1 - t^2) + m(1 - t^2)(1 + t^2) + (m - 1)(1 + t^2)^2 = 0$
sau $(m + 1)(1 + t^4 - 2t^2) + m(1 - t^4)(m - 1)(1 + t^4 + 2t^2) = 0$. Rezultă:

$mt^4 - 4t^2 + 3m = 0$; $t^2 = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 3m^2}}{m} \geqslant 0$, $4 - 3m^2 \geqslant 0$, dar $\sqrt{4 - 3m^2} \leqslant$
$\leqslant 2$; prin urmare $2 \pm \sqrt{4 - 3m^2} > 0$, $t^2 \geqslant 0$, rezultă și $m > 0$, de unde
avem $m \in \in [0, 2/\sqrt{3}]$.

6.71. x și y pot fi unghiurile B și C ale unui triunghi oarecare ABC și deci $\sin(x + y) = \sin(B + C) = \sin A$. Inegalitatea devine $m(m - 1)\sin a +$
$+ m(\sin B - \sin C) + \sin C > 0$. Folosind formula $a = 2R \sin A$ și analoagele, obținem: $m(m - 1)\ a + m(b - c) + c > 0$ sau $am^2 - (a - b + c)\ m +$
$+ c > 0$. Acest trinom în m este totdeauna pozitiv oricare fi m dacă $\Delta_m \leqslant 0$, deoarece $a > 0$.

$\Delta_m = (a - b + c)^2 - 4ac = (a - b + c + 2\sqrt{ac})(a - b + c - 2\sqrt{ac})$,
$a - b - c + 2\sqrt{ac} > 0$ deoarece $a + c - b > 0$.

Să arătăm că $a - b + c - 2\sqrt{ac} < 0$.

Cazul 1°. Dacă $a < c \Rightarrow \sqrt{ac} > a$ și deci $a - b + c - 2\sqrt{ac} < a -$
$- b + c - 2a = -a - b + c < 0$.

Cazul 2°. Dacă $a = c \Rightarrow \sqrt{ac} = a$ și rezultă $a - b + c - 2\sqrt{ac} = a -$
$- b + c - 2a = c - a - b < 0$.

Cazul 3°. Dacă $a \geqslant c$. În acest caz $\sqrt{ac} > c$ și rezultă $a - b + c - 2\sqrt{ac} <$
$< a - b + c - 2c = a - b - c < 0$.

Deci $\Delta < 0$; $a > 0$, inegalitatea este stabilită.

6.72. Dacă $\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$, atunci $\sin \alpha = \frac{3}{5}$;

$\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$. Notăm $t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1}{3}$.

$$\frac{\alpha}{2} \in \left[\operatorname{arc tg} \frac{1}{3}, \operatorname{arc tg} \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}\right]; \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 2.$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \sin \alpha = \frac{2t}{1 + t^2};$$

$$\frac{\alpha}{2} \in \left[\operatorname{arc tg} \frac{1}{2}, \operatorname{arc tg} 2\right], t \in \left[\frac{1}{3}, 2\right]$$

Înlocuim $\cos \alpha$ și $\sin \alpha$ în funcția de t și înmulțind cu $\sqrt{1 + t^2}$ obținem:

$$3\sqrt{5 + 5t^2 + 8t} - 3 + 3t^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{5 + 5t^2 - 6t} - 4 + 4t =$$
$$= 5\sqrt{1 + t^2} + 1 - t^2 = 5\sqrt{2} \text{ sau } 3\sqrt{2}(2t + 1) - 2\sqrt{2}(3t - 1) = 6\sqrt{2}t +$$
$$+ 3\sqrt{2} - 6\sqrt{2}t + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}; 5\sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

6.73. Notăm $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ și ținem seama că $\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$, $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$. Înlocuim în prima partea a ecuației și înmulțind cu $\sqrt{1 + t^2} > 0$;

$$3\sqrt{5(1 + t^2) - 4(1 - t^2) - 6t} + 2\sqrt{2}\sqrt{5(1 + t^2) + 3(1 + t^2) - 8t} =$$
$$= 3\sqrt{9t^2 - 6t + 1} + 2\sqrt{2}\sqrt{2(4 - 4t + t^2)}. \text{ Ecuația devine}$$
$$3 \mid 3t - 1 \mid + 4 \mid t - 2 \mid = 5 \mid 1 + t \mid.$$

Cazul I. $t \in (-\infty, -1)$. Avem $3(1 - 3t) + 4(2 - t) = -5 - 5t$ sau $-12t + 16 = 0 \Rightarrow t = 4/3 \in (-\infty, -1)$, deci în acest caz ecuația nu admite rădăcini.

Cazul II. $t \in [-1, 1/3]$. Avem $3(1 - 3t) + 4(2 - t) = 5(1 + t)$ sau $-18t + 6 = 0$, $t = 1/3$ (convine 1/3 fiind extremitatea intervalului).

Cazul III. $t \in [1/3, 2]$. Avem $3(3t - 1) + 4(2 - t) = 5(1 + t)$, $0 = 0$, identitate, deci $t \in [1/3, 2]$; $x/2 \in [\operatorname{arc tg} \frac{1}{3} + k\pi, \operatorname{arc tg} 2 + k\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$.

Cazul IV. $t \in (2, +\infty)$. Avem

$3(3t - 1) + 4(t - 2) = 5(1 + t) \Rightarrow t = 2$ (nu convine)

Răspuns. $t \in \left[\frac{1}{2}, 2\right] \Rightarrow \frac{x}{2} \in [\operatorname{arc tg} \frac{1}{3}, \operatorname{arc tg} 2]$.

6.74. a) Fie P un punct din spațiu. Avem cunoscută relația $\mathbf{PA} + \mathbf{PB} + \mathbf{PC} + \mathbf{PD} = 4\mathbf{AM}$; $\mathbf{PA} + \mathbf{PB} = 2\mathbf{PS}$, $\mathbf{PB} + \mathbf{PC} = 2\mathbf{PR}$, dar $2\mathbf{PS} + 2\mathbf{PR} = 4\mathbf{PM}$. Dacă $P \equiv A$ avem relația cerută.

b) Din relația $\mathbf{PA} + \mathbf{PB} + \mathbf{PC} + \mathbf{PD} = 4\mathbf{PM}$;

dacă $P \equiv M$ obținem relația: $\mathbf{MA} + \mathbf{MB} + \mathbf{MC} + \mathbf{MD} = \mathbf{0}$. Mai avem $\mathbf{MA} + \mathbf{MB} + \mathbf{MC} = 3\mathbf{MG}_d$; $\mathbf{MB} + \mathbf{MC} + \mathbf{MF} = 3\mathbf{MG}_a$; $\mathbf{MC} + \mathbf{MC} + \mathbf{MA} = 3\mathbf{MG}_b$; $\mathbf{MD} + \mathbf{MA} + \mathbf{MB} = 3\mathbf{MG}_c$;

Însumînd obținem $3(\mathbf{MA}+\mathbf{MB}+\mathbf{MC}+\mathbf{MD}) = 3(\mathbf{MG}_a+\mathbf{MG}_b+\mathbf{MG}_c+\mathbf{MG}_d) = \mathbf{0}$.

b') $\mathbf{AB} + \mathbf{AC} + \mathbf{AB} = 4\mathbf{AM} = 3\mathbf{AG}_a$.

Proiectînd pe direcția $AM(AG)$ și pe AB, AC, AD avem:

$$b\cos(BAM) + c\cos(CAM) + d\cos(DAM) = 4\,\|AM\| \tag{1}$$

$$d + \cos\beta + b\cos\gamma = 4\,\|AM\|\cos(DAM) \tag{2}$$

$$c + b\cos\delta + d\cos\beta = 4\,\|AM\|\cos(CAM) \tag{3}$$

$$b + \cos\delta + d\cos\gamma = 4\|AM\|\cos(BAM). \tag{4}$$

Rezultă: $\cos(DAM) = \dfrac{d + \cos\beta + b\cos\gamma}{4\,\|AM\|}$. (2')

$$\cos(CAM) = \frac{c + b\cos\delta + d\cos\beta}{4\,\|AM\|} \tag{3'}$$

$$\cos(BAM) = \frac{b + c\cos\delta + d\cos\gamma}{4\,\|AM\|} \tag{4'}$$

Din (2'), (3') (4') relația (1) devine

$$\frac{b^2 + bc\cos\delta + bd\cos\gamma + c^2 + bc\cos\delta + cd\cos\beta + d^2 + dc\cos\beta + bd\cos\gamma}{4\,\|AM\|} = 4\,\|AM\|.$$

Deci $\|AM\| = \dfrac{1}{4}\sqrt{b^2 + c^2 + d^2 + 2bc\cos\delta + 2bd\cos\gamma + 2dc\cos\beta}$

$\cos(DAM)$, $\cos(CAM)$, $\cos(BAM)$ sînt date de

$$\cos(DAM) = \frac{d + c\cos\beta + b\cos\gamma}{4\,\|AM\|} =$$

$$= \frac{d + c\cos\beta + b\cos\gamma}{b^2 + c^2 + d^2 + 2bc\cos\delta + 2b\,d\cos\gamma + 2cd\cos\beta}$$ — și analoagele.

Probleme recapitulative și chestiuni de examen cu soluții

ENUNȚURI

7.1. Să se calculeze $E = \sin^2 17° + \sin 37° + \sin^2 53° + \sin^2 73°$.

7.2. Să se arate că $E = \dfrac{\sin^6 15° + \cos^6 15°}{\sin^8 15° + \cos^8 15°} = \dfrac{107}{97}$. *(C. Ionescu-Țiu)*

7.3. Fie ecuația $x^2 + px + q = 0$ cu rădăcinile cuprinse în intervalul $(\sin a, \cos a)$, unde $a \in (0, \pi/4)$. Să se arate că

$$(1 - q)\sin^3 a < -p\sin^2 2a < 8(1 - q)\cos^3 a.$$

Caz particular $a = 30°$. (G.M.B., 16 860, *C. Ionescu-Țiu*)

7.4. Fie propozițiile:

$$p: \left[\cos a \neq 0;\ \sin b + \cos b \neq 0;\ \operatorname{tg} a = \frac{\sin b - \cos b}{\sin b + \cos b}\right],$$

$$q: [2\cos^2 a = (\sin b + \cos b)^2 \neq 0],$$

$$r: \left[\cos a \neq 0;\ \sin b + \cos b \neq 0,\ \operatorname{tg} a = \frac{\cos b - \sin b}{\cos b + \sin b}\right],$$

Să se determine care din propoziițiile $p \to q$, $r \to q$, $q \to p$, $q \to r$ sînt adevărate. *(C. Ionescu-Țiu)*

7.5. Să se arate că oricare ar fi $n \geqslant 3$, există inegalitatea $\sin\dfrac{\pi}{n} > \dfrac{3}{4n}$.

(G.M.B., 1 716, *C. Ionescu-Țiu*)

7.6. Să se arate că dacă $45° > x > y > 0°$, atunci

$$\frac{\cos x}{\cos y} < \frac{\sin x}{\sin y} < \frac{\sin x + \cos x - \sqrt{\cos 2x}}{\sin y + \cos y - \sqrt{\cos 2y}}.$$

(G.M.B., 10 126, *C. Ionescu-Țiu*)

7.7. Să se arate că dacă $f(\sin x) = g(\operatorname{tg}(x/2))$, atunci

$$g(\sin x) = f\left(\frac{2\sin x}{1 + \sin^2 x}\right).$$ (S.G.M., VII: 1 000, *C. Ionescu-Țiu*)

7.8. Să se arate că dacă $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, atunci

$$E = \frac{(a + b)(1 - ab)}{(1 + a^2)(1 + b^2)} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$ *(C. Ionescu-Țiu)*

7.9. a) Știind că $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2\sqrt{2}$ să se calculeze $\operatorname{tg} 2x$.

b) Știind că $\operatorname{tg}^2 2x = 1$ să se calculeze $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

c) Să se rezolve ecuația $\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 2\sqrt{2}$.

d) Pentru care valori ale lui $x \in (0, \pi/2)$ avem $\operatorname{tg} 3x + \operatorname{ctg} 3x = 2\sqrt{2}$?

(C. Ionescu-Țiu)

7.10. Să se rezolve ecuația $\dfrac{\sin x + \sin 2x}{\sin 3x} + 1 = 0$.

7.11. Se dă ecuația: $m \cos 2x + 4(m+1)\sin x - 3m - 4 = 0$, unde $m \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$.

a) Să se rezolve și să se discute.

b) Să se scrie soluțiile pentru $m = -2-\sqrt{2}$.

(Institutul Politehnic, Galați, 1970)

7.12. Să se arate că dacă $A + B + C = 180°$, atunci

$$\sin\frac{A-B}{2} + \sin\frac{A-C}{2} + \sin\frac{3A}{2} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Caz particular cînd A, B, C, sînt unghiurile unui triunghi.

(C. Ionescu-Țiu)

7.13. a) Notînd $\sqrt[3]{\sec a + \operatorname{tg} a} + \sqrt[3]{\sec a - \operatorname{tg} a} = m$ și $\sqrt[3]{\sec a + \operatorname{tg} a} - \sqrt[3]{\sec a - \operatorname{tg} a} = n$, să se arate că $m^3 - 3m - 2\sec a = 0$ și $n^3 + 3n - 2\operatorname{tg} a = 0$.

b) Să se arate că dacă $n = 1$, atunci $\operatorname{tg} a = 2$, dacă $n = 2$ să se calculeze m iar dacă $m = 3$ să se calculeze n.

c) Să se arate că polinomul $x^6 - 2(\sec a + \operatorname{tg} a)x^3 - 9x^2 - 6(\sec a - \operatorname{tg} a)x + 4\sec a \operatorname{tg} a$, unde $0 < a < 90°$, se divide cu $x^2 - 2\sqrt[3]{\sec a + \operatorname{tg} a}\cdot x + \sqrt[3]{(\sec a + \operatorname{tg} a)^2} - \sqrt[3]{(\sec a - \operatorname{tg} a)^2}$. (G.B.M., 11 089, *C. Ionescu-Țiu*).

7.14. Să se arate că în ecuația $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ cu toate rădăcinile reale cuprinse în intervalul $(1/4, 1/3)$ avem inegalitățile

$1\,680(1 - b + d) < 1\,127(c - a) < 3\,864(1 - b + d)$. *(C. Ionescu-Țiu)*

7.15. Fie ecuația $(\sin x + \cos x)\sin 2x = \sqrt{2a}$, unde a este un parametru real.

1° Să se arate:

a) Dacă $|a| > 1$, ecuația nu are soluții;
b) Dacă $|a| \leqslant 1$, ecuația are soluții.

2° Să se rezolve ecuația dată cînd $|a| = 1$.

(Facultatea de Matematică, București, 1976)

7.16. Fie un triunghi oarecare ABC și bisectoarea interioară a unghiului C întîlnește cercul circumscris triunghiului în punctul E. Să se arate că $2CE > AC + BC$.

7.17. Să se arate că dacă $0° < x < 5°$ avem
$\cos(40° - 3x)\sin 70° - 2x) > \sin(40° + 4x)\cos(10° + 4x)$.

(G.M.B., 6 224, *C. Ionescu-Țiu*)

7.18. Să se arate că dacă $0 \leqslant x \leqslant 3°$, atunci $\sin(5x + 37°)\cos(5x + 23°) \geqslant (\sin 11x + 19°)\cos(11x + 5°)$.

(G.M.B., 6 441, *C. Ionescu-Ţiu* 1964).

7.19. Să se arate că dacă $0° \leqslant x \leqslant 12°$ avem

$$-1/4 \leqslant \sin(5x - 30°)\cos(5x + 60°) \leqslant 0$$

$$1/4 \leqslant \sin(5x/2 + 30°)\cos(5x/2 - 60°) \leqslant 3/4.$$

(G.M.B., 6 748, *C. Ionescu-Ţiu*).

7.20. Să se afle numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $3\sin x - x = 0$.

(C. Ionescu-Ţiu)

7.21. Să se arate că:

$$1 + \sin^2 a \sin^2 b \geqslant \sin^2 a + \sin^2 b,$$

$$1 \leqslant \sin^2 a + \sin^2 b \sin^2 c + \cos^2 a(\cos^2 b + \cos^2 c) \leqslant 2,$$

$$\sin^2 a \sin^2 b + \sin^2 c \sin^2 d + \cos^2 a \cos^2 d + \cos^2 b \cos^2 c \leqslant 2,$$

oricare ar fi $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. (R.M.T., 1 680, 1946, *C. Ionescu-Ţiu*).

7.22. Să se rezolve ecuaţia $6\sin \pi x - x^2 + 5x - 12{,}25 = 0$.

7.23. a) Să se rezolve ecuaţia $\sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 1$. b) Să se precizeze valorile lui x din intervalul $(0, 2\pi)$. (G.M.B. 11 107, *C. Ionescu-Ţiu*).

7.24. a) Să se rezolve ecuaţia $\cos 3x - \sin(\pi/2 - 2x) = 0$.

b) Folosind rezultatul de la punctul precedent să se deducă valorile lui $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{5}$, $\cos\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{3\pi}{5}$, $\sin\frac{\pi}{10}$, şi $\sin\frac{3\pi}{10}$.

(G.M.B., 11 126, *C. Ionescu-Ţiu*).

7.25. Să se demonstreze că $2\sin 2x \sin 2y \leqslant 1 + 8\sin^2 x \sin^2 y$.

(G.MB., 3 383, *C. Ionescu-Ţiu*).

7.26. Să se arate că

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin a\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin a\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos a\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos a\right) = 0,$$

$$(\cos a + \sqrt{\cos 2a})(\cos a - \sqrt{\cos 2a}) + (\sin a + \sqrt{-\cos 2a}) \cdot (\sin a - \sqrt{\cos 2a}) = 1.$$

(G.M.B., 6 033, *C. Ionescu-Ţiu*).

7.27. a) Să se transforme în produs expresia:

$$E(x) = \cos x + 2\cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + 2\cos 5x + \cos 6x.$$

(G.M.B., 10 421, *C. Ionescu-Ţiu*).

7.28. Ce relaţie există între x şi y dacă:

a) $\sin x\sqrt{1 - \sin^2 y} + \sin y\sqrt{1 - \sin^2 x} = 0$

b) $\sin x\sqrt{1 - \cos^2 y} - \cos y\sqrt{1 - \sin^2 x} = 0$

c) $\cos x \sqrt{1-\cos^2 y} + \cos y \sqrt{1-\cos^2 x} = 1.$

d) $\sin x \sqrt{1-\cos^2 y} + \cos y \sqrt{1-\sin^2 x} = 1.$ (G.M.B., 4 312, *C. Ionescu-Țiu*).

7.29. Dacă $\sqrt{\sin^2 x} + \sqrt{\cos^2 x} = 1{,}6$ să se afle valorile pe care le pot lua expresiile E_1 și E_2, unde: $E_1 = \sin x \sqrt{1-\cos^2 x} + \cos x \sqrt{1-\sin^2 x}$; $E_2 = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x$. (G.M.B., 11 090, *C. Ionescu-Țiu*)

7.30. Ce relații algebrice există între x și y dacă $\operatorname{tg} x \sin y \pm \sin x \operatorname{ctg} y = 0$? Dar dacă $\operatorname{ctg} x \sin y \pm \sin x \operatorname{ctg} y = 0$?

(G.M.B., 4 497, *C. Ionescu-Țiu*)

7.31. Să se arate că

$\sin^2 a + \sin^2 b + \cos(a+b)\cos(a-b) = 1,$

$\sin^2(a+b) + \sin^2(a-b) + \cos 2a \cos 2b = 1,$

$\cos^2 a + \cos^2 b - \cos(a+b)\cos(a-b) = 1,$

$\cos^2(a+b) + \cos^2(a-b)\cos 2a \cos 2b = 1.$

Una din relații fiind stabilită, celelalte rezultă.

(G.M.B., 9 377, *C. Ionescu-Țiu*)

7.32. Să se demonstreze că pentru $\pi/4 < x < \pi/2$ expresiile $a = \sin x - \cos x$, $b = \sin x + \cos x$ și $c = \sqrt{2} \sin 2x$ pot fi laturile unui triunghi.

(G.M.B., 1 809, *C. Ionescu-Țiu*)

7.33. Să se arate că dacă A și B sînt unghiurile oricărui triunghi, atunci $\sin A(2-\cos^2 B) + \sin B(2-\cos^2 A) > (\sin A + \sin B)(1 - \sqrt{\sin^2 A + \sin^2 B + \cos^2 A \cos^2 B - 1})$. (G.M.B., 14 070, *C. Ionescu-Țiu*)

7.34. Să se arate că în orice triunghi avem:

$$m(m-2)\sqrt{1+\sin\frac{A}{2}} + \sqrt{1+\sin\frac{B}{2}} + \sqrt{1+\sin\frac{C}{2}} > 0,\ m \in \mathbf{R}.$$

(N.G., 3 037, *C. Ionescu-Țiu*)

7.35. Să se arate că

$$\frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin 2A + \sin 2B} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}(A-B);\ \frac{\sin^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{B}{2}}{\sin A + \sin B} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{A-B}{2},$$

$$0 \leqslant \frac{\sin^2 2A + \sin 2B}{\cos(A-B)} \leqslant 2;\ 0 \geqslant \frac{\cos A - \cos B}{\sin\frac{A-B}{2}} \geqslant -2,$$

unde A și B sînt două unghiuri ale unui triunghi ascuțitunghi. (G.M.B., 6 199, *C. Ionescu-Țiu*)

7.36. Să se arate că dacă $A + B + C + D = \pi$, atunci $\cos^2 A + \cos B + \cos(B + 2C) = \cos^2 C + \cos D \cos(D + 2A)$.

(R.M.F., 775, *C. Ionescu-Țiu*)

7.37. Să se stabilească identitățile:

$$\sin(A+B)+\sin(A+C)+\sin(A+D)+\sin(A+B+C+D)=$$
$$=4\sin\left(\frac{B+C+D}{2}\right)\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}-4\cos\left(A+\right.$$
$$\left.+\frac{B+C+D}{2}\right)\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}\cdot$$

$$\cos(A+B)+(A+C)+\cos(A+C)+\cos(A+B+C+D)=$$
$$=4\cos\left(A+\frac{B+C+D}{2}\right)\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}+4\sin\left(A+\right.$$
$$\left.+\frac{B+C+D}{2}\right)\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2},\ A,\ B,\ C,\ D,\ \text{fiind unghiuri oarecare.}$$

(Pitagora, 5 112, *C. Ionescu-Țiu*)

7.38. O bară omogenă AB de lungime $2a$ și greutate P este fixată la capătul A (superior) de punctul fix A printr-o articulație. De capătul ei inferior B este prins un fir, trecut peste un mic scripete C așezat pe aceeași orizontală cu A. Firul poartă, la extremitatea sa liberă, greutatea Q. Să se afle unghiu. $\alpha = \sphericalangle CAB$ știind că $CA = AB$.

(G.M.B., 1971, *C. Ionescu-Țiu*)

7.39. O bară de greutate neglijabilă în formă de unghi drept ABC, $AB = 5$ m, $BC = 12$ m, este articulată în punctul A, iar în C are un scripete peste care trece un fir DCE, unde $AD = 7{,}51$ m, AD fiind verticală, iar de capătul E al firului atîrnă o greutate P destul de grea. Se cere poziția de echilibru. (G.M.B., 1971, *C. Ionescu-Țiu*)

7.40. Să se afle poziția de echilibru a unui semidisc omogen (placă în formă de semicerc) agățat de un fir de unul din capetele diametrului său.

(G.M.B., 1971, *C. Ionescu-Țiu*)

7.41. Să se demonstreze că triunghiul în care $\sin B + \cos B = \sin C + \cos C$ este dreptunghic sau isoscel. (Institutul Politehnic, Galați)

7.42. Să se arate că $\operatorname{arc\,tg}\,1+\operatorname{arc\,tg}\,2+\operatorname{arc\,tg}\,3=\pi$. Ce condiții trebuie să verifice $a<b<0$, $c<0$, astfel încît: $\operatorname{arc\,tg}\,a+\operatorname{arc\,tg}\,b+\operatorname{arc\,tg}\,c=\pi$?

(Facultatea de Matematică, București)

4.43. Să se rezolve ecuația: $\sin 3x = 4\sin x\cos 2x$. (Facultatea de Matematică, Cluj-Napoca)

7.44. Se consideră un triunghi cu laturile în progresie aritmetică, avînd rația $q>0$, $(a<b<c)$. Să se arate că:

a) $2\sin\frac{B}{2}=\cos\frac{A-C}{2}$. *b)* Dacă q este egal cu raza cercului înscris, triunghiul este dreptunghic. (Institutul Politehnic, Cluj-Napoca)

7.45. Să se rezolve ecuația $(\sin x + \cos x) \sin 2x = \sqrt{2}$.

(Facultatea de Matematică, Iași, 1975).

7.46. Să se rezolve ecuația $\sin(\pi \cos x) - \cos(\pi \sin x) = 0$.

(Facultatea de Electronică Craiova).

7.47. Se consideră un triunghi ABC $A > C$ între unghiurile căruia avem relația: $\sin \frac{B}{2} = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}$. Se cere:

1) Să se arate că relația dată este echivalentă cu relația $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{2}$.

2) Să se găsească relația pe care o verifică laturile acestui triunghi.

3) Se dă în plus: $\sin \frac{B}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ și se cere să se calculeze $\cos 2B$. Folosind rezultatul obținut, să se determine unghiul B.

4) Să se calculeze $\cos \frac{A - C}{2}$ și să se explice cum se pot determina toate unghiurile triunghiului. (Institutul Politehnic, București)

7.48. Se consideră expresia:

$E(x) = \sin x + \cos x + \sin^3 x + \cos^3 x + \sin^5 x + \cos^5 x$.

1° Notînd $\sin x + \cos x = a$, se cere să se exprime $E(x)$, numai în funcție de a.

2° Să se determine valorile lui a pentru care ecuația $\sin x + \cos x = a$ admite soluții.

3° Să se rezolve ecuația $E(x) = 0$. (Institutul Politehnic, București)

7.49. Să se arate că dacă $A + B + C + D = \pi$, atunci avem $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} D = \frac{\sin(A + B) \sin(A + C) \sin(A + D)}{\sin A \sin B \sin C \sin D}$.

(Institutul Politehnic, Cluj-Napoca)

7.50. Se dau vectorii $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$; $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ și $\mathbf{c} = 21\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$. Să se precizeze dacă:

a) vectorii $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$ sînt perpendiculari,

b) vectorii $\mathbf{a}$ și $\mathbf{c}$ sînt paraleli. (Treapta a II-a, Dîmbovița)

7.51. Să se arate că $(1 + i)^{6n} = (-8i)^n$, unde $n \in \mathbf{N}$

(Treapta a II, Dîmbovița)

7.52. Să se rezolve ecuația: $2^{\sin x + \sin 2x} = 32^{\sin 3x/2}$. (Treapta a II-a, Prahova)

7.53. Se dă ecuația trigonometrică $\cos^2 x = 2 - 5 \sin x \cos x$.

a) Să se rezolve ecuația. b) Să se găsească toate soluțiile cuprinse între 18π, și 23π. c) Să se găsească valoarea lui $\operatorname{tg} 2x_1$, unde $x_1 = \pi/24$.

(Institutul Politehnic, Timișoara, iulie 1975)

7.1. $\sin^2 53° = \cos^2 (90° - 53°) = \cos^2 37°$,
$\sin^2 73° = \cos^2 (90° - 73°) = \cos^2 17°$, deci

$$E = (\sin^2 17° + \cos^2 17°) + (\sin^2 37° + \cos^2 37°) = 2.$$

7.2. Avem $\sin^4 15° + \cos^4 15° = (\sin^2 15° + \cos^2 15°)^2 -$

$- 2 \sin^2 15° \cos^2 15° = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 30° = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$; $\sin^6 15° + \cos^6 15° =$

$= (\sin^2 15° + \cos^2 15°)^3 - 3 \sin^2 15° \cdot \cos^2 15° (\sin^4 15° + \cos^4 15°) = 1 -$

$- \frac{3}{4} \cdot \sin^2 30° \cdot \frac{7}{8} = 1 - \frac{3}{16} \cdot \frac{7}{8} = \frac{128 - 21}{128} = \frac{107}{128}$; $\sin^8 15° + \cos^8 15° =$

$(\sin^4 15° + \cos^4 15°)^2 - 2 \sin^4 15° \cdot \cos^4 15° = \frac{49}{64} - \frac{2}{16} \sin^4 30° = \frac{49}{64} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} =$

$= \frac{98 - 2}{128} = \frac{97}{128}$.

Rezultă $E = \frac{107}{128} : \frac{97}{128} = \frac{107}{97}$.

7.3. Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației date. Notăm $x_1 = \operatorname{tg} \alpha$ și $x_2 = \operatorname{tg} \beta$, unde $x_1 < x_2$. Avem $\operatorname{tg} 2\alpha < \operatorname{tg} (\alpha + \beta) < \operatorname{tg} 2\beta$; $1 - q > 0$;

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} > \frac{2 \sin a}{1 - \sin^2 a} = \frac{2 \sin a}{\cos^2 a}$; $\operatorname{tg} 2\beta < \frac{2 \cos a}{\sin^2 a}$;

$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 x_2} = \frac{-p}{1 - q}$. Rezultă $\frac{2 \sin a}{\cos^2} < \frac{-p}{1 - q} <$

$< \frac{2 \cos a}{\sin^2 a}$, deci numitorii fiind pozitivi: $2 \sin^3 a (1 - q) < -q \sin^2 a \cos^2 a <$

$< 2 \cos^3 a (1 - q)$, de unde $8 (1 - q) \sin^3 a < -p \sin^2 2a < 8 (1 - q) \cos^3 a$.
Pentru $a = 30°$ obținem intervalul $(1/2, \sqrt{3}/2)$ și relațiile: $1 < x_1 + x_2 <$
$< \sqrt{3}$; $1 < 4x_1 x_2 < 3$; $x_1, x_2, \in (1/2, \sqrt{3}/2)$ sau $p \in (-\sqrt{3}, -1)$; $q \in (1/4,$
$3/4)$ și $1 - q < -6p < 3\sqrt{3}(1 - q)$.

7.4. Considerăm și propoziția:

$s: \left[\cos a \neq 0; \sin b + \cos b \neq 0, \operatorname{tg}^2 a = \left(\frac{\sin b - \cos b}{\sin b + \cos b}\right)^2\right]$. Arătăm mai întîi că propoziția $q \leftrightarrow s$ este adevărată. Pentru $\cos a \neq 0$ și $\sin b +$
$+ \cos b \neq 0$ avem relația cunoscută $2 \cos^2 a = \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 a}$, iar $(\sin b + \cos b)^2 =$

$= \frac{2 (\sin b + \cos b)^2}{1 + 2 \sin b \cos b + 1 - 2 \sin b \cos b} = \frac{2 (\sin b + \cos b)^2}{(\sin b + \cos b)^2 + (\sin b - \cos b)^2}$

Prin urmare $2\cos^2 a = (\sin b + \cos b)^2$. dacă și numai dacă $\operatorname{tg}^2 a = \left(\frac{\sin b - \cos b}{\sin b + \cos b}\right)^2$. Întrucît $p \to s$ și $r \to s$ rezultă că și propozițiile $p \to q$, $r \to q$ sînt adevărate.

Dacă ar fi adevărată propoziția $q \to p$, atunci ar fi adevărată și $s \to p$. Dar dacă $b = \pi/6$ și $a = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$, atunci $\operatorname{tg} a = \frac{-(\sin b - \cos b)}{\sin b + \cos b} \neq 0$ și prin urmare în acest caz s este adevărată, iar q, falsă, deci propoziția $q \to p$ este falsă.

Analog putem arăta că și propoziția $q \to r$ este falsă.

7.5. Deoarece $n \geqslant 3$, arcul $\pi/2$ este cuprins între $0°$ și $\pi/3$ radiani. Mărimea unui arc în radiani cuprins între 0 și $\pi/2$ este mai mare decît sinusul și mai mică decît tangenta acestui arc, deci $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n} > \frac{\pi}{2n}$. Înmulțind cu $2\cos^2\frac{\pi}{2n}$ avem $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\cdot\cos^2\frac{\pi}{2n} > \frac{\pi}{2n}\cdot 2\cos^2\frac{\pi}{2n}$ sau $\sin\frac{\pi}{n} > \frac{\pi}{n}\cos^2\frac{\pi}{2n}$.

Deoarece $n \geqslant 3$, avem $\pi/2n \leqslant \pi/6$, deci $\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sau $\cos^2\frac{\pi}{2n} \geqslant \frac{3}{4}$, de unde $\sin\frac{\pi}{n} > \frac{3\pi}{4n}$.

7.6. Avem, conform ipotezei, că: $1 < \operatorname{ctg} x < \operatorname{ctg} y$

$$\text{de unde } \frac{\cos x}{\sin x} < \frac{\cos y}{\sin y} \text{ sau } \frac{\cos x}{\cos y} < \frac{\sin x}{\sin y}. \tag{1}$$

Funcția $f:[1,\infty) \to R, f(z) = z + \sqrt{z^2-1}$ este strict crescătoare și pozitivă, iar funcția $g = 1 + 1/f$ este strict descrescătoare și pozitivă. Avem $g(z) - 1 + \frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}} = 1 + z - \sqrt{z^2-1}$; iar pentru $0 < a < \pi/4$ obținem $\sin a \cdot g(\operatorname{ctg} a) = \sin a \cdot \left(1 + \frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\sqrt{\cos^2 a - \sin^2 a}}{\sin a}\right) = \sin a + \cos a - \sqrt{\cos 2a}$. Din (1) rezultă $g(\operatorname{ctg} x) > g(\operatorname{ctg} y)$, deci $1 < \frac{g(\operatorname{ctg} x)}{g(\operatorname{ctg} y)}$, sau $\frac{\sin x}{\sin y} < \frac{\sin x \cdot g(\operatorname{ctg} x)}{\sin y \cdot g(\operatorname{ctg} y)} = \frac{\sin x + \cos x - \sqrt{\cos 2x}}{\sin y + \cos y - \sqrt{\cos 2y}}$.

7.7. Avem $g(\sin x) = g\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right) = f\left(\frac{2\sin x}{1+\sin^2 x}\right)$.

7.8. Notăm $a = \operatorname{tg} x$, $b = \operatorname{tg} y$ și obținem

$$E = \frac{(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y)}{(1+\operatorname{tg}^2 x)(1+\operatorname{tg}^2 y)} = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}^2 y}{(1+\operatorname{tg}^2 x)(1+\operatorname{tg}^2 y)} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} x\,(1 + \operatorname{tg}^2 y) + \operatorname{tg} y\,(1 - \operatorname{tg}^2 x)}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)\,(1 + \operatorname{tg}_2 y)} = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 y}{1 + \operatorname{tg}^2 y} + \frac{\operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg}^2 y} \cdot$$

$$\cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{2}(\sin 2x \cos 2y + \sin 2y \cos 2x) = \frac{1}{2}\sin(2x + 2y) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

7.9. Răspuns: a) $\operatorname{tg} 2x = \pm 1$; b) $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} \pm 1$; c) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2\sqrt{2}$; d) $x \in \left\{\frac{\pi}{24}, \frac{3\pi}{24}, \frac{5\pi}{24}, \frac{7\pi}{24}, \frac{9\pi}{24}, \frac{11\pi}{24}\right\}$.

7.10. Avem $\sin x + \sin 2x = -\sin 3x$, sau $2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} = -2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{3x}{2} \neq 0$ deci și $\sin \frac{3x}{2} \neq 0$. Obținem $\cos \frac{x}{2} + \cos \frac{3x}{2} = 0$ sau $2 \cos x \cos \frac{x}{2} = 0$.

Pentru $\cos \frac{x}{2} = 0$, atunci $\sin x = 0$ și $\sin 3x = 0$.

Pentru $\cos x = 0$, atunci $\sin 3x \neq 0$. Rezultă deci $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

7.11. Ecuația se poate scrie:

a) $2m \sin^2 x - 4(m + 1) \sin x + 2m + 4 = 0$ și de aici $\sin x = 1$ și $\sin x = \frac{m + 2}{m}$.

Prima ecuație ne dă soluțiile $x = (4k + 1)\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$, soluții independente de m.

Ca și a doua ecuație să dea soluții, trebuie ca m să satisfacă inegalitățile: $-1 \leqslant \frac{m + 2}{m} \leqslant 1$; $\frac{m + 2}{m} + 1 \geqslant 0$ este satisfăcută, pentru

$$(m \in -\infty, 1] \cup (0, +\infty), \tag{1}$$

iar $\frac{m + 2}{m} - 1 \neq 0$ este satisfăcută pentru $m \in (-\infty)$ (2)

și de aici: $m \in \{(-\infty, -1] \cup (0, \infty)\} \cap (-\infty, -1]$. (3)

b) Pentru $m = -2 - \sqrt{2}$, a doua ecuație dă soluții, deoarece m satisface (3) și avem $\sin x = \frac{-\sqrt{2}}{-2 - \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$, și deci $x = (-1)^k \arcsin(\sqrt{2} - 1) + k\pi$.

7.12. Notăm $A = 180° - 2\alpha$; $B = 180° - 2\beta$; $C = 180° - 2\gamma$, iar $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, deoarece $A + B + C = 180°$.

Relația de demonstrat se mai scrie:

$\sin(\beta - \alpha) + \sin(\gamma - \alpha) + \sin 3(90° - \alpha) \leqslant 3/2$,

sau: $2\sin\frac{\beta-\alpha+\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\cos 3\alpha\leqslant 3/2$; adică $-\cos 3\alpha+$

$+2\sin\left((90^\circ-\frac{3\alpha}{2}\right)\cos\frac{\beta-\alpha}{2}-\frac{3}{2}\leqslant 0$; sau

$$\cos 3\alpha-2\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+\frac{3}{2}\geqslant 0. \qquad (1)$$

Dar $\cos 3\alpha=2\cos^2\frac{3\alpha}{2}-1$. Notăm $\cos\frac{3\alpha}{2}=x$ și relația (1) devine

$$2x^2-2x\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+\frac{1}{2}\leqslant 0 \text{ sau } f(x)=4x^2-4x\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+1\geqslant 0.$$

Minimul lui $f(x)$ care este un trinom de gradul al doilea este pentru

$x=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$ adică $m=\frac{-16\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2}+4\cdot 4}{4\cdot 4}=1-\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2}\geqslant 0.$

Inegalitatea este astfel demonstrată, semnul egal are loc pentru $\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2}=$

$=1$ sau $\frac{\beta-\gamma}{2}=360^\circ\cdot k_1$; $\beta-\gamma=720^\circ\cdot k_1$, iar $\frac{3\alpha}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{3\alpha}{2}=\pm 60^\circ+360k_2$

sau $\alpha=\pm 40^\circ+240^\circ\cdot k_2$, unde $k_2k_1\in\mathbf{Z}$.

Înlocuind cu unghiurile A, B, C găsim condiția

$\frac{180^\circ-B}{2}-\frac{180^\circ-C}{2}=720^\circ\cdot k_1$ și $\frac{180^\circ-A}{2}=\pm 40^\circ+240^\circ\cdot k_2$, sau

$C-B=2k_1\cdot 720^\circ$ și $180^\circ-A=\pm 80^\circ+480^\circ\cdot k_2$.

Convine $B=C$ și $A=100^\circ$ deci în cazul cînd A, B, C sînt unghiurile unui triunghi, semnul egal din inegalitatea cerută are loc dacă $A=100^\circ$, $B=C=40^\circ$.

Cazul particular 2°. Avem: $\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=-1$, $\frac{\beta-\gamma}{2}=180^\circ\cdot k_1$, $\beta-\gamma=$

$=360^\circ\cdot k_1$ sau $C-B=2k_1\cdot 360^\circ$ și convine $B=C$.

$\cos\frac{3\alpha}{2}=-\frac{1}{2}$, $\frac{3\alpha}{2}=\pm 3\alpha/2=\pm 150^\circ+360^\circ\cdot k_2$ sau $\alpha=\pm 100^\circ+$

$=240^\circ\cdot k_2$; $\frac{180^\circ-A}{2}=\pm 100^\circ+240^\circ\cdot k_2$, $180^\circ-A=\pm 200^\circ+480^\circ\cdot k_2$,

care nu convine pentru A. Deci în cazul unui triunghi, semnul egal are loc dacă $A=100^\circ$ și $B=C=40^\circ$.

7.13. a) Notînd $\sqrt[3]{\sec a+\operatorname{tg} a}=u$ și $\sqrt[3]{(\sec a-\operatorname{tg} a)}=v$ avem $u+v=$

$=m$; $u-v=n$, $uv=1$.

Ținînd seama de cubul unui binom avem:

$(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(uv+)\Rightarrow m^3=2\sec a+3m$ deci m^2-3m-

$-2\sec a=0$;

$(u-v)^3=u^3-v^3-3uv(u-v)\Rightarrow n^3=2\,tg\,a-3n$, deci n^3+3n-

$-2\operatorname{tg} a=0$.

b) Dacă $n = 1$, atunci din $n^3 + 3n - 2\operatorname{tg} a = 0$ rezultă $\operatorname{tg} a = 2$; iar pentru $n = 2$ avem $2^3 + 3 \cdot 2 - 2\operatorname{tg} a = 0$ de unde $\operatorname{tg} a\, a = 7$, $\sec a = \sqrt{50}$ și rezultă $m = \sqrt[3]{\sqrt{50} + 7} + \sqrt[3]{\sqrt{50} - 7}$.

Dacă $m = 3$, atunci $3^3 - 3 \cdot 3 - 2\sec a = 0$, $\sec a = 0$, $\sec a = 9$, $\operatorname{tg} a = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ și $n = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

Verificare: $n^3 + 3n - 2\operatorname{tg} a = 0$ sau $5\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 8\sqrt{5} = 0$.

c) Cu notațiile făcute avem $(x - m)(x - n) = x^2 - (m + n)x + mn = x^2 - 2\sqrt[3]{\sec a + \operatorname{tg} a} \cdot x + \sqrt[3]{(\sec a + \operatorname{tg} a)^2} - \sqrt[3]{(\sec a - \operatorname{tg} a)^2}$. De asemenea, $(x^3 - 3x - 2\sec a)(x^3 + 3x - 2\operatorname{tg} a) = x^6 - 2(\sec a + \operatorname{tg} a)x^3 - 9x^2 - 6(\sec a - \operatorname{tg} a)x + 4\sec a \operatorname{tg} a$. Dar $x^3 - 3x - 2\sec a$ se divide prin $(x - m)$ deoarece $m^3 - 3m - 2\sec a = 0$, iar $x^3 + 3x - 2\operatorname{tg} a$ se divide prin $(x - n)$, de unde rezultă ce s-a cerut la punctul c)

Observație. Se poate afla cîtul și fără a se efectua împărțirea.

7.14. Dacă $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}, \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\right)$ putem nota $x_1 = \operatorname{tg} a_1$, $x_2 = \operatorname{tg} a_2$, $x_3 = \operatorname{tg} a_3$, $x_4 = \operatorname{tg} a_4$, iar $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \in \left(4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}, 4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\right)$. Deoarece $\operatorname{tg}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) =$

$$= \frac{\Sigma \operatorname{tg} a_1 - \Sigma \operatorname{tg} a_1 \operatorname{tg} a_2 \operatorname{tg} a_3}{1 - \Sigma \operatorname{tg} a_1 \operatorname{tg} a_2 + \operatorname{tg} a_1 \operatorname{tg} a_2 \operatorname{tg} a_3 \operatorname{tg} a_4} = \frac{-a + c}{1 - b + d} > 0$$

$$\operatorname{tg}\left(4\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right) = \frac{4 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{64}}{1 - \frac{6}{16} + \frac{1}{256}} = \frac{240}{161} \text{ și } \operatorname{tg}\left(4\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) = \frac{4 \cdot \frac{1}{3} - \frac{4}{27}}{1 - \frac{6}{9} + \frac{1}{81}} = \frac{24}{7};$$

$(-a + c > 0;\quad 1 - b + d > 0)$.

Rezultă $\frac{240}{161} < \frac{-a + c}{1 - b + d} < \frac{24}{7}$ sau $1\,680 < (1 - b + d) < 1127(c - a) < 3\,864(1 - b + d)$.

7.15. 1. Ecuația se mai scrie $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)\sin 2x = a$, sau $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin 2x = a$.

Ecuația nu are soluții pentru $|a| > 1$.

Pentru $x = \pi/2$, notînd $f(x) = \sin(x + \pi/4)\sin 2x$, obținem $f(\pi/4) = 1$. La fel deducem $f(5\pi/4) = -1$, deci funcția continuă $f(x)$ ia toate valorile din intervalul $[-1, 1]$. Rezultă că ecuația dată are soluții pentru $|a| \leqslant 1$.

2. Cînd $a = 1$, ecuația este echivalentă cu următoarea ecuație: $(\sin x + \cos x)^2 \cdot \sin^2 2x = 2$ sau $(1 + \sin 2x)\sin^2 2x = 2$.

Deci am obținut ecuația de gradul 3; $\sin^3 2x + \sin^2 2x - 2 = 0$, care are o soluție sin $2x = 1$ și alte două rădăcini complexe conjugate. Rezultă că soluțiile ecuației pentru $|a| = 1$ sînt $2x = \pi/5 + 2k\pi$ sau $x = \pi/4 + k\pi$ cu $k \in \mathbf{Z}$.

7.16. Ținem seama că într-un triunghi avem relațiile: $a = 2R \sin A$ și analoagele și deci

$$\frac{AC}{CE} = \frac{\sin B}{\sin (CBE)} = \frac{\sin B}{\sin\left(B + \frac{C}{E}\right)} = \frac{\sin B}{\sin\left(A + \frac{C}{2}\right)}. \quad \text{Analog } \frac{BC}{CE} =$$

$$= \frac{\sin A}{\sin\left(A + \frac{C}{2}\right)}. \text{ Rezultă: } \frac{AC}{CE} + \frac{BC}{CE} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin\left(A + \frac{C}{2}\right)} = \frac{2 \sin\frac{A+B}{2} \cos\frac{A-B}{2}}{\sin\left(A + \frac{C}{2}\right)}.$$

Dar $\cos\frac{A-B}{2} = \cos\frac{B-A}{2} = \sin\left(A + \frac{C}{2}\right)$ întrucît $\frac{B-A}{2} + A + \frac{C}{2} = \frac{A+B+C}{2} = 90°$, iar $\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}$.

Deci $\frac{AC}{CE} + \frac{BC}{CE} = 2\cos\frac{C}{2} < 2$ sau $2CE > AC + BC$.

7.17. Transformînd produsele în sume, inegalitatea propusă devine: $\sin(110° - 4x) > \sin(50° + 8x)$ sau încă $\sin(70° + 4x) > \sin(50° + 8x)$.

Ambele arce din paranteze sînt în cadranul I. Deci, trebuie să avem $70° + 4x > 50° + 8x$ sau $20° > 4x$, $5° > x$.

7.18. Transformăm produsele în sume trigonometrice:
$\sin(10x + 60°) \geqslant \sin(22x + 24°)$, sau $\sin(10x + 60°) - \sin(22x + 24°) \geqslant 0$. Transformăm diferența în produs și obținem $\cos(16x + 42°)\sin(-6x + 18°) \geqslant 0$.

Dacă $0° \leqslant x \leqslant 3°$, atunci $42° \leqslant 16x + 42° \leqslant 90°$; $18° \geqslant -6x + 18° \geqslant 0°$, deci $\cos(16x + 42) \geqslant 0$ și $\sin(-6x + 18°) \geqslant 0$.

Egalitatea are loc pentru $x = 0$ și $x = 3°$.

7.19. Avem $E_1 = \sin(5x - 30°)\cos(5x + 60°)$.

$$E_2 = \sin\left(\frac{5x}{2} + 30°\right)\cos\left(\frac{5x}{2} - 60°\right).$$

Se poate observa imediat că avem: $E_1 = -\sin^2(5x - 30°)$; $E_2 = \cos^2\left(\frac{5x}{2} - 60°\right)$. de unde tragem concluzia că dacă $0 - x \leqslant 12°$, există dublele inegalități: $-1/4 \leqslant -E_1 \leqslant 0$; $1/4 \leqslant E_2 \leqslant 3/4$ deoarece $-30° \leqslant 5x - 30° \leqslant 30°$; $-60° \leqslant (5x/2 - 60°) \leqslant -30°$.

$$\sin\frac{\pi}{n} > \frac{\pi}{n}\cos^2\frac{\pi}{2n}. \qquad (1)$$

Deoarece $n \geqslant 3$ avem $\frac{\pi}{2n} \leqslant \frac{\pi}{6}$; $\cos\frac{\pi}{2n} \geqslant \cos\frac{\pi}{6}$; $\cos\frac{\pi}{2n} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos^2\frac{\pi}{2n} \geqslant$ $\geqslant 3/4$. Înlocuim în (1) pe $\cos^2\frac{\pi}{2n}$ prin valoarea mai mică sau cel mult egală cu 3/4 și obținem: $\sin\frac{\pi}{n} > \frac{3\pi}{4n}$.

7.20. Intersectăm graficele curbelor $y = 3\sin x$ și $y = x$. Obținem trei puncte de intersecție $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ și $O(0, 0)$. Mai observăm că $x_1 \in (-\pi, -\pi/2)$, $x_2 \in (\pi/2, \pi)$; $x_1 + x_2 = 0$, $y_1 + y_2 = 0$.

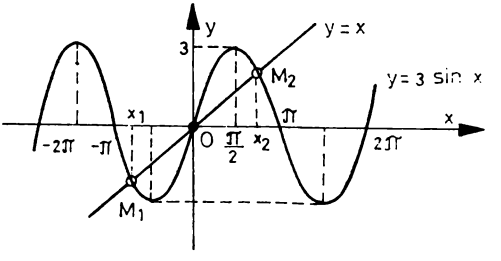

Fig. 7.20

7.21. Prima inegalitate se mai scrie $1 - \sin^2 a - \sin^2 b + \sin^2 a \sin^2 b + (1 - \sin^2 a)(1 - \sin^2 b) = \cos^2 a \cos b^2 \geqslant 0$; egalitatea are loc cînd cel puțin unul din arcele a sau b este $\pi/2$.

Pentru a doua inegalitate înlocuim peste tot sinusurile în funcție de cosinusuri și obținem: $-\cos^2 a + (1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) + \cos^2 a \cos^2 b + \cos^2 a + \cos^2 c \geqslant 0$ sau $(1 - \cos^2 a)(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) + \cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c \geqslant 0$ adică $\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c + \cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c \geqslant 0$; evident, egalitatea are loc atunci cînd cel puțin unul din arcele a, b, c este zero și cel puțin unul este $\pi/2$. Inegalitatea: $\sin^2 a + \sin^2 b \sin^2 c + \cos^2 a(\cos^2 b + \cos^2 c) \leqslant 2$ se transformă în $-\cos^2 a(1 - \cos^2 b) - \cos^2 b(1 - \cos^2 c) - \cos^2 c(1 - \cos^2 a) =$ $= -\cos^2 a \sin^2 b - \cos^2 b \sin^2 c \cdot \cos^2 c \sin^2 a \leqslant 0$; evident, egalitatea are loc atunci cînd arcele a, b, c au valoarea zero sau $\pi/2$.

Pentru ultima inegalitate obținem:

$-\cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 d + \cos^2 a \cos^2 b + \cos^2 c \cos^2 d + \cos^2 a \cos^2 d + \cos^2 b \cos^2 c = (\cos^2 a \sin^2 b + \cos^2 b \sin^2 c + \cos^2 c \cdot \sin^2 d + \cos^2 d \sin^2 a) \geqslant 0$; egalitatea are loc dacă arcele a, b, c, d sînt nule sau $\pi/2$

7.22. $6 \sin \pi 6 \sin \pi x = (x - 5/2)^2 + 6$, notăm $6 \sin \pi x = y$, $(x - 5/2)^2 + 6 = y_2$, dar $y_2 \geqslant 6 \Rightarrow y_1 = y_2 = 6$ și $x = 5/5$. Soluția este deci $x = 2{,}5$ (verifică).

7.23. Ecuația se mai poate scrie, notînd $3x = y$; $2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos y + \frac{1}{2}\sin y\right) = 1$, dar $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{5\pi}{6}$ și $\frac{1}{2} = \sin\frac{5\pi}{6}$; $2\cos\left(y - \frac{5\pi}{6}\right) = 1$, $\cos\left(y - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. Rezultă $y - \frac{5\pi}{6} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$, de unde $y_1 = 3x_1 = \frac{7\pi}{6} +$

$+ 2\pi k$ și $y_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = 3x_2$, sau $x_1 = \frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{18}$, $k \in \mathbf{Z}$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$; $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{18}, \frac{5\pi}{6}, \frac{19\pi}{18}, \frac{3\pi}{2}, \frac{31\pi}{18}\right\}$.

7.24. a) $\sin(\pi/2 - 2x) + \cos x$, iar ecuația devine $\cos 3x - \cos 2x = 0$. Avem $3x - 2x = 2k\pi$, deci $x_1 = 2k\pi$ și $3x + 2x = 2k\pi$, deci $x_2 = 2k\pi/5$.

b) Folosim relațiile $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ și $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Notăm $\cos x = y$ și obținem $4y^3 - 2y^2 - 3y + 1 = 0$ sau $(y - 1)(4y^2 + 2y - 1) = 0$, de unde $y_1 = 1 = \cos 2k\pi = \cos x$;

$$y_2 = \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \text{ deoarece } \cos\frac{2\pi}{5} > 0;$$

$$y_3 = \cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}, \text{ deoarece } \cos\frac{4\pi}{5} < 0.$$

$\cos\frac{\pi}{5} = -\cos\frac{4\pi}{5}$ și $\cos\frac{3\pi}{5} = -\cos\frac{2\pi}{5}$; $\sin\frac{\pi}{10} = \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$;

$\sin\frac{3\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

7.25. Se mai poate scrie succesiv:

$$8\sin x\cos x\sin y\cos y - 8\sin^2 x\sin^2 y - 1 \leqslant 0;$$

$$8\sin x\sin y(\cos x\cos y - \sin x\sin y) - 1 \leqslant 0;$$

$8\sin x\sin y\cos(x + y) - 1 \leqslant 0$ sau $1 - 8\sin x\sin y\cos(x + y) \geqslant 0$;

$1 + \cos(x + y)[\cos(x + y) - \cos(x - y)] \cdot 4 \geqslant 0$.

$1 + 4\cos^2(x + y) - 4\cos(x + y)\cos(x - y) \geqslant 0$ sau $[2\cos(x + y) - \cos(x - y)]^2 - \cos^2(x - y) + \cos^2(x - y) + \sin^2(x - y) \geqslant 0$,
$[2\cos(x + y) - \cos(x - y)]^2 + \sin^2(x - y) \geqslant 0$ cea ce este evident.

7.26. Avem $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin a\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin a\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos a\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos a\right) =$

$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \sin^2 a + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \cos^2 a = \frac{2}{4} - \sin^2 a + \frac{2}{4} - \cos^2 a = 1 - \sin^2 a - \cos^2 = 0$.

$(\cos a + \sqrt{\cos 2a})(\cos a - \sqrt{\cos 2a}) + (\sin a + \sqrt{-\cos 2a})\cdot(\sin a - \sqrt{-\cos 2a}) = \cos^2 a - (\sqrt{\cos 2a})^2 + \sin^2 a - (\sqrt{-\cos 2a})^2 = 1 - \cos 2a - (-\cos 2a) = 1$.

7.27. a) Avem: $\cos x + \cos 6x + 2\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{5x}{2}$; $\cos 2x + \cos 5x + 2\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2}$; $\cos 3x + \cos 4x = 2\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}$ și deci $E(x) = 2\cos\frac{7x}{2}\cdot\left(\cos\frac{5x}{2} + \cos\frac{x}{2} + 2\cos\frac{3x}{2}\right) = 2\cos\frac{7x}{2}\left(\cos\frac{5x}{2} + \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) =$

$= 4\cos\frac{7x}{2}\left(\cos 3x\cos\frac{x}{2} + \cos x\cos\frac{x}{2}\right) = 4\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}(\cos 2x + \cos x) =$

$= 8\cos\frac{7x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$.

7.28. a) Deoarece radicalii sînt aritmetici, singura posibilitate este ca $\sin x = -\sin y$, adică: $\sin x + \sin y = 0$. Deci trebuie ca $x + y = 2k\pi$ sau $x - y = (2k + 1)\pi$.

b) Din aceleași motive trebuie ca $\sin x = \cos y$ sau $\sin x = \sin(\pi/2 - y)$ și $\sin x - \sin(\pi/2 - y) = 0$. Deci trebuie ca $x + y = 2k\pi + \pi/2$ sau $x - y = 2k\pi + \pi/2$.

c) Relația se mai poate scrie: $\cos x \cdot |\sin y| + \cos y \cdot |\sin x| = 1$. Prin urmare, $\cos x$ și $\cos y$ trebuie să aibă semnul + (plus). Avem $\cos x \sin y + \cos y \sin x = 1$ sau $\sin(x + y) = 1$ sau $\sin(x + y) = \sin\frac{\pi}{2}$ și $\sin(x + y) - \sin\frac{\pi}{2} = 0$. Deci trebuie ca $x + y = \frac{(4k+1)\pi}{2}$; x și y nu pot fi în cadranele II sau IV.

d) Deoarece radicalii sînt aritmetici trebuie ca $\sin x$ și $\cos y$ să aibă semnul — (minus). Relația devine $\sin x \cdot \sin y + \cos y \cdot |\cos x| = -1$ sau $\cos(x - y) = \cos\pi$ sau $y - x = (2k + 1)\pi$.

7.29. Prin ridicare la pătrat obținem

$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sqrt{\sin^2 x\cos^2 x} = 1{,}6$ sau $|\sin 2x| = 0{,}6 = 3/2$. Notînd cu $2\alpha = \arcsin(0{,}6)$; $\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}$; $2x = 180° k \pm 2\alpha$ sau $x = 90° k \pm \alpha$; $k \in \mathbf{Z}$.

Valorile lui x în ordine crescîndă sînt α, $90° - \alpha$, $90° + \alpha$, $180° - \alpha$, $180° + \alpha$, $270° - \alpha$, $270° + \alpha$ și $360° - \alpha$. Avem, pe rînd:

$x = \alpha$; $E_1 = \sin\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\cos\alpha = 1$.

$x = 90° - \alpha$; $E_1 = \cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\sin\alpha = 1$.

$x = 90° + \alpha$; $E_1 = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos 2\alpha = \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = 4/5$.

$x = 180° - \alpha$; $E_1 = \sin\alpha\sin\alpha - \cos\alpha\cos\alpha = -\cos 2\alpha = -4/5$,

$x = 180° + \alpha$; $E_1 = -\sin\alpha\sin\alpha - \cos\alpha\cos\alpha = -1$,

$x = 270° - \alpha$; $E_1 = -\cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = -1$,

$x = 270° + \alpha$; $E_1 = -\cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\sin\alpha = -\cos 2\alpha = -4/5$,

$x = 360° - \alpha$; $E_1 = -\sin\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\cos\alpha = \cos 2\alpha = 4/5$.

Deci E_1 are valorile ± 1 sau $\pm 4/5$.

Avem $\cos 2\alpha = \sqrt{1 - (3/5)^2} = \frac{4}{5}$; $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$; $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$; $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{3}{4}$. Dăm lui x valorile aflate și obținem:

Pentru $x = \alpha$ și $x = 180° + \alpha$; $E^2 = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{13}{12}$;

Pentru $x = 90° - \alpha$ și $x = 270° - \alpha$; $E_2 = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$;

Pentru $x = 90° + \alpha$ și $x = 270° + \alpha$; $E_2 = -3 + \frac{3}{4} = -\frac{9}{4}$;

Pentru $x = 180° - \alpha$ și $x = 360° - \alpha$; $E_2 = -\frac{1}{3} - \frac{3}{4} = -\frac{13}{12}$.

7.30. a) Pentru ca operațiile să aibă sens trebuie să avem $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ și $y \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

În acest caz prima relație devine:

$\operatorname{tg} x \sin y \pm \sin x \operatorname{tg} y = 0$, $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y (\cos y \pm \cos x = 0$

și deci avem $\operatorname{tg} x = 0$ sau $x = k\pi$; $\operatorname{tg} y = 0$ sau $y = k\pi$; $\cos y \pm \cos x = 0$ sau $x \pm y = k\pi$. Înseamnă că relațiile dintre x și y sînt $x = k\pi$ pentru orice y (afară de $y = (2k + 1)\pi/2$; $y = k\pi$ pentru orice x (afară de $x = (2k + 1)\pi/2$ și $x \pm y = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

b) Pentru ca operațiile să aibă sens trebuie să avem $x \neq k\pi$ și $y \neq k\pi$. În acest caz a doua relație devine

$$\operatorname{ctg} x \sin y \pm \sin x \operatorname{ctg} y = 0, \quad \frac{\cos x \sin^2 x \pm \cos y \sin^2 x}{\sin x \sin y} = 0,$$

$$\cos x (1 - \cos^2 y) \pm \cos y (1 - \cos^2 x) = 0,$$

$$(\cos x \mp \cos y) + \cos x \cos y (\cos x \pm \cos y) = 0,$$

$$\cos x \pm \cos y)(1 \mp \cos x \cos y) = 0.$$

și deci avem singura soluție acceptabilă $\cos x \pm \cos y = 0$ sau $x \pm y = k\pi$. Deoarece trebuie să avem $x \neq k\pi$ și $y \neq k\pi$ înseamnă că vom avea $\cos x \cos y \neq \pm 1$ și deci, nu putem avea $1 \mp \cos x \cos y = 0$.

7.31. $\sin^2 a + \sin^2 b + \cos(a + b)\cos(a - b) = \frac{1}{2}[1 - \cos 2a + 1 - \cos 2b + \cos 2a + \cos 2b] = 1$. Fie $a_1 \to \frac{a + b}{2}$; $b_1 = \frac{a - b}{2}$; $\sin^2(a_1 + b_1) + \sin^2(a_1 - b_1) + \cos 2a_1 \cos 2b_1 = \sin^2 a + \sin^2 b + \cos(a + b)\cos(a - b) = 1$.

Dacă $\left(a_2 \to a - \frac{\pi}{2},\ b_2 \to b - \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $\cos^2 a_2 + \cos^2 b_2 - \cos(a_2 + b_2)\cos(a_2 - b_2) = \sin^2 a + \sin^2 b + \cos(a + b)\cos(a - b) = 1$.

Dacă $\left(a_3 \to \frac{a + b - \pi}{2},\ b_3 \to \frac{a - b}{2}\right)$, atunci $\cos^2(a_3 + b_3) + \cos^2(a_3 - b_3) - \cos 2a_3 \cos 2b_3 = \cos^2(a - \pi/2) + \cos^2(b - \pi/2) - \cos(a + b - \pi) \times \cos(a - b) = \sin^2 a + \sin^2 b + \cos(a + b)\cos(a - b) = 1$.

7.32. 1° Să arătăm că $a + b > c$. Avem $\sin x > 0$, $\cos x < \sqrt{2}/2$; $a + b = 2 \sin x$, $c = 2\sqrt{2}\sin x \cos x$, $(a + b)\sqrt{2}\cos x < a + b$.

2° $b + c = \sin x + \cos x + 2\sqrt{2}\sin x \cos x > \sin x - \cos x = a$ deoarece $2 \cos x (1 + \sqrt{2}\sin x) > 0$.

3° $c + a = \sin x - \cos x + 2\sqrt{2} \sin x \cos x > \sin x + \cos x = b$ deoarece $\cos x > 0$ și $\sin x > \sqrt{2}/2$.

De asemenea, observăm că a, b, x în condițiile date sînt numere pozitive.

7.33. Avem $0 < A < \pi$, $0 < B < \pi$ și $B + C < \pi$.

$2 - \cos^2 B = 1 + 1 - \cos^2 B = 1 + \sin^2 B$. Membrul întîi devine $E = \sin A + \sin B + \sin A \sin B (\sin A + \sin B) = (\sin A + \sin B) \cdot (1 + \sin A \sin B)$, unde $\sin A + \sin B > 0$. Membrul al doilea se mai scrie: $F = (\sin A + \sin B)(1 - \sqrt{\sin^2 A + \sin^2 B + (1 - \sin^2 A)(1 - \sin^2 B)} - 1 = (\sin A + \sin B)(1 - \sqrt{\sin^2 A \sin^2 B})$. Inegalitatea $E > F$ se scrie $1 + \sin A \sin B > 1 - |\sin A \sin B|$. care este acum evidentă. $A \neq 0$, $B \neq 0$.

7.34. Inecuația se mai poate scrie:

$$m^2 \sqrt{1 + \sin \frac{A}{2}} - 2m \sqrt{1 + \sin \frac{A}{2}} + \sqrt{1 + \sin \frac{B}{2}} + \sqrt{1 + \sin \frac{C}{2}} > 0$$

$$\Delta_m = \left(1 + \sin \frac{A}{2}\right) - \sqrt{1 + \sin \frac{A}{2}} \left(\sqrt{1 + \sin \frac{B}{2}} + \sqrt{1 + \sin \frac{C}{2}}\right) =$$

$$= \sqrt{1 + \sin \frac{A}{2}} \left(\sqrt{1 + \sin \frac{A}{2}} - \sqrt{1 + \sin \frac{B}{2}} - \sqrt{1 + \sin \frac{C}{2}}\right).$$

Să arătăm că $\sqrt{1 + \sin \frac{A}{2}} < \sqrt{1 + \sin \frac{B}{2}} + \sqrt{1 + \sin \frac{C}{2}}$.

Deoarece $\sin \frac{A}{2} < 1$, $\sin \frac{B}{2} > 0$, $\sin \frac{C}{2} > 0$, iar $\sqrt{2} < \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$, rezultă că $\Delta < 0$, prin urmare trinomul în m ia mereu același semn cu $\sqrt{1 + \sin \frac{A}{2}} > 0$, adică semnul pozitiv.

7.35. a) Prima fracție se poate scrie

$$\frac{(\sin A + \sin B)(\sin A - \sin B)}{2 \sin (A + B) \cos (A - B)} = \frac{4 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}}{2 \sin (A + B) \cos (A - B)} =$$

$$= \frac{\sin 2 \frac{A+B}{2} \sin 2 \frac{A-B}{2}}{2 \sin (A + B) \cos (A - B)} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} (A - B).$$

b) A doua fracție se mai poate scrie

$$\frac{\sin^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{B}{2}}{\sin A + \sin B} = \frac{\frac{1 - \cos A}{2} - \frac{1 - \cos B}{2}}{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A+B}{2}} = \frac{1 - \cos A - 1 + \cos B}{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}} =$$

$$= \frac{\cos B - \cos A}{4 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}} = \frac{2 \sin \frac{A-B}{2} \sin \frac{A+B}{2}}{4 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}.$$

c) $0 \leqslant \frac{\sin 2A + \sin 2B}{\cos (A-B)} \leqslant 2.$ $\frac{2 \sin (A+B) \cos (A-B)}{\cos (A-B)} =$ $= 2 \sin (A+B)$, dar $0 \leqslant A+B \leqslant 180°$ şi deci $0 \leqslant \sin (A+B) \leqslant 1$, de unde $0 \leqslant 2 \sin (A+B) \leqslant 2$.

d) Avem

$$\frac{\cos A - \cos B}{\sin \frac{A-B}{2}} = \frac{-2 \sin \frac{A-B}{2} \sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A-B}{2}} = -2 \sin \frac{A+B}{2},$$ de unde rezultă $0 \geqslant -2 \sin \frac{A+B}{2} \geqslant -2$.

7.36. $\cos B \cos (B+2C) - \cos D \cos (D+2A) = \frac{1}{2}[\cos (2B+2C) +$ $+ \cos 2C - \cos (2D+2A) - \cos 2A] = \frac{1}{2}[2 \cos^2 C - 1 - 2 \cos^2 A + 1)] =$ $= \cos^2 C - \cos^2 A$.

7.37. $\sin (A+B) + \sin (A+C) + \sin (A+D) + \sin (A+B+C+$ $+ D) = 2 \sin \left(A + \frac{B+C}{2}\right) \cos \frac{B-C}{2} + 2 \sin \left(A + D + \frac{B+C}{2}\right) \cos \frac{B+C}{2} =$ $= 2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \left[\sin \left(A + \frac{B+C}{2} + \sin \left(A + D + \frac{B+C}{2}\right)\right]\right. -$ $- 4 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \left[\sin \left(A + D + \frac{B+C}{2}\right) - \sin \left(A + \frac{B+C}{2}\right)\right] = 4 \sin \left(A + \right.$ $\left. + \frac{B+C+D}{2}\right) \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \cos \frac{D}{2} - 4 \cos \left(A + \frac{B+C+D}{2}\right) \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \sin \frac{D}{2}.$

Identitatea a doua se poate obţine analog sau înlocuind pe A prin $(A + 90°)$.

Observaţie. Pentru $D = 0$ şi $A + B + C = \pi$ obţinem $\Sigma \sin A =$ $= 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

7.38. Momentul în raport cu articulaţia din A este $M_A = Pa \cos \alpha -$ $- 2aQ \cos \frac{\alpha}{2} = 0$. Folosim relaţia $\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$ şi obţinem ecuaţia $2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot P - 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot Q - P = 0$ de unde $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 + 2P^2}}{2P}$;

semnul (+) convine pentru poziția de echilibru stabil, iar semnul(—) pentru poziția de echilibru instabil.

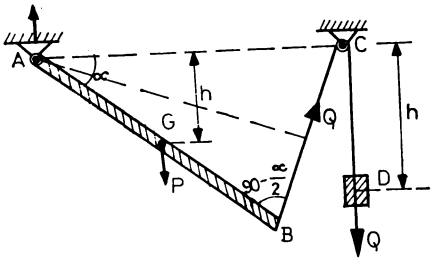

Fig. 73.8 a

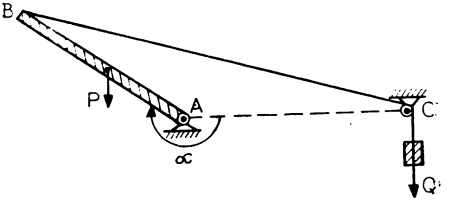

Fig. 7.38 b

7.39. Scripetele din C fiind fără frecare tensiunea din firul DC și cea din firul CE sînt egale cu greutatea P, și pentru echilibru, reacțiunea ce se dezvoltă perpendicular pe axul scripetului este rezultanta a două forțe egale concurente ce pleacă din C de-a lungul firului CE și CD, dar rezultanta **R** aceasta este dirijată pe direcția bisectoarei unghiului DCE. Pentru ca momentul forțelor ce fac echilibru să fie nul în raport cu punctul de articulație din A, trebuie ca rezultanta **R** să treacă prin A. Rezultă: $\sphericalangle ECA = \sphericalangle ACD = \sphericalangle CAD = \beta$. deci triunghiul ADC este isoscel, $AD = DC$. Unghiul $\alpha = 2\beta$.

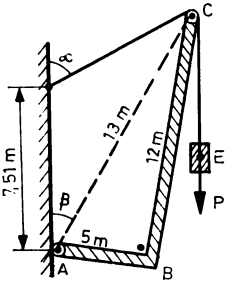

Fig. 7.39

$AC = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$, iar $\frac{AC}{2} = AD\cos\beta$ sau $\cos\beta = \frac{13}{2 \cdot 7{,}51} \approx 0{,}865$, de unde $\beta = 50°$; $\alpha = 60°$.

Observăm că poziția de echilibru nu depinde nici de forma barei ABC, nici de mărimea greutății **P**.

7.40. Semidiscul ia poziția astfel că centrul de greutate **G** este pe verticala punctului fix A de susținere a firului; iar AB poziție verticală. Notăm cu α unghiul făcut pe diametrul BC cu orizontala ce trece prin B. Dar $\sphericalangle BGO = \alpha$, O fiind mijlocul lui BC, deci $\operatorname{tg}\alpha = \frac{OB}{OG} = \frac{R}{OG}$. Pentru a calcula distanța OG adică distanța de la centrul de greutate al discului la diametrul BC, aplicăm teorema a II-a a lui *Guldin*. Volumul rezultat prin rotație este egal cu aria care se rotește înmulțită cu drumul descris de centrul de greutate al ariei care se rotește. Semicercul rotit în jurul diametrului dă naștere la o sferă deci:

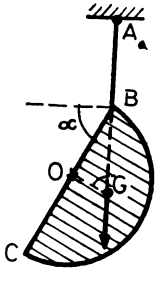

Fig. 7.40

$$\frac{4\pi R^2}{3} = \frac{\pi R^2}{2} \cdot 2\pi OG \text{ de unde } OG = \frac{4R}{3\pi} \text{ și } \operatorname{tg}\alpha = \frac{3\pi}{4} \sim 2{,}45.$$

7.41. Relația o scriem:

$$\sin B + \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \sin C + \sin\left(\frac{\pi}{2} - C\right)$$

sau $2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right)$;

$\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right)$ și de aici sau $B-\frac{\pi}{4}=C-\frac{\pi}{4}\Rightarrow B=$ $=C$ și triunghiul este isoscel. sau $B-\frac{\pi}{4}=-\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow B+C=\frac{\pi}{2}$ și triunghiul este dreptunghic, cu unghiul drept în A.

7.42. Din relația dată avem $\operatorname{arc\,tg}2+\operatorname{arc\,tg}3=\pi-\operatorname{arc\,tg}1$ și deci $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}2+\operatorname{arc\,tg}3)=-\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}1)$, cea ce este adevărat.

Tot așa și în general: $\frac{b+c}{1-bc}=-a\Rightarrow a+b+c=abc.$

7.43. Avem $\sin 3x=\sin(3x+x)$ sau $\sin 2x\cos x+\sin x\cos 2x=$ $=4\sin x\cos 2x$; $3\sin x\cos 2x-\sin 2x\cos x=0$, de unde $3\sin x\cos^2 x-$ $-3\sin^3 x-2\sin x\cos^2 x=\sin x\cos^2-3\sin x=0$, sau $\sin x(\cos^2 x-$ $-3\sin^2 x)=\sin x(1-4\sin^2 x)=0$. Pentru $\sin x=0$, avem $x=k\pi$; $(k=0,1,\pm 2\ldots)$. Pentru $1-2\sin^2 x=0$ avem $\sin x=\pm\frac{1}{2}$, de unde $x=k\pi+\pi/6$.

7.44. a) Fie laturile triunghiului a, $b=a+q$, $c=a+2q$, iar unghiurile opuse respectiv A, B, C. Aplicînd teorema sinusului avem:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{a+q}{\sin B}=\frac{a+2q}{\sin C}\Rightarrow q=\frac{a\sin B-a\sin A}{\sin A} \tag{1}$$

și din $\frac{a}{\sin A}=\frac{a+2q}{\sin C}\Rightarrow q=\frac{a\sin C-a\sin A}{2\sin A}$ (2)

Din (1) și (2) rezultă: $\frac{a\sin B-a\sin A}{\sin A}=\frac{a\sin C-a\sin A}{2\sin A}\Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sin B=\sin A+\sin C=2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2}$ sau

$4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2}$ și în fine $2\sin\frac{B}{2}=\cos\frac{A-C}{2}$.

b) Exprimăm în două feluri aria triunghiului ABC:

$pq=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (3) (p semiperimetrul și q raza cercului înscris). Avem $2p=3a+3q$, $p=\frac{3(a+q)}{2}$; $p-a=\frac{a+3q}{2}$; $p-b=$ $=\frac{a+q}{2}$ și $p-c=\frac{a-q}{2}$. Deci (3) devine $\frac{3q}{2}(a+q)=$

$=\sqrt{\frac{3(a+q)}{2}\cdot\frac{a+3q}{2}\cdot\frac{a+q}{2}\cdot\frac{a-q}{2}}$ sau $\frac{2q^2(a+q)^2}{4}=\frac{3(a+q)^2}{4}\cdot\frac{a+3q}{2}\cdot$

$\cdot\frac{a-q}{2}\Rightarrow 15q^2-2aq-a^2=0\Rightarrow q=\frac{a\pm 4a}{15}\Rightarrow q=\frac{a}{3}$. Astfel că laturile

sînt: a; $a+\frac{a}{3}=\frac{4a}{3}$; $\frac{5a}{3}$. Triunghiul ABC este dreptunghic în C, căci $a^2+\left(\frac{4a}{3}\right)^2=\left(\frac{5a}{3}\right)^2$.

7.45. Avem $1+\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2 \Rightarrow \sin 2x=(\sin x+\cos x)^2-1$ și deci $(\sin x+\cos x)^3-(\sin x+\cos x)-\sqrt{2}=0$.

Punem $\sin x+\cos y=y$ și avem ecuația în y: $y^3-y-\sqrt{2}=0$. Se observă că $y=\sqrt{2}$ este rădăcină, căci $2\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$. Deci polinomul în y se divide cu $y-\sqrt{2}$ și avem: $y^3-y\sqrt{2}=(y-\sqrt{2})(y^2+\sqrt{2}\cdot y+1)$ și celelalte două rădăcini sînt date de ecuația $y^2+\sqrt{2}y+1=0$, $y=\frac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}$ complexe și nu corespund. Astfel că soluțiile x ale ecuației date, sînt date de ecuația $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$. Facem substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$ și avem $\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}-\sqrt{2}=0 \Rightarrow (\sqrt{2}+1)z^2-2z+\sqrt{2}-1=0$,

$z=\frac{1\pm 0}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$. Deci $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{2}-1$ și apoi

$$\operatorname{tg} x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+\frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(3-2\sqrt{2})}=1 \Rightarrow x=\pi/4+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

7.46. Ecuația se mai poate scrie $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi\cos x\right)=(\cos\pi\sin x)$ sau $\frac{\pi}{2}-\pi\cos x=2k\pi\pm\pi\sin x$, $k\in\mathbf{Z}$. Deci

1° Pentru $\cos x+\sin x=\frac{1}{2}-2k=\frac{1-4k}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$ și $-\sqrt{2}\leqslant \frac{1-4k}{2}\leqslant\sqrt{2}$ deci rezultă $k=0$, adică $\sin x+\cos x=1/2$, la care urmează rezolvarea și apoi verificarea.

2° Pentru $\frac{\pi}{2}-\pi\cos x=2k\pi-\pi\sin x$, obținem $\sin x-\cos x=\frac{4k-1}{2}$, $-\sqrt{2}\leqslant\frac{4k-1}{2}\leqslant\sqrt{2}$ deci $k=0$ și prin urmare $\sin x-\cos x=-1/2$. Ridicînd la pătrat, rezolvăm ecuația și reținem soluțiile care verifică ecuația inițială.

7.47. Avem: $2\sin\frac{B}{2}=\cos\frac{A+C}{2}=\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$ dar $\sin\frac{B}{2}=\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$, deci $\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\Rightarrow\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}=$

$= \frac{1}{2}$ și reciproc din $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$ imediat se vede că rezultă: $\sin\frac{B}{2}=$ $=\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$.

Astfel că relațiile sînt echivalente. $\sin\frac{B}{2}=\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\Leftrightarrow\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$.

2) Scriind relația dată în funcție de laturi avem:

$$\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}\Rightarrow 1=$$

$$=\frac{p-b}{b}\Rightarrow a+c=3b.$$

3) $\cos B=1-2\sin^2\frac{B}{2}=1-\frac{3-\sqrt{5}}{4}-\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ și $\cos 2B=$

$=2\cos^2 B-1=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ astfel că $\cos 2B=\sin\frac{B}{2}=\cos\left(90°-\frac{B}{2}\right)$ și de aici $2B\pm\left(90°-\frac{B}{2}\right)=360°k$. Deoarece B este unghiul unui triunghi, corespunde $k=0$ și semnul $-$ în fața parantezei.

Deci $2B-90°+\frac{B}{2}=0\Rightarrow B=36°$.

4) Din relația dată avem: $2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=2\sin\frac{B}{2}$ sau $\cos\frac{A-C}{2}-$ $-\cos\frac{A+C}{2}=2\sin\frac{B}{2}$, dar $\cos\frac{A+C}{2}=\sin\frac{B}{2}$ și deci $\cos\frac{A-C}{2}=$ $=3\sin\frac{B}{2}=\frac{3(\sqrt{5}-1)}{4}$. Din această relație găsim diferența $A-C$ și ținînd seama că $A+C=180°-B=180°-36°=144°$, din sistemul în A și C obținem unghiurile A și C.

7.48. 1°. Ridicînd la pătrat în ambii membri, din $\sin x+\cos x=a$ obținem $\sin x\cos=\frac{a^2-1}{2}$. Utilizînd acest rezultat și identități cunoscute deducem succesiv $\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)[(\sin x+\cos x)^2-$ $-3\sin x\cos x]=\frac{a(3-a^2)}{2}$, $\sin^5 x+\cos^5 x=(\sin x+\cos x).(\sin^4 x-$ $-\sin^3 x\cos x+\sin^2\cos^2 x-\sin x\cos^3 x+\cos^4 x)=(\sin x+\cos x)\times$ $\times[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-\sin^2 x\cos^2 x-\sin x\cos x(\sin^2 x+\cos^2 x)]=(\sin x+$ $+\cos x)\{[(\sin x+\cos x)^2-2\sin x\cos x]^2-\sin^2 x\cos^2 x-\sin x\cos x[(\sin x+$ $+\cos x)^2-2\sin x\cos x]\}=a\left[1-\frac{a^2-1}{2}-\frac{(a^2-2)^2}{4}\right]$.

Rezultă $E(x)=\frac{a}{4}[16-(a^2+1)^2]$.

2° Ecuația $\sin x + \cos x = a$ este echivalentă cu $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Deoarece valorile cosinusului sînt cuprinse între -1 și $+1$, ecuația dată admite soluții dacă și numai dacă $a \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Aceste soluții sînt: $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos a + 2k\pi$, $a \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $k \in \mathbf{Z}$.

3° Ecuația $E(x) = \frac{a}{4}[16 - (a^2 + 1)^2] = 0$, $a \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, admite numai soluția $a = 0$. Astfel $x = -\frac{\pi}{4} + m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$.

7.49. Se impune ca $A, B, C, D \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Relația dată se mai scrie:

$$\frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B} + \frac{\sin(C+D)}{\sin C \sin D} = \frac{\sin(A+B)\sin(A+C)\sin(A+D)}{\sin A \sin B \sin C \sin D}$$

sau ținînd seama că $\sin(C+D) = \sin(\pi - A - B) = \sin(A+B)$,

$$\frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B} + \frac{\sin(A+B)}{\sin C \sin D} = \frac{\sin(A+B)\sin(A+C)\sin(A+D)}{\sin A \sin B \sin C \sin D}.$$

Pentru $\sin(A+B) = 0$ egalitatea este evidentă. Pentru $A = B \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ ea se mai scrie:

$$\frac{1}{\sin A \sin B} + \frac{1}{\sin C \sin D} = \frac{\sin(A+C)\sin(A+D)}{\sin A \sin B \sin C \sin D};$$

$$\sin A \sin B + \sin C \sin D = \sin(A+C)\sin(A+D);$$

$$\frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2} + \frac{\cos(C-D) - \sin(A+C)}{2} =$$

$$= \frac{\cos(A+C-A-D) - \cos(A+C+A+D)}{2};$$

$\cos(A-B) - \cos(A+B) + \cos(C-D - \cos(\pi - C - D) =$
$= \cos(C-D) - \cos(\pi + A - B)$ sau $\cos(A-B) - \cos(A+B) +$
$+ \cos(C-D) + \cos(A+B) = \cos(A-B) + \cos(C-D)$.

7.50. Vectorii $\mathbf{i}$ și $\mathbf{j}$ fiind vectorii unitari ai axelor avem: $(\mathbf{i})^2 = (\mathbf{j})^2 = 1$; $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$. Se observă că: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (7\mathbf{i} - 2\mathbf{j})(2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}) = 14(\mathbf{i})^2 + 49\mathbf{ij} - 4\mathbf{ij} - 14(\mathbf{j})^2 = 14 - 14 = 0$; rezultă că vectorii $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$ sînt perpendiculari. De asemenea, din $\mathbf{c} = 21\mathbf{i} - 6\mathbf{j} = 3(7\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) = 3\mathbf{a}$ rezultă că vectorii $\mathbf{a}$ și $\mathbf{c}$ sînt paraleli.

7.51. Relația dată se mai scrie:

$$(\sqrt{2})^{6n}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4}\right)^{6n} = 8^n\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)^n.$$

7.52. Ecuația dată se mai scrie: $2^{\sin x} + \sin 2x = 2^{\sin 3x}$ sau $\sin x(3 - 4\sin^2 x) = \sin x(1 + 2\cos x)$ de unde $\sin x = 0$ și $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ sau

$3 - 4\sin^2 y = 1 + 2\cos x$ sau $4\cos^2 x - 1 = 1 + 2\cos x$ care se mai scrie: $4\cos^2 x - 2\cos x - 2 = 0$ sau $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ sau $(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$ de unde $\cos x = 1$ și $x = 2l\pi$, $l \in \mathbf{Z}$ sau $\cos x = -\frac{1}{2}$ și $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. Deci ecuația dată are soluțiile: $x_1 = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ și $x_2 = \pm\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

7.53. a) $1 - \sin^2 2x = 2 - \frac{5}{2}\sin 2x \Rightarrow 2\sin^2 2x - 5\sin 2x + 2 = 0$, $\sin 2x = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow \sin 2x = 2$ nu are soluții și $\sin 2x = \frac{1}{2}$ care are soluțiile: $2x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi$ sau $x = (-1)^k\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$.

b) Să determinăm pe k întreg, astfel ca:

$18\pi < (-1)^k\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} < 23\pi$, sau $216 < (-1)^k + 6k < 276 \Rightarrow 36 - \frac{(-1)^k}{6} < k < 46 - \frac{(-1)^k}{6}$ și de aici rezultă: $k = 36, 37, \ldots, 45$;

c) $\operatorname{tg} 2x_1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

TESTE (T.1 — T.184)

(Exerciţii şi probleme de verificarea cunoştinţelor)

T.1. Să se arate că dacă $A(1, 1)$, $B(1, -1)$, $C(-1, 1)$ şi $O(0, 0)$, atunci $\mathbf{OA} - \mathbf{OB} = 0$; $\mathbf{OA} - \mathbf{OC} = 0$; $\| \mathbf{OA} \| = \| \mathbf{OB} \| = \| \mathbf{OC} \| = \sqrt{2}$.

T.2. Fie punctele $A_1(1, 4)$, $A_2(7, 0)$, $A_3(6, -2)$, $A_4(-2, -2)$, $A_5(-5, 0)$, $A_6(-3, 4)$, $M(2/3, 2/3)$. Să se arate că $\sum_{i=1}^{6} \mathbf{OA}_i = 6\mathbf{OM}$; $\sum_{i=1}^{6} \mathbf{MA}_i = 0$; $\mathbf{MA}_1 + \mathbf{MA}_2 = 4(\mathbf{MA}_2 + \mathbf{MA}_3)$; $5(\mathbf{MA}_3 + \mathbf{MA}_6) + (\mathbf{MA}_4 + \mathbf{MA}_5) = \mathbf{0}$. (*C.I.Ţ*)

T.3. Un triunghi ABC are $\| AB \| = 15$, $\| AC \| = 14$ şi $\| BC \| = 13$. Să se arate că dacă $| AM |$ este mediană, $| BB_1 |$ este înălţimea, atunci $\mathbf{BC} + \mathbf{BA} = 2\mathbf{BB}_1 + 2\mathbf{B}_1\mathbf{M}$ şi $\mathbf{BM} \cdot \mathbf{MA} = 14$. (*C.I.Ţ*)

T.4. Într-un triunghi dreptunghi ABC cu unghiul A drept, ducem prin A o dreaptă pe care luăm de o parte şi de alta a lui A segmentele $\| AD \| = \| AE \|$. Pe dreapta CD luăm segmentul $\| DG \| = \| DC \|$, iar pe dreapta BE luăm $\| EF \| = \| BE \|$. Să se arate că:

$$\| AG \| \cdot \cos(\widehat{CAG}) + \| AF \| \cdot \cos(\widehat{CAF}) + \| AC \| = 0;$$

$$\| AG \| \cdot \cos(\widehat{BAG}) + \| AF \| \cdot \cos(\widehat{BAF}) + \| AB \| = 0. \quad (C.I.Ţ.)$$

T.5. Fie un poligon convex $A_1A_2 \ldots A_n$ circumscris unui cerc de centru O. Să se arate că:

$$\sum_{i=1}^{n} (\| \mathbf{OA}_i \| \sin A_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{| OA_i |} \cdot \| \mathbf{OA}_i \| \cdot \cos\left(\frac{A_i}{2}\right) = 0.$$

(G.M.B., 16 626, *C.I.-Ţ.*)

T.6. Fie patru puncte din spaţiu A, B, C, D, iar G_a, G_b, G_c, G_d centrele de greutate ale triunghiurilor BDC, ACD, ABD, ABC. Notăm cu M mijlocul segmentului care uneşte mijloacele segmentelor $| AB |$ şi $| CD |$. Să se arate că:

a) $\mathbf{AB} + \mathbf{AC} + \mathbf{AD} = 4\mathbf{AM}$ şi analoagele.

b) $\mathbf{MG}_a + \mathbf{MG}_b + \mathbf{MG}_c + \mathbf{MG}_d = 0$. (*C.I.Ţ.*)

T.7. Fie un triunghi ABC şi O un punct din interiorul lui. Din punctul O ducem vectorii $\mathbf{OA}_1$, $\mathbf{OB}_1$, $\mathbf{OC}_1$, astfel încît $\mathbf{OA}_1 \perp BC$, $\mathbf{OB}_1 \perp AC$, $\mathbf{OC}_1 \perp AB$; $\| \mathbf{OA}_1 \| = \| BC \|$, $\| \mathbf{OB}_1 \| = \| AC \|$ şi $\| \mathbf{OC}_1 \| = \| AB \|$.
Să se arate că $\mathbf{OA}_1 + \mathbf{OB}_1 + \mathbf{OC}_1 = 0$. (Generalizare). (*C.I.Ţ.*)

T.8. Să se arate că dacă $x \in [0, \pi/2]$, $y \in [0, \pi/2]$, $a, b \in \mathbf{R}$, atunci
$a^2 + b^2 \leqslant (a \cos x + b \cos y)^2 + (a \sin x + b \sin y)^2 \leqslant (a + b)^2$;
$(a - b)^2 \leqslant (a \cos x - b \cos a)^2 + (a \sin x - b \sin y)^2 \leqslant a^2 + b^2$;
$(a - b)^2 \leqslant (a \cos x \pm b \cos y)^2 + (a \sin x \mp b \sin y)^2 \leqslant (a + b)^2$.
(*C.I.Ţ.*)

T.9. Fie $(x, y) \in [0, 2\pi)$ și $f(x, y) = 5\sin^2 x + 3\sin^2 y + 4\cos(x - y) + 8\cos x \cos y$.

Să se arate că $f(0, \pi) = f(\pi, 0) = -12$ și dacă $x = y$, atunci $f(x, y) = 12$. (*C.I.-T.*)

T.10. Să se arate că:

$$\sqrt{7 - 3\cos^2 x - 4\sqrt{3}\sin x} + \sqrt{7 - 3\cos^2 x + 4\sqrt{3}\sin x} = 4. \quad (C.I.T.)$$

T.11. Să se arate că oricare ar fi x real, $a > 0$, $b > 0$, atunci

$$\min\{a, b\} \leqslant \sqrt{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} \leq \max\{a, b\}, \quad (1)$$

$$\min\{a, b\} \leqslant \sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} \leq \max\{a, b\}. \quad (2)$$

(G.M.B., 1980, *C.I.T.*)

T.12. Să se arate că:
$-4 \leqslant \sin^2 x + 4\cos x \leqslant 4$; $-12 \leqslant 9\cos^2 x - 12\sin x \leqslant 13$. (*C.I.T.*)

T.13. Fie $f(x, y) = 8\cos^2 x - 3\sin^2 y + 6\cos x + 8\cos y - 10\cos x \cos y - 2\cos(x + y)$. Să se arate că:
$f(0, \pi/2) = 11$; $f(\pi/2, 0)$ W -8, $f(\pi. 0) = 6$ și $f(0, \pi) = 34$. (*C.I.T.*)

T.14. Să se arate că dacă $a, b, x \in \mathbf{R}$, atunci
$(a\cos x \pm b\sin x)^2 + (a\sin x \mp b\cos x)^2 = a^2 + b^2$,
$(a \pm b\operatorname{tg} x)^2 + (a\operatorname{tg} x \mp b)^2 = (a^2 + b^2)(1 + \operatorname{tg}^2 x)$. (*C.I.T.*)

T.15. Să se arate că funcția $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ dată de $f(x) \overset{\text{def}}{=} x^2 + 2x\sin x - \cos^2 x$ este funcție crescătoare. (*C.I.T.*)

T.16. Să se arate că dacă $0 \leqslant a \leqslant \pi$ și $0 \leqslant b \leqslant \pi$, atunci
$-20 \leqslant 2\sin^2 a - 3\sin^2 b - 8\cos a - 12\cos b \leqslant 20$,
$-20 \leqslant 3\sin^2 a + 2\sin^2 b + 12\cos a - 8\cos b \leqslant 20$. (*C.I.T.*)

T.17. Fie $f(x, y) = 3(\sin^2 x + \sin^2 y) + 6\cos x \cos y + 2\cos(x + y) - 8(\cos x - \cos y)$. Să se arate că $f(0, \pi) = -24$; $f(\pi/2, 0) = f(\pi, \pi/2) = 11$. (*C.I.T.*)

T.18. Să se arate că dacă $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ și $y \in [\pi/4, \pi/3]$, atunci

$$\frac{1}{4} \leqslant (1 + \sqrt{2 - x^2})\cos^2 y \leqslant \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \leqslant (1 + \sqrt{2 + x^2})\sin^2 y \leqslant \frac{9}{4}. \quad (C.I.T.)$$

T.19. Fie $f(x, y) = 5\sin^2 x + 3\cos^2 y - 2\sin x \sin y - 6\cos(x - y)$. Să se arate că $f(0, 0) = -3$; $f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = f\left(0, \frac{3\pi}{2}\right) = f\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) = 0$;

$$f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}, \pi\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) = 8; f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) =$$

$$= f\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 13. \quad (C.I.T.)$$

T.20. Fie $f(x, y) = (2x + y)^2 - 2(2x + y)(2\sin x + \sin y) - 4\cos(x + y) - 4\cos x + 2\cos y$. Să se arate că:

$f(\pi/2, \pi/2) = 2{,}25\pi^2 - 9\pi + 4$; $f(\pi, \pi) = 9\pi^2 - 2$;

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{49\pi^2}{36} - \frac{7(2+\sqrt{3})\pi}{6} + \frac{7+4\sqrt{3}}{4} \quad f(2\pi, 2\pi) = 6(6\pi^2 - 1).$$

(*C.I.Ţ.*)

T.21. Fie funcţiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ date de $f(x) = \sqrt{(8 \sin x^2) - 7 \sin^2 2x}$ şi $g(x) = \sqrt{(8 \cos x)^2 - 7 \sin^2 2x}$. Să se arate că $f \in [0, 8]$; $g \in [0, 8]$; $f + g \in [8, 10]$. (*C.I.Ţ.*)

T.22. Să se arate că dacă $x \in \mathbf{R}$, atunci

$\sqrt{1 + \sin^2 x} + |\cos x| \leqslant 2$; $\sqrt{1 + \cos^2 x} + |\sin x| \leqslant 2$;

$\sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 x} + |\operatorname{tg} x| \leqslant 2\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}$. (*C.I.Ţ.*)

T.23. Să se arate că dacă $x = 5\pi/4$, $y = 7\pi/4$, $z = 3\pi/4$ şi $t = 3\pi/4$, atunci

$$\sqrt{3 + 2(\cos x - \operatorname{coc} y) - \cos(x - y)} + \sqrt{3 + 2(\sin y - \sin z) - \cos(y - z)} +$$
$$+ \sqrt{3 + 2(\cos t - \cos z) - \cos(t - z)} + \sqrt{3 + 2(\sin x - \sin t) - \cos(x - t)} =$$
$$= 4(\sqrt{2} - 1).$$ (*C.I.Ţ.*)

T.24. Fie $(x, y) \in [0, 2\pi]$ şi $f(x, y) = \sqrt{3 - \sin x + 2\cos x} +$
$+ \sqrt{1 - \cos(x - y)} + \sqrt{3 - 2\sin y - \cos y}$. Să se calculeze
$f\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ şi $f\left(2\pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$. (*C.I.Ţ.*)

T.25. Să se arate că dacă $x = \operatorname{arctg} 3$, atunci

$$\sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{5}}\sin x} + \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos x - \frac{2}{\sqrt{5}}\sin x} = \sqrt{2(2 - 2)}.$$

(*C.I.Ţ.*)

T.26. Să se arate că $10\cos^2 x + 8\sin 2x \to 5 \in [-\sqrt{89}, \sqrt{89}]$. (*C.I.Ţ.*)

T.27. Să se arate că dacă $x = 7\pi/6$, $y = 5\pi/6$ şi dacă $x = 11\pi/6$, $y = \pi/6$, atunci $3\sin x \cos x - 3\sin x \cos y - \cos x = 3\cos x \sin y -$
$- 3\sin y \cos y - \cos y = \sin(x - y)$. (*C.I.Ţ.*)

T.28. Să se arate că:

$$\frac{1}{2} + 5\sin^2\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\right) = \cos^2\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\right);$$

$$\frac{1}{2} + 3\sin^2\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\right) = \cos^2\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\right).$$ (*C.I.Ţ.*)

T.29. Fie $f(x, y) = \sqrt{29 + 16\cos x + 12\sin x} + \sqrt{20 - 16\cos(x - y)} +$
$+ \sqrt{41 - 32\cos y + 24\sin y}$.

Să se arate că $f\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}, \operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right) = f\left(\pi + \operatorname{arctg}\frac{3}{4}, \operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right) =$
$= 10$ şi $f\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}, \pi + \operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right) = 22$. (*C.I.Ţ.*)

T.30. Să se arate că dacă $x - y + (2k + 1)\pi = 0$, $k \in \mathbf{Z}$, atunci $\sin x + \cos x + \sin y + \cos y = t0$; $\sin(x + y) = -\sin 2x$; $\cos(x + y) = \cos 2x$; $\sin(x - 2y) = -\sin x$; $\cos(x - 2y) = \cos x$; $\sin(x + 2y) = \sin 3x$. (*C.I.T.*)

T.31. Să se arate că $-\sqrt{5} \leqslant 2\cos x + \sin x \leqslant \sqrt{5}$, primul egal are loc pentru $x = \pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2}$, iar al doilea egal pentru $x = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2}$. (*C.I.T.*)

T.32. Să se arate că dacă $x \in [0, \pi/4]$, atunci $\sqrt{(\sin x + \sin 2x)^2 + (\cos x + \cos 2x)^2} \leqslant 2$. (*C.I.T.*)

T.33. Să se arate că:

a) Dacă $x \in [0, \pi/2]$, atunci $\cos x + \sin x \in [1, \sqrt{2}]$ şi $\cos x - \sin x \in [-1, 1]$;

b) Dacă $x \in [\pi/2, \pi]$, atunci $\cos x + \sin x \in [-1, 1]$ şi $\cos x - \sin x \in [-\sqrt{2}, -1]$.

c) Dacă $x \in [\pi, 3\pi/2]$, atunci $\cos x + \sin x \in [-\sqrt{2}, -1]$ şi $\cos x - \sin x \in [-1, 1]$.

d) Dacă $x \in [3\pi/2, 2\pi]$, atunci $\cos x + \sin x \in [-1, 1]$ şi $\cos x - \sin x \in [1, \sqrt{2}]$. (*C.I.T.*)

T.34. Să se arate că $2\cos x + 12\cos y - 3\sin^2 y \in [-14, 14]$ (*C.I.T.*)

T.35. Să se arate că dacă $(x, y) \in [0, \pi]$, atunci

$\sin^2 x - \sin^2 y + 6\cos x - 4\cos y \in [-10, 10]$;

$\cos^2 2x - \cos^2 2y + 6\sin 2x - 4\sin 2y \in [-10, 10]$. (*C.I.T.*)

T.36. Să se arate că dacă $(x, y, z) \in [0, 2\pi]$, atunci $2 \leqslant \sqrt{5 - 4\cos(x - y)} + \sqrt{13 - 12\cos(y - z)} \leqslant 8$ primul egal are loc pentru $x = y = z$, iar al doilea egal are loc pentru $x = z$, $y = x + \pi$. (*CI.T.*).

T.37. Să se arate fără tabele că dacă $(x, y, z, t) \in (0, \pi)$, $\cos x = 7/5\sqrt{2}$, $\cos y = 3/\sqrt{10}$, $\cos z = 2/\sqrt{5}$, $\cos t = -3/5$, atunci $\sin(x + y) = 1/\sqrt{5}$; $\sin(y + z) = 1/\sqrt{2}$; $\sin(z - x) = 1/\sqrt{10}$; $\sin(x + y + z) = 4/5$; $x + y + z + t = \pi$. (*C.I.T.*)

T.38. Să se arate că dacă $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$, $y = \pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3}$ şi dacă $x = \pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3}$, $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$, atunci $[3\cos x - 3\cos y + \sin x - \sin y + \cos(x + y) + 1]^2 = 40$. (*C.I.T.*)

T.39. Să se arate că dacă $(x, y) \in [0, 2\pi]$, $f(x, y) = 20\cos x - 15\cos y - 12\cos(x + y)$, atunci $f\left(\pi + \arccos \frac{4}{5}, \arcsin \frac{4}{5}\right) = f\left(\pi - \arccos \frac{4}{5}, 2\pi - \arcsin \frac{4}{5}\right) = -25$ şi $f(0, \pi) = 47$. (*C.I.T.*)

T.40. Să se arate că $(\forall)\ a \in [0, 5]$ și $(x, y) \in [0, 2\pi]$, atunci $10 \leqslant \sqrt{a^2 + 25 + 2a(3\cos x - 4\sin x)} + \sqrt{a^2 + 25 - 2a(3\cos y + 4\sin y)} + a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(x - y)} \leqslant 10 + 4a$, primul egal are loc pentru $x = \pi + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, $y = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, iar al doilea egal are loc pentru $x = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, $y = \pi + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

Se ține seama că $-5 \leqslant 3\cos x + 4\sin x \leqslant 5$, iar $-1 \leqslant \cos(x - y) \leqslant 1$. *(C.I.T.)*

T.41. Să se arate că dacă $(a, b) \in [0, \pi/2)$, atunci $0 \leqslant (\sin a - \sin b)^2 + (\cos a - \cos b)^2 \leqslant 2$; $0 \leqslant (\sin a - \cos b)^2 + (\cos a - \sin b)^2 \leqslant 2$;

$2 \leqslant (\sin a + \sin b)^2 + (\cos a + \cos b)^2 \leqslant 4$; $2 \leqslant (\sin a + \cos b)^2 + (\cos a + \cos b)^2 \leqslant 4$;

$0 \leqslant (\sin a \pm \sin b)^2 + (\cos a \mp \cos b)^2 \leqslant 4$; $0 \leqslant \sin a \pm \cos b)^2 + (\cos a \mp \sin b)^2 \leqslant 4$. *(C.I.T.)*

T.42. Să se arate că dacă $a \in [0, \pi/2]$ și $b \in [\pi/2, \pi]$, atunci $5 \leqslant 16(\sin a - \cos b) + \sin a \cos b + 5(\cos^2 a - \cos^2 b) \leqslant 17{,}8$. *(C.I.T.)*

T.43. Să se arate că dacă $(a, b) \in [0, \pi/2]$ și $(m, n) \in [0, 1]$, atunci $0 \leqslant mn\cos(a - b) + \sqrt{(1 - m^2)(1 - n^2)} \leqslant 1$; primul egal are loc pentru $m = n = 1$, $a = 0$, $b = \pi/2$ și pentru $m = n = 1$, $a = \pi/2$, $b = 0$ iar al doilea egal are loc pentru $m = n = 0$. *(C.I.T.)*

T.44. Să se arate că dacă $x \leqslant (\pi/2)\,\varepsilon\,\mathbf{Z}$, atunci

$$\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}\right)^2 = \frac{8}{\sin^2 2x}. \qquad (C.I.T.)$$

T.45. Dacă $\operatorname{tg} a = -3$, $\operatorname{tg} b = -2$, unde $(a, b) \in (\pi/2, \pi)$ să se arate că $\operatorname{tg}(a + b) = 1$. *(C.I.T.)*

T.46. Să se arate că $(\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^2 + (\cos x + \cos 2x + \cos 3x)^2 \leqslant 9$. *(C.I.T.)*

T.47. Să se arate că dacă $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 5$, $(\alpha, \beta) \in [0, 2\pi]$ $f(x, y, \alpha\beta) = \sqrt{x^2 - (8\cos\alpha + 6\sin\alpha)x + 25} + \sqrt{y^2 + (8\cos\beta + 6\sin\beta)y + 25} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos(\alpha - \beta)}$ și $g(x, y, \alpha, \beta) = \sqrt{x^2 + (8\cos\alpha + 6\sin\alpha)x + 25} + \sqrt{y^2 - (8\cos\beta + 6\sin\beta)y + 25} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos(\alpha - \beta)}$, atunci $f\left(x, y, \beta + \operatorname{arctg}\frac{3}{4}, \pi + \operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right) = g\left(x, y, \pi + \operatorname{arctg}\frac{3}{4}, \operatorname{aretg}\frac{3}{4}\right) = 10$. *(C.I.T.)*

T.48. Să se arate că $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}$; $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{17} = \operatorname{arc\,tg}\frac{2}{5}$.

T.49. Să se arate că $4\sin\frac{5\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24} = 1 + \sqrt{2}$; $4\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$. *(C.I.T.)*

T.50. Să se arate că

$$\sin a \pm \cos b = \left(\sin \frac{a+b}{2} \pm \cos \frac{a+b}{2}\right)\left(\cos \frac{a-b}{2} \pm \sin \frac{a-b}{2}\right).$$

Semnele se corespund. (*C.I.T.*)

T.51. Ţinînd seama de formula

$$\operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}$$

să se arate că dacă $(x, y, z) \in [1/3, 1/2]$, atunci

$$\frac{13}{9} \leqslant \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz} \leqslant \frac{11}{2}.$$ (*C.I.T.*)

T.52. Să se arate că dacă $(1 - \operatorname{tg}^2 x)(1 - \operatorname{tg}^2 y) = 2$ atunci $2 \sin^2 x \sin^2 y = 1$ şi $\cos 2x \cos 2y = 2 \cos^2 x \cos^2 y$. (*C.I.T.*)

T.53. Să se arate că

$[\sin(a + 2x) - \sin a]^2 + [\cos(a + 2x) - \cos a]^2 = 4 \sin^2 x.$

$[\sin(2a + x) - \sin x]^2 + [\cos(2a + x) - \cos x]^2 = 4 \sin^2 a.$ (*C.I.T.*)

T.54. Să se arate că dacă $x, y, z, t \in (0, \pi)$ şi $\cos x = 7\sqrt{2}/10$, $\cos y = 3\sqrt{10}/10$, $\cos z = 2\sqrt{5}/5$ şi $\cos t = -3/4$, atunci $x + y + z + t = \pi$. (*C.I.T.*)

T.55. Să se arate că $\sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3}$. (*C.I.T.*)

T.56. Să se arate că $\sin \frac{\pi}{8} \sin \frac{3\pi}{8} + \cos \frac{5\pi}{16} \cos \frac{7\pi}{16} + \sin \frac{5\pi}{16} \sin \frac{3\pi}{16} = \sin \frac{3\pi}{8}$. (*C.I.T.*)

T.57. Să se arate că $\sin \frac{5\pi}{8} + \sin \frac{7\pi}{12} + \sin \frac{19\pi}{24} = \cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{7\pi}{24}$. (*C.I.T.*)

T.58. Să se arate că $\left(\operatorname{arctg} \frac{49}{50} + \operatorname{arctg} \frac{1}{70}\right) \operatorname{arc\,tg} \frac{2}{5} = \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{49}{50} - \operatorname{arctg} \frac{1}{70}\right) \operatorname{arc\,sin} \frac{5}{13}$. (*C.I.T.*)

T.59. Să se arate că dacă $(x, y, z) > 0$, atunci $\sin x \sin y + \sin(x + y + z) \sin z = \sin(x + z) \sin(y + z)$.

$$\frac{\sin x \sin(x+y+z) + \sin y \sin z}{\sin x \sin y + \sin z \sin(x+y+z)} = \frac{\sin(x+y)}{\sin(y+z)}.$$ (*C.I.T.*)

T.60. Să se arate că dacă $(x, y, z) \in \mathbf{R}^+$ și

$A = [\sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)] \cdot [\sin x + \sin y - \sin z + \sin(x + y + z)]$;

$B = [\sin x - \sin y + \sin z + \sin(x + y + z)] \cdot [-\sin x + \sin y + \sin z + \sin(x + y + z)]$,

atunci $AB \leqslant 4$, egalitatea are loc pentru $x = y = z = \pi/4$. (*C.I.T.*)

T.61. Să se arate că dacă $(a, b) \in \mathbf{R}^+$ și $x \in (0, \pi/2)$, atunci $(a \operatorname{tg} x + b)(a \operatorname{ctg} x + b) \geqslant (a + b)^2$. (*C.I.T.*)

T.62. Știind că $x = \pi/2 + 2 \operatorname{arctg} 3$ să se arate că $\sin x = -4/5$, $\cos x = -3/5$, $\operatorname{tg} x = 4/3$. (*C.I.T.*)

T.63. Să se arate că dacă $(x, y) \in \mathbf{R}$, atunci $-5 \leqslant 2 \cos x - 2 \cos y + \cos(x + y) \leqslant 3$. (*C.I.T.*)

T.64. Să se arate că dacă $a \in [0, \pi/2]$ și $b \in [\pi/2, \pi]$, atunci $3,2 \leqslant (\sin a - \cos b)^2 + 4(2 - \sin a + \cos b)^2 \leqslant 16$. (*C.I.T.*)

T.65. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată de $f(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x + 2 \cos x - 1}$ și $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată de $g(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x}$. Să se arate că:

$$-\sqrt[3]{3} \leqslant f(x) - g(x) \leqslant 1 \leqslant f(x) + g(x) \leqslant 2\sqrt[3]{3/4}.$$ (*C.I.T.*)

T.66. Să se arate că dacă $(x, y, z) \in [0, 2\pi]$, atunci

$1 \leqslant \sqrt{1,25 - 0,8 \cos x - 0,6 \sin x} + \sqrt{1,25 - 0,8 \cos y - 0,6 \sin y} + \sqrt{0,5 - 0,5 \cos(x - z)} + \sqrt{0,5 - 0,5 \cos(y - z)} \leqslant 5$ primul egal are loc pentru $x = y = z = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$, iar al doilea egal are loc numai pentru $x = y = \pi + \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$, $z = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$. (*C.I.T.*)

T.67. Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată de $f(x, y) = -12 \cos x - 9 \sin x + 8 \cos y + 6 \sin y \cos(x - y)$.

Să se arate că $f\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{3}{4}, \pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{4}\right) = -19$ și

$f\left(\pi + \operatorname{arctg} \frac{3}{4}, \operatorname{arctg} \frac{3}{4}\right) = 31$. (*C.I.T.*)

T.68. Să se arate că

$6 \sin(x - 2y) \cos(x + 2y) + 8 \sin(x - 2y) \sin(x + 2y) - 9 \sin 4y + \cos 4y \in [-18,18]$. (*C.I.T.*)

T.69. Să se arate că $-3 \leqslant 3(\sin^2 x + \cos^2 y) + 2(\sin 2x + \cos 2y) \leqslant 9$. (*C.I.T.*)

T.70. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{9 + 4(\cos x - \sin x)} + \sqrt{9 - 4(\cos x - \sin x)} = 6.$$

Răspuns: $S = (\pi/4 + \pi\mathbf{Z})$. (*C.I.T.*)

T.71. Să se rezolve ecuația $x = \cos \frac{(2x + 1)\pi}{6} \cos \frac{(2x - 1)\pi}{6}$.

Răspuns: $x = 1/2$. (*C.I.T.*)

T.72. Să se rezolve ecuația

$$\left(\cos x+\cos\frac{7\pi}{24}\right)\left(\sin\frac{5\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{6}\right)=\left(\sin x-\sin\frac{7\pi}{24}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{5\pi}{12}\right).$$

Răspuns: $x=\left(-\frac{7\pi}{24}+\pi+2\pi\mathbf{Z}\right)$. *(C.I.T.)*

T.73. Să se rezolve ecuația

$$\left(\sin\frac{\pi}{5}-\sin\frac{\pi}{7}\right)\cos x-\left(\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{7}\right)\sin x=\left(\sin\frac{\pi}{35}-\sin\frac{\pi}{7}\right)\sin\frac{\pi}{35}+$$
$$+\left(\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{7}\right)\cos\frac{\pi}{35}.$$

$$S=\left(2\pi\mathbf{Z}-\frac{2\pi}{35}\right)\cup\left(2\pi\mathbf{Z}+\pi+\frac{2\pi}{35}\right).$$ *(C.I.T.)*

T.74. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ dată de

$$f(x)\overset{\text{det}}{=}\left(\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{3\pi}{10}\right)\cos x+\left(\sin\frac{\pi}{5}-\sin\frac{3\pi}{5}\right)\sin x.$$

Să se arate că: a) $f(x)\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$; b). Să se rezolve ecuația $f(x)=0$.

R: $S=(\pi/2+\pi/20+2\pi\mathbf{Z})\cup(-\pi/2+\pi/20+5\pi\mathbf{Z})$. *(C.I.T.)*

T.75. Să se rezolve în $\mathbf{R}^2$ ecuația

$$(2+\cos x-y)^2+(2-2y+2\sqrt{3}\sin x)^2=0.$$

R: $x_1=[\pi/3+2\pi\mathbf{Z}]$, $y_1=5/2$; $x_2=[\pi+2\pi\mathbf{Z}]$, $y_2=1$. *(C.I.T.)*

T.76. Să se arate că ecuația $x^3-7(3x^2-5x+1)=0$ admite rădăcinile: $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{7}$, $\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{7}$, $\operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{7}$ iar $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}\cdot\operatorname{tg}\frac{3\pi}{7}=\sqrt{7}$. *(C.I.T.)*

T.77. Fie (x_1,y_1) și (x_2,y_2) perechile de soluții ale sistemului de ecuații $x^2+y^2=1$; $\frac{x}{y}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=0$, să se arate că $x_1+x_2=y_1+y_2=0$; $x_1x_2+y_1y_2+1=0$; $8(x^4+y^4)=7$. *(C.I.T.)*

T.78. Să se rezolve în $\mathbf{R}^2$ pe rînd ecuațiile
$2\cos x-2\cos y+\cos(x+y)=5$ și $2\cos x-2\cos y+\cos(x+y)=3$.
Răspuns: $x_1=\pi+2\pi\mathbf{Z}$, $y_1=2\pi\mathbf{Z}$ și $x_2=2\pi\mathbf{Z}$, $y_2=\pi+2\pi\mathbf{Z}$.
(C.I.T.)

T.79. Să se arate că dacă funcția $f:[0,\pi]\to\mathbf{R}$ este dată de $f(x,y)=\cos x-\cos y-\cos(x-y)$, atunci $-1=f(\pi,y)\leqslant f(x,y)\leqslant f(0,\pi)=3$. *(C.I.T.)*

T.80. Să se rezolve în $\mathbf{R}^2$ sistemul de ecuații
$2+2\cos x=\cos y$; $2\sin x+\sin y=0$. *(C.I.T.)*

T.81. Să se rezolve în $\mathbf{R}^2$ sistemul de ecuații: $(1+\sqrt{2})(1-\cos x)=\cos y$; $(1+\sqrt{2})(1-\sin x)=\sin y$. Verificare. *(C.I.T.)*

T.82. Să se afle valorile lui x și y din intervalul $[0, 2\pi]$ care satisfac simultan relațiile: $2\cos x = \cos y\sqrt{9 - 5\cos^2 x}$; $3\operatorname{tg} x = 2\operatorname{tg} y$. *(C.I.T.)*

T.83. Să se rezolve în $\mathbf{R}^2$ sistemul de ecuații

$$\frac{x}{y} = \frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{49}{50} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{70}}{\operatorname{arc\,tg}\frac{49}{50} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{70}}\ ;\ 4xy = \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{49}{50}\right)^2 - \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{70}\right)^2$$

și să se verifice pentru $x = \operatorname{arctg}\frac{2}{5}$ și $y = \operatorname{arc\,tg}\frac{5}{12}$ soluții ale sistemului. *(C.I.T.)*

T.84. Fie A, B, C, D vîrfurile unui tetraedru. Să se arate care din următoarele propoziții sînt adevărate și care false:

a: „$\mathbf{AB + AC + CD + BD = 2AB}$"; *b*: „$\mathbf{AC + BD - AB - CD = 2BC}$".
c: „$\mathbf{AC + BD = AD + BC}$"; *d*: „$\mathbf{AB - AC = CD - BD}$";
e: „$\mathbf{AB + 2BD = AD + BC + CD}$"; *f*: „$\mathbf{AC + BD = AB + 2BC + CD}$".
(C.I.T.)

T.85. Să se arate că $3\sin^2 x + 2\sin 2x \in [-1, 4]$; $3\cos^2 x + 2\cos x \in [-2, 5]$. *(C.I.T.)*

T.86. Să se arate că dacă $(a, b) \in ([0, \pi]$, atunci
$\cos a + \cos b + \sin a - \sin b + \sin(a + b) \in [-2, 2]$
extremele fiind atinse respectiv pentru $a = b = \pi$ și apoi pentru $a = b = 0$. *(C.I.T.)*

T.87. Să se arate că:

a) Dacă $x \in [0, \pi/2]$, atunci $1 \leqslant \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{2}\sin\frac{x}{2} \leqslant 1 + \sqrt{2}$.

b) Dacă $x \in [0, \pi]$, atunci $1 \leqslant \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{2}\sin\frac{x}{2} \leqslant \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$.

(C.I.T.)

T.88. Să se arate că dacă $x \in [0, 2\pi]$, atunci
$\sqrt{7\cos^2 x - 32\cos x + 25} + \sqrt{7\cos^2 x + 32\cos x + 25} \in [8, 10]$. *(C.I.T.)*

T.89. Să se arate că dacă $(x, y) \in [0, 2\pi]$, atunci
$5\sin^2 x + 4\cos(x - y) + 2\cos x\cos y \in [-6, 9]$.
marginea inferioară are loc dacă $x = 0$, $y = \pi$ și dacă $x = \pi$, $y = 0$; iar marginea superioară are loc dacă $x = y = \pi/2$ și dacă $x = y = 3\pi/2$. *(C.I.T.)*

T.90. Să se arate că dacă $x \in [0, \pi/2]$, $y \in [0, 1]$, atunci $-5 \leqslant 12\cos^2 x - 8y\sin x + 8\cos x + 8y - 5y^2 - 8\cos x \leqslant 20$ primul egal are loc pentru $x = \pi/2$, $y = 1$; iar al doilea egal are loc pentru $x = y = 0$. *(C.I.T.)*

T.91. Să se arate că dacă $(x, y) \in [0, \pi/2]$, atunci
$-2 \leqslant 3\sin^2 x + 8\cos^2 y + 10\sin x\cos y + 2\sin(x - y) \leqslant 23$ primul egal are loc pentru $x = 0$, $y = \pi/2$; iar al doilea pentru $x = \pi/2$, $y = 0$. *(C.I.T.)*

T.92. Fie $f(x) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{a^2 + 2(1 - \cos x)(a + 1)}$;
$g(y) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{a^2 - 2(3 + 2\cos y)a + 3\cos^2 y + 12\cos y + 10}$.
Să se arate că:

1°. Dacă $a \in [0, 1]$, atunci $1 \leqslant f + g \leqslant 7$, primul egal are loc pentru $x = 0$, $y = \pi$, iar al doilea egal are loc pentru $x = \pi$, $y = 0$.

2°. Dacă $a \in [5, 6]$, atunci $1 \leqslant f - g \leqslant 7$, primul egal are loc pentru $x = 0$, $y = \pi$, iar al doilea egal are loc pentru $x = \pi$, $y = 0$.

3°. Dacă $a \in [-3, -2]$, atunci $1 \leqslant g - f \leqslant 7$, primul egal are loc pentru $x = 0$, $y = \pi$, iar al doilea egal are loc pentru $x = \pi$, $y = 0$.
(C.I.T.)

T.93. Să se arate că dacă $f(x, y) = 5(4\sin^2 x + \sin^2 y) + 4(4\cos x + \cos y)$ și $(x, y) \in [0, \pi]$, atunci $f(\pi, \pi) = -20 \leqslant f(x, y) \leqslant f\left(\arccos\frac{2}{5}, \arccos\frac{2}{5}\right) = 29$. *(C.I.T.)*

T.94. Să se arate că
$2\sin 4x - 6\sin 2y + 3\cos^2 2x + 5\cos^2 y \in [-5, 13]$. *(C.I.T.)*

T.95. Să se arate că dacă $(x, y, z) \in [0, 2\pi)$ și $f(x, y, z) = \sqrt{5 + 4\cos x} + \sqrt{6 - 4\cos x + 4\cos y - 2\cos(x - y)} + \sqrt{6 - 4\cos y + 4\cos z - 2\cos(y - z)}$, atunci: $f(0, 0, \pi) = f(0, \pi, \pi) = f(\pi, 0, \pi) = f(\pi, \pi, \pi) = 5 \leqslant f(x, y, z)$. *(C.I.T.)*

T.96. Vectorii **OA**, **OB**, **OC** de mărimi respectiv $2\sqrt{3}$, $\sqrt{6} + \sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ sînt în același plan; iar $\widehat{AOB} = \frac{3\pi}{4}$, $\widehat{BOC} = \frac{2\pi}{3}$.
Să se arate că $\mathbf{OA} + \mathbf{OB} + \mathbf{OC} = 0$. *(C.I.T.)*

T.97. Să se arate că dacă patrulaterul inscriptibil $ABCD$ are laturile $\|AB\| = 2\sqrt{5}$, $\|BC\| = 6$, $\|CD\| = 5\sqrt{2}$ și $\|AD\| = 3\sqrt{10}$, atunci raza cercului circumscris este egală cu 5. *(C.I.T.)*

T.98. Trei vectori coplanari $\mathbf{OF}_1$, $\mathbf{OF}_2$, $\mathbf{OF}_3$ au ca mărimi: $\|\mathbf{OF}_1\| = \sin\frac{5\pi}{24}$; $\|\mathbf{OF}_2\| = \sin\frac{5\pi}{12}$, $\|\mathbf{OF}_3\| = \sin\frac{3\pi}{8}$ și $\widehat{F_1OF_2} = \frac{5\pi}{8}$; $\widehat{F_2OF_3} = \frac{19\pi}{24}$.
Să se arate că $\mathbf{OF}_1 + \mathbf{OF}_2 + \mathbf{OF}_3 = 0$. *(C.I.T.)*

T.99. Fie vectorii coplanari concurenți $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$ astfel încît $(\widehat{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2}) = 7\pi/12$; $(\widehat{\mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4}) = 11\pi/12$; $\|\mathbf{V}_1\| = \sqrt{6} - \sqrt{2}$; $\|\mathbf{V}_2\| = 4$; $\|\mathbf{V}_3\| = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ și $\alpha \in [0, 5\pi/12]$. Să se arate că $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 = ; 0(\sqrt{6} - \sqrt{2})\cos\alpha + (\sqrt{6} + \sqrt{2})\sin\alpha = 4\cos(5\pi/12 - \alpha)$. *(C.I.T.)*

T.100. În același plan sînt vectorii $\mathbf{OA}_1$, $\mathbf{OA}_2$, $\mathbf{OA}_3$, $\mathbf{OA}_4$ astfel încît $\|\mathbf{OA}_1\| = \sqrt{2}$, $\|\mathbf{OA}_2\| = 1$; $\|\mathbf{OA}_3\| = \sqrt{2}$, $\|\mathbf{OA}_4\| = \sqrt{3}$; $\widehat{A_1OA_2} = \widehat{A_2OA_3} = 5\pi/12$; $\widehat{A_3OA_4} = 7\pi/12$.

Să se arate că $\mathbf{OA}_1 + \mathbf{OA}_2 + \mathbf{OA}_3 + \mathbf{OA}_4 = 0$. *(C.I.Ț.)*

T.101. Vectorii coplanari $\mathbf{OF}_1$, $\mathbf{OF}_2$, $\mathbf{OF}_3$, $\mathbf{OF}_4$, au ca mărimi $\|\mathbf{OF}_1\| = \sin\frac{\pi}{8}$, $\|\mathbf{OF}_2\| = \sin\frac{3\pi}{16}$, $\|\mathbf{OF}_3\| = \sin\frac{3\pi}{8}$, $\|\mathbf{OF}_4\| = \sin\frac{5\pi}{16}$ iar $\widehat{F_1OF_2} = \frac{5\pi}{16}$, $\widehat{F_2OF_3} = \frac{9\pi}{16}$ și $\widehat{F_3OF_4} = \frac{11\pi}{16}$. Să se arate că $\mathbf{OF}_1 + \mathbf{OF}_2 + \mathbf{OF}_3 + \mathbf{OF}_4 = 0$. *(C.I.Ț.)*

T.102. Vectorii coplanari de mărimi $\|\mathbf{OA}_1\| = \|\mathbf{OA}_3\| = \sqrt{3} - 1$; $\|\mathbf{OA}_2\| = \|\mathbf{OA}_5\| = 2$; $\|\mathbf{OA}_4\| = \|\mathbf{OA}_6\| = 2$ și $\widehat{A_1OA_2} = \widehat{A_2OA_3} = \pi/4$; $\widehat{A_3OA_4} = \pi/3$; $\widehat{A_4OA_5} = \widehat{A_5OA_6} = 5\pi/12$. Să se arate că $\sum_{i=1}^{3} \mathbf{OA}_i = 0$. *(C.I.Ț.)*

T.103. Un pentagon convex $ABCDE$ este înscris într-un cerc. Dacă $\|AB\| = \sqrt{20}$; $\|BC\| = 6$; $\|CD\| = \sqrt{50}$; $\|DE\| = 8$ și $BC \parallel DE$ să se calculeze raza R a cercului circumscris și $\|AE\|$. *(C.I.Ț.)*

T.104. Un pentagon $ABCDE$ are $\|AB\| = 8$, $\|BC\| = 7$, $\|CD\| = 6$, $\|DE\| = 5$ m, $\widehat{A} = \pi/3$, $\widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 3\pi/4$. Se cere $\|AD\|$, $\|AE\|$ și aria pentagonului. *(C.I.Ț.)*

T.105. Într-un cerc de centru O este înscris patrulaterul $ABCD$, iar latura AD este cea mai apropiată de centrul O care este în exteriorul patrulaterului. Fie $\mathbf{OF}_1 \perp AB$, $\|\mathbf{OF}_1\| = |AB|$; $\mathbf{OF}_2 \perp |BC|$, $\|\mathbf{OF}_2\| = |BC|$; $\|\mathbf{OF}_3\| = |CD|$, $\mathbf{OF}_3 \perp |CD|$; $\mathbf{OR} \perp |AD|$, $\|\mathbf{OR}\| = |AD|$.

Să se arate că $\mathbf{OF}_1 + \mathbf{OF}_2 + \mathbf{OF}_3 = \mathbf{OR}$. *(C.I.Ț.)*

T.106. Într-un cerc este înscris poligonul $A_1A_2 \ldots A_n$ și fie un punct 0 în interiorul poligonului. Să se arate că dacă în punctul O acționează vectorii $\mathbf{OB}_i$, $i = \overline{1, n}$ perpendiculari respectiv pe laturile A_iA_{i+1} și proporționale cu $|\overline{A_iA_{i+1}}|$, atunci $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{OB}_i = 0$. *(C.I.Ț.)*

T.107. Un tetraedru $VABC$ are muchiile $\|VA\| = \|VB\| = \|VC\| = m$ și înălțimea $\|VH\|$. Să se arate că:

1°. $$\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\widehat{AVB}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\widehat{AHB}\right)} = \frac{\sin\frac{1}{2}\left(\widehat{AVC}\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\widehat{AHC}\right)} = \frac{\sin\frac{1}{2}\left(\widehat{BVC}\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\widehat{BHC}\right)} = \sin\left(\widehat{AVH}\right)$$

2°. $$\|VH\|^2 = m^2 - \frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

unde a, b, c, sînt lungimile laturilor bazei tetraedrului. (G.M., 17 838, *C.I.Ț.*)

T.108. Aplicîndu-se formula lui *Moivre* să se arate că

$(1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5 = 2^5$; $(1 + i\sqrt{3})^7 + (1 - i\sqrt{3})^7 = 2^7$.

T.109. a) Să se arate că dacă $x \in \mathbf{R}$, atunci

$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 4 \cos x \cos 2x \cos 4x =$
$= 64 \cos^7 x - 96 \cos^5 x + 40 \cos^3 x - 4 \cos x.$

b) Folosind rezultatele de la punctul precedent să se rezolve ecuațiile $16x^6 - 24x^4 + 10x^2 - 1 = 0$ și $2x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0$. (*C.I.Ț.*)

T.110. Folosind formula lui *Moivre*, să se arate că dacă $1 + a^{n+1} = 0$, $n \in \mathbf{N}$, atunci $\sum_{k=1}^{n} \left(a^k + \frac{1}{a^k}\right) = 0$. (*C.I.Ț.*)

T.111. Folosind formula care exprimă $\operatorname{tg} 5x = f(\operatorname{tg} x)$, să se arate că, dacă $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$, atunci

$$\frac{x(x^4 - 10x^2 + 5)}{5x^4 - 10x^2 + 1)} \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup [2 + \sqrt{3}, \infty). \qquad (C.I.Ț.)$$

T.112. Fie propozițiile:

$$p: \left[\cos a \neq 0, \sin b + \cos b \neq 0, \operatorname{tg} a = \frac{\sin b - \cos b}{\sin b + \cos b}\right]$$

$q: [2 \cos^2 a = (\sin b + \cos b)^2 \neq 0]$,

$$r: \left[\cos a \neq 0, \sin b + \cos b \neq 0, \operatorname{tg} a = \frac{\cos b - \sin b}{\cos b + \sin b}\right].$$

Să se determine care din implicațiile: $p \Rightarrow q$, $r \Rightarrow p$, $q \Rightarrow p$, $q \Rightarrow r$ sînt adevărate. (*C.I.Ț.*)

T.113. Să se arate că dacă $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, atunci

$$\frac{(a + b)(1 - ab)}{1(+ a^2)(1 + b^2)} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \qquad (G.M.B., 1970. C.I.Ț.)$$

T.114. a) Știind că $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \sqrt{2}$ 2 să se calculeze $\operatorname{tg} 2x$.

b) Știind că $\operatorname{tg}^2 2x = 1$ să se calculeze $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

T.115. Să se arate că:

$\sin^2 a + \sin^2 b + \cos(a + b) \cos(a - b) = \sin^2(a + b) + \sin^2(a - b) +$
$+ \cos 2a \cos 2b = 1.$ (G.M.B., 9 377, *C.I.Ț.*)

T.116. Să se afle relația între x și y dacă

a) $\sin x \cdot |\cos y| + \sin y \cdot \cos x| = 0$.

b) $\sin x \cdot |\sin y| - \cos y \cdot \cos x| = 0$. (G. M. B., 4 312, *C.I.Ț.*)

T.117. Să se transforme în produs expresia:

$E(x) = \cos x + 2 \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + 2 \cos 5x + \cos 6x$.

T.118. Să se arate că $2 \sin 2x \sin 2y \leqslant 1 + 8 \sin^2 x \sin^2 y$.

(G.M.B., 3 383, *C.I.Ț.*)

T.119. Să se arate că dacă $0 \leqslant x \leqslant \pi/15$, atunci

$$-1/4 \sin(5x - \pi 6) \cos(5x + \pi/3) \leqslant 0,$$

$$1/4 \leqslant \sin(5x + \pi/6) \cos(5x - \pi/3) \leqslant 3/4.$$ (G.M.B., 6 748, *C.I.Ţ.*)

T.120. Să se arate că dacă $\pi/4 > x > y > 0$, atunci:

$$\frac{\cos x}{\cos y} < \frac{\sin x}{\sin y} < \frac{\cos x + \sin x - \sqrt{\cos 2x}}{\cos y + \sin y - \sqrt{\cos 2y}}.$$ (G.M.B., 10 126, *C.I.Ţ.*)

T.121. Fie ecuaţia $x^2 + px + q = 0$ cu rădăcinile cuprinse în intervalul $(\sin a, \cos a)$, unde $a \in (0, \pi/4)$. Să se arate că

$$(1 - q) \sin^3 a < -p \sin^2 2a < 8(1 - q) \cos^3 a.$$ (G.M., 16 860, *C.I.Ţ.*)

T.122. Să se arate că $E = \dfrac{\sin^6 15° + \cos^8 15°}{\sin^8 15° + \cos 15°} = \dfrac{107}{97}$. (G.M., *C.I.Ţ.*)

T.123. Să se arate că dacă $A + B + C = \pi$, atunci

$$\sin\frac{A - B}{2} + \sin\frac{A - C}{2} + \sin\frac{3A}{2} \leqslant \frac{3}{2}.$$ (G.M.B., *C.I.Ţ.*)

T.124. Să se arate că oricare ar fi $n \geqslant 3$, avem $\sin\dfrac{\pi}{n} > \dfrac{3}{4n}$.

(G.M.B., 1 716, *C.I.Ţ.*)

T.125. Să se arate că dacă $f(\sin x) = g\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$, atunci

$$g(\sin x) = f\left(\frac{2 \sin x}{1 + \sin^2 x}\right).$$ (S.G.M., 1000, *C.I.Ţ.*)

T.126. a) Dacă $\sqrt[3]{\sec a + \operatorname{tg} a} + \sqrt[3]{\sec a - \operatorname{tg} a} = m$ şi $\sqrt[3]{3 \sec a + \operatorname{tg} a} - \sqrt[3]{\sec a - \operatorname{tg} a} = n$, să se arate că: $m^3 - 3m = 2 \sec a = 0$ şi $n^3 + 3n - 2 \operatorname{tg} a = 0$.

b) Să se arate că, polinomul $x^6 - 2(\sec a + \operatorname{tg} a) x^3 - 9x^2 - 6(\sec a - \operatorname{tg} a) x + 4 \operatorname{tg} a \sec a$, unde $0 < a < \pi/2$ se divide cu $x^2 - 2\sqrt[3]{\sec a + \operatorname{tg} a} \cdot x + \sqrt[3]{(\sec a + \operatorname{tg} a)^2} - \sqrt[3]{(\sec a - \operatorname{tg} a)^2}$. (G.M.B., 11 089, *C.I.Ţ.*)

T.127. Să se arate că dacă ecuaţia $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ are toate rădăcinile cuprinse în intervalul $(1/4, 1/3)$, atunci

$$1680(1 - b + d) < 1127(c - a) < 3864(1 - b + d).$$ (*C.I.Ţ.*)

T.128. a) Să se rezolve ecuaţia $\cos 3x - \sin(\pi/2 - 2x) = 0$.

b) Folosind rezultatul de la punctul precedent să se deducă valorile lui $\cos\dfrac{2\pi}{5}$, $\cos\dfrac{\pi}{5}$, $\cos\dfrac{3\pi}{5}$, $\sin\dfrac{\pi}{10}$ şi $\sin\dfrac{3\pi}{10}$. (G.M.B., 11 126, *C.I.Ţ.*)

T.129. Fie funcţia $f: R \to R$ dată de $f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x} + \sqrt{2 - \sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x}$. Să se arate că $f(x) \in [2, 2\sqrt{2}]$; $f(3\pi/4) = f(7\pi/4) = 2$; $f(\pi/4) = f(5\pi/4) = 2\sqrt{2}$. (Gamma, Braşov, 5207, *C. Ionescu-Ţiu*)

T.130. Să se arate că dacă $\sin 2a \neq 0$ și $n \in \mathbf{N}^*$, atunci

$$1 + \frac{\cos 3a}{\cos a} + \frac{\cos 5a}{\cos a} + \ldots + \frac{\cos (2n-1)\,a}{\cos a} \leqslant n;$$

$$1 + \frac{\sin 3a}{\sin a} + \frac{\sin 5a}{\sin a} + \ldots + \frac{\sin (2n-1)\,a}{\sin a} \leqslant n^2.$$

1980, *C. Ionescu-Țiu* (G.M. 18 131,

T.131. Să se arate că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem inegalitatea:

$$\sin (\sin^2 x) + \cos (\cos^2 x) > \frac{1}{2}.$$ (G.M., 18 085, *E. Panaitopol*)

7.132. Un pentagon convex $ABCDE$ este înscris într-un cerc. Dacă $\|AB\| = 2\sqrt{5}$; $\|BC\| = 6$; $\|CD\| = 5\sqrt{2}$; $\|DE\| = 8$, iar $BC \parallel DE$ să se demonstreze că raza cercului circumscris pentagonului $R = 5$ și latura $\|AE\| = \sqrt{10}$. (*C.I.Ț.*)

T.133. Să se arate că dintre toate triunghiurile care au aceeași arie și aceeași bază, triunghiul isoscel cu celelalte două laturi egale are cea mai mare rază a cercului înscris în triunghi. (G.M. 17 998, 1979, *C. Ionescu-Țiu*)

T.134. Să se arate că dacă $x, y \in [0, \pi]$, atunci $-1 \leqslant \cos x - \cos y - \cos (x + y) \leqslant 3$. (R.M.T. 3 833, 1979, *C. Ionescu-Țiu*)

T.135. Să se rezolve ecuația $\sin x \cos y + \sin y \cos z + \sin z \cos x = 3/2$. (R.M.T., 3 835, 1979, *T. Andreescu*)

T.136. Să se arate că dacă $x, y \in [0, \pi/2]$, atunci

$2(\cos x + \cos y) - \cos (x - y) \in [-1, 3]$,

$2 \sin x + \sin y) - \cos (x - y) \in [-1, 3]$. (R.M.T., 3 275, 1978, *C. Ionescu-Țiu*)

T.137. Să se rezolve ecuația $\sin 5x = 16 \sin^5 x$. (R.M.T., 2 797, 1978)

T.138. Să se arate că dacă A, B și C sînt unghiurile unui triunghi, atunci

$(-\sin A + \sin B + \sin C)(\sin A - \sin B + \sin C)(\sin A + \sin B - \sin C) \leqslant \sin A \sin B \sin C$.

$4\Sigma \sin A \sin B \sin C \leqslant (\Sigma \sin A)^3 + 9 \sin A \sin B \sin C$.

(R.M.T. 3 848, 1979, *C. Ionescu-Țiu*)

T.139. Să se arate că funcția $f: R \to [-1, 1]$ dată de $f(x) = \sin |\sqrt{x}|$ nu este periodică (R.M.T., 3 430, 1979, *D. Andrica*)

T.140. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{\sin x}{a} = \frac{\sin y}{b} = \frac{\sin z}{c}; \quad x + y + z = \pi; \quad a, b, c > 0.$$

T.141. Să se arate că ecuația $x^5 - x^4 - 4x + 3x^2 + 3x - 1 = 0$ admite rădăcina $x_1 = 2 \cos \frac{\pi}{11}$. (*C. Ionescu-Țiu*)

T.142. Să se demonstreze egalitatea $\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{7} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{7} + \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{7} = 5$.

(R. M. T., 3 831, 1979, *D. Andrica*)

T.143. a) Să se arate că dacă $x \in \mathbf{R}$, atunci:

$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 4 \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x =$

$= 64 \cos^7 x - 96 \cos^5 x + 40 \cos^3 x - 4 \cos x.$

b) Să se rezolve ecuația $16x^3 - 24x^2 + 10x - 1 = 0$ *(C.I.T.)*

T.144. Fie $f(x, y) = 5 \sin^2 x + 3 \cos^2 y - 2 \sin x \sin y - 6 \cos (x - y)$. Să se arate că: $f(a, a) = -3$; $f(0, \pi/2) = f(0, 3\pi/2) = f(\pi, \pi/2) = f(\pi, 3\pi/2) = 0$; $f(\pi/2, 3\pi/2) = f(3\pi/2, 3\pi/2) = 13$ și $f(\pi/2, 0) = f(\pi/2), \pi = f(3\pi/2, \pi) = f(3\pi/2, 2\pi) = 8$. *(C. Ionescu-Țiu)*

T.145. Să se arate că dacă $x = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$, $y = \pi + \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$ și dacă $x = \pi + \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$, $y = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$, atunci:

$$3 \cos x - 4 \sin x = 12 \cos y - 16 \sin y = 4 \sin (x - y), \quad (1)$$

$$9 \cos x - 12 \sin x = 6 \cos y - 8 \sin y = 6 \sin (x - y) \quad (2)$$

T.146. Să se arate că dacă $a, b \in \mathbf{R}^+$, $x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$, atunci:

$$0 \leqslant x\sqrt{b^2 - y^2} + y\sqrt{a^2 - x^2} \leqslant ab, \quad (1)$$

$$-ab \leqslant x\sqrt{b^2 - y^2} - y\sqrt{a^2 - x^2} \leqslant ab, \quad (2)$$

$$-ab \leqslant -x\sqrt{b^2 - y^2} + y\sqrt{a^2 - x^2} \leqslant ab, \quad (3)$$

$$-ab \leqslant -x\sqrt{b^2 - y^2} - y\sqrt{a^2 - x^2} \leqslant 0. \quad (4)$$

(C.I.T.)

T.147. Să se arate că dacă $a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0, 2\pi]$, atunci $-1 \leqslant \cos b_1 \times \cos b_2 + \sin b_1 \sin b_2 \cos (a_1 - a_2) \leqslant 1$;

$$-1 \leqslant \sin b_1 \sin b_2 + \cos b_1 \cos (a_1 - a_2) \leqslant 1. \quad \textit{(C.I.T.)}$$

T.148. Să se arate că dacă $a, b \in [0, \pi/2]$, atunci

$\sin (a + b) \in [0, 1]$; $\sin (a - b) \in [-1, 1]$;

$\cos (a + b) \in [-1, 1]$; $\cos (a - b) \in [0, 1]$. *(C.I.T.)*

T.149. Să se arate că dacă $x, y \in [0, 2\pi]$, atunci

$-6 \leqslant 5 \sin^2 x + 4 \cos (x - y) + 2 \cos x \cos y \leqslant 9$

primul egal are loc pentru $x = 0$, $y = \pi$ și pentru $x = \pi$, $y = 0$, iar al doilea egal are loc pentru $x = y = \pi/2$ și pentru $x = y = 3\pi/2$. *(C.I.T.)*

T.150. Să se arate că dacă patrulaterul cu laturile $\| AB \| = a$, $\| BC \| = b$, $\| CD \| = c$, $\| DA \| = d$ este inscriptibil, atunci

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 < 2 (a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2 + 4abcd). \quad \textit{(C.I.T.)}$$

T.151. Să se arate că dacă $a, b, c, d \in [0, 2\pi]$, atunci

$-16 \leqslant 4 \cos a - \sin b - \cos c + \sin d) - \cos (a + b) - \cos (b + c) - \cos (c + d) - \cos (d + a) \leqslant 16$. primul egal are loc pentru $a = \pi$, $b = \pi/2$, $c = 0$, $d = 3\pi/2$, iar al doilea egal are loc pentru $a = 0$, $b = 3\pi/2$, $c = \pi$, d $= \pi/2$. *(C.I.T.)*

T.152. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. O paralelă la CD întîlnește dreptele AD și BC respectiv în D_1 și C_1.

Să se arate că: $\| AC \| \cdot \| BD \| \cdot \| C_1D_1 \| + \| BC_1 \| \cdot \| AD_1 \| \times \| CD \| = \| AC_1 \| \cdot \| BD_1 \| \cdot \| CD \| + \| BC \| \cdot \| AD \| \cdot \| C_1D_1 \|$.

(G.M., 18 117, *C. Ionescu-Țiu*)

T.153. Să se arate că:

— Dacă $x \in [0, \pi/2]$, atunci $1 \leqslant \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \leqslant 1 + \sqrt{2}$,

— Dacă $x \in [0, \pi]$, atunci $1 \leqslant \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \leqslant \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$,

— Dacă $x \in [0, \pi/2]$, atunci $1 \leqslant \sqrt{1 - \sin x} + \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \leqslant \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$.

(C.I.Ț.)

T.154. Să se arate că dacă $x, y \in [0, 2\pi]$, atunci
$4 \sin x \sin y + 5 \sin^2 y + 6 \cos x \cos y \in [-6, 9]$,
$2 \cos x \cos y + 3 \cos^2 y + 4 \sin x \sin y \in [-4, 5]$,
$3 \cos^2 x + 5 \sin^2 y + 6 \cos (x - y) + 2 \sin x \sin y \in [-3, 13]$. *(C.I.Ț.)*

T.155. Să rezolve ecuația $\sin 5x \cos x \cos 3x = 0$. *(C.I.Ț.)*

T.156. Să se rezolve ecuația $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

(Treapta a II-a, 1978, Vîlcea)

T.157. Să se rezolve ecuația $\cos 3x \cdot \cos^3 x + \sin 3x \cdot \sin^3 x = 0$.

(Treapta a II-a, licee industriale, 1978)

T.158. Să se rezolve ecuația $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + 1/2 = 0$.

(Treapta a II-a de licee, 1979, Maramureș)

T.159. Să se arate că $32 \sin \frac{5\pi}{62} \sin \frac{9\pi}{62} \cos \frac{10\pi}{62} \cos \frac{18\pi}{62} \cos \frac{20\pi}{62} = 1$.

(C.I.Ț.)

T.160. Să se arate că pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$, $x \neq \pi\mathbf{Z}$, avem:
$\sin^2 2x (\sin y + \cos y + \sin y \cdot \cos y \cdot \operatorname{ctg} x) \leqslant 2$.

(Concurs elevi clasa a X-a, 1979, *M. Rădulescu*)

T.161. Să se arate că $\sqrt{|\sin x|} + \sqrt{|\cos x|} = 1 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi\mathbf{Z}}{2}$.

(Concurs elevi, Dîmbovița, 1979, *I. Solomon*)

T.162. Să se arate că dacă $a \in (0, \pi/2)$, $b \in (0, \pi/2)$, atunci $\sin^2 a - \sin a \cos b + \cos^2 b < 1$. (Concurs elevi, Dîmbovița 1979, *P. Liviu*)

T.163. Să se arate, fără tabele, egalitatea: $\sin 1° + \sin 35° + \sin 73° = \cos 19° + \cos 53°$. (Concurs elevi, clasa a X-a, Arad, 1979)

T.164. Să se arate că $(\forall) x \in \mathbf{R}$, $1/2 \leqslant \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x \leqslant 11/2$. (Concurs elevi, clasa a X-a, 1979, *A. Doboșan*)

T.165. Să se afle valorile lui x din intervalul $(0, \pi/2)$ pentru care are loc inegalitatea

$$\log_x \sin x + \log_{1/x} \cos x < 0.$$ (Concurs elevi, clasa a X-a, Arad, 1979)

T.166. Fie punctele arbitrare A, B, C, D și perechile de vectori **(AB, CD)**, **(AC, BD)**, **(AD, BC)**. Notăm $a = \| \mathbf{AB} \|$; $b = \| \mathbf{BC} \|$; $c = \| \mathbf{CD} \|$; $d = \| \mathbf{DA} \|$; $d_1 = \| \mathbf{AC} \|$; $d_2 = \| \mathbf{BD} \|$.

a) Să se exprime produsele $\mathbf{AB} \cdot \mathbf{CD}$; $\mathbf{AC} \cdot \mathbf{BD}$; $\mathbf{AD} \cdot \mathbf{BC}$ în funcție de a, b, c, d, d_1, d_2.

b) Să se arate că dacă suma pătratelor normelor unei perechi de vectori este egală cu suma pătratelor unei alte perechi, atunci vectorii din perechea a treia sînt perpendiculari.

c) Dacă vectorii unei perechi au aceeași normă, atunci dreptele determinate de mijloacele vectorilor celorlalte perechi sînt perpendiculare și reciproc. (Concurs elevi, clasa IX-a, Timiș, 1979, *M. Haivas*)

T.167. Să se calculeze $\sin x + \sin y$, știind că are loc egalitatea $\cos(x - y) = \operatorname{ctg}^2 \frac{x+y}{2}$. (Concurs elevi, clsa a X-a, Hunedoara, 1979)

T.168. Se dă funcția f, definită prin:

$$f(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}.$$

a) Să se afle domeniu maxim de definiție și mulțimea valorilor funcției f.

b) Să se arate că funcția f are perioada $\pi/2$ și să se reprezinte grafic.

c) Notînd $f(x) = m$, să se calculeze în funcția de m, expresiile:

$$E_1 = \operatorname{tg} 2x; \quad E_2 = \sin x \cdot |\sin x| + \cos x |\cos x|.$$

(Concurs elevi clasa a X-a, 1980, *M. Huschitt*)

T.169. Să se rezolve ecuația $\frac{\sin^3 a}{\sin x} + \frac{\cos^3 a}{\cos x} = 1$.

(Concurs elevi, clasa a X-a, 1980)

T.170. Dacă A, B și C sînt unghiurile unui triunghi oarecare, atunci are loc inegalitatea $3 + \cos^2 A > 2(\cos^2 B + \cos^2 C)$.

(Concurs elevi, clasa a IX-a, 1980)

T.171. Să se arate că dacă $x, y, z \in \mathbf{R}$ are loc egalitatea:

$$\operatorname{tg}\left(\lg \frac{x}{y}\right) + \operatorname{tg}\left(\lg \frac{y}{z}\right) + \operatorname{tg}\left(\lg \frac{z}{x}\right) = \lg\left(\operatorname{tg} \frac{x}{y}\right) + \lg\left(\operatorname{tg} \frac{z}{x}\right) + \lg\left(\frac{y}{z}\right).$$

(Concurs elevi, Cluj, 1980)

T.172. Dacă $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = m$ să se calculeze în funcție de m expresiile: $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$, $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x$, $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x$.

(Institutul Politehnic, București, subingineri, 1979).

T.173. Să se rezolve ecuația $\sin 2x \cdot \cos x + 3 \sin^2 x = 3$.

(Facultatea de Matematică, București, 1980)

T.174. Să se arate că dacă $x \neq \pi/2 + \pi\,\mathbf{Z}$, atunci:

$$\left(\frac{1 + i\,\mathrm{tg}\,x}{1 - i\,\mathrm{tg}\,x}\right)^n = \frac{\mathrm{ctg}\,nx + i}{\mathrm{ctg}\,nx - i};\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$ (Institutul Politehnic, Bucureşti, ingineri, 1980)

T.175. Să se rezolve ecuaţia:

$\sin^4 x + \sin^4(x + \pi/4) + \sin^4(x - \pi/4) = 5/4$. (Institutul Politehnic, Bucureşti, ingineri, 1980)

T.176. Să se trateze graficul funcţiei $f: R^+ \to R$, dată de $f(x) = x - \sin x$. (Facultatea de Matematică-Informatică, Bucureşti, 1980

T.177. Să se afle valorile reale ale lui x pentru care $|x| < 1$ şi $2\cos^2 3x = 1 + \cos 4x$. (Facultatea de Matematică-Informatică, Bucureşti, 1980)

T.178. Să se arate că $2\sin^2 x + 5\cos^2 y + 2\cos x \sin y - 2\cos x - 4\sin y \in [-8, 8]$, marginea inferioară are loc dacă $\cos x = \sin y = 1/3$; iar marginea superioară are loc dacă $\cos x = \sin y = -1$.

(Gamma, Braşov, 5210, *C. Ionescu-Ţiu*)

T.179. Să se arate că: $0 \leqslant 3\sin^2 x + 3\sin^2 y + 4\sin(x + y) \leqslant 8$ primul egal are loc pentru $\sin x = \sin y = 0$, iar al doilea egal are loc dacă $\mathrm{tg}\,x = \mathrm{tg}\,y = \pm 2$. *(C.I.Ţ.)*

T.180. Să se arate că dacă $x, y \in [0, 2\pi]$, atunci $-14 \leqslant 6\cos x - 12\cos y - 3\sin^2 y - 2\cos(x - y) - 2\cos x \cos y \leqslant 22$ primul egal are loc pentru $x = \pi$, $y = 0$, iar al doilea egal are loc numai pentru $x = 0$, $y = \pi$. *(C.I.Ţ.)*

T.181. Fie funcţia $f: \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}$ definită prin $f(x, y, a) = \sqrt{x^2 - 2x\sin a - 4\cos a + 5} + \sqrt{y^2 - 2y\sin a - 6\cos a + 10}$. Să se arate că $f(x, y, a) \geqslant 3$. *(C. Ionescu-Ţiu)*

T.182. Fie funcţia $f: \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ definită prin $(f(x, y) = \cos^2 y - (\cos x + \sin x)\cos y - \cos x + \sin x$. Să se arate că $f(x, y) \in [-\sqrt{2}, 3]$; $f(7\pi/4, \pi/2) = f(7\pi/4, 3\pi/2) = -\sqrt{2}$; $f(\pi, 0) = f(\pi/2, \pi) = 3$.

(C. Ionescu-Ţiu)

T.183. Fie funcţia $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ definită prin

$$f(x) = \frac{1 + \cos x}{\sqrt{3 - 2\sin x + 2\cos x}}.$$

Să se arate că $f(x) \in [0, 1]$; $f\pi) = 0$, $f(\pi/2) = 1$. *(C. Ionescu-Ţiu)*

T.184. Să se arate că dacă $x, y \in \mathrm{R}$; $a \in [0, 2\pi]$ şi $(2 - \sin a)x + (1 + \cos a)y - 2\cos a = 2$, atunci $3x^2 + 4xy - 8x \geqslant 0$. *(C. Ionescu-Ţiu)*

CUPRINS

Cuvînt înainte de acad. Caius Iacob 5

Introducere 7

CAPITOLUL I 9

Unghiuri, arce. Relaţii între funcţiile trigonometrice ale arcelor în diferite cadrane. Relaţii între funcţiile trigonometrice ale aceluiaşi arc. Operaţii cu vectori. Proiecţii. Identităţi trigonometrice. Eliminări. Inegalităţi între funcţiile trigonometrice ale aceluiaşi argument. Arce care corespund unei funcţii trigonometrice date. Funcţii periodice şi graficele lor. Funcţii pare şi impare. Variaţia şi graficul funcţiilor trigonometrice. Inegalităţi trigonometrice simple. Vectori în plan. Produsul scalar 9

Probleme (1.1—1.156) 9

Enunţuri 9

Soluţii şi indicaţii 23

CAPITOLUL II 51

Funcţiile trigonometrice ale sumei arcelor, ale arcelor multiple şi jumătăţilor de arce. Transformări în produse trigonometrice. Eliminări. Identtăţi şi inegalităţi trigonometrice. Aplicaţii. Sume şi produse trigonometrice. 51

Probleme (2.1—2.191) 51

Enunţuri 51

Soluţii şi indicaţii 70

CAPITOLUL III 126

Grafice de funcţii trigonometrice. Funcţii trigonometrice inverse. Aplicaţii. Identităţi. parţiale. Ecuaţii şi inecuaţii simple trigonometrice. Identităţi condiţionate. Relaţii trigonometrice între unghiurile unui triunghi oarecare. 126

Probleme (3.1—3.184) 126

Enunţuri 126

Soluţii şi indicaţii 140

CAPITOLUL IV 182

Rezolvarea trigonomică a triunghiurilor, patrulaterelor şi poligoanelor. Aplicaţii la calculul de distanţe şi în fizică. Aplicaţii ale trigonometriei la geometria în spaţiu. 182

Probleme (4.1—4. 120) 182

Enunţuri 182

Soluţii şi indicaţii 194

CAPITOLUL V 228

Rezolvarea ecuațiilor trigonometrice. Aplicații. Inecuații trigonometrice. Ecuații trigonometrice cu parametri. Discuția ecuațiilor. Sisteme de ecuații trigonometrice. Diverse .. 228

Probleme (5.1—5.145) 228

Enunțuri 228

Soluții și indicații 236

CAPITOLUL VI 275

Numere complexe sub formă trigonometrică. Ecuații binome. Aplicații. Diverse 275

Probleme (6.1—6.74) 275

Enunțuri 275

Soluțiiti și indicații 282

CAPITOLUL VII 307

Probleme recapitulative și chestiuni de examen cu soluții..... 307

Enunțuri 307

Solufii și răspunsuri 313

Teste (Ț.1—Ț.184) 331

Redactor: PETRE MOCANU
Tehnoredactor: SILVIA DEOCLEȚIAN

Bun de tipar: 17.XII.1991, Format: 16/70×100
Coli tipar: 22
C.Z. pentru biblioteci mari: 514 (076) = 59
C.Z. pentru biblioteci mici: 51

Tiparul executat sub comanda nr. 549 la
ROMCART S.A.

În cadrul colecției
„BIBLIOTECA PROFESORULUI
DE MATEMATICĂ"
au mai apărut:

Bazele raționamentului geometric de D. Brânzei, E. Onofraș, S. Anița și Gh. Isvoreanu, 1983.
Fundamentele aritmeticii și geometriei de Radu Miron și Dan Brânzei, 1983.
Culegere de probleme de matematică de Mihai Cocuz (ediție îngrijită de dr. Petru Caraman), 1984.
Bazele algebrei, vol. I, de C. Năstăsescu, C. Niță și C. Vraciu, 1986.
Planul și spațiul euclidian de D. Brânzei, S. Anița și C. Cocea, 1986.
De la matematica elementară la matematica superioară de C. Avadanei, N. Avadanei, C. Borș și Cristina Ciurea, 1987.
Probleme de structuri algebrice de C. Năstăsescu, M. Țena, G. Andrei și I. Otărășanu, 1988.
Transformări geometrice de D. Smaranda și N. Soare, 1989.
Noțiunile fundamentale ale algebrei de I.R. Șafarevici (tradusă din l. rusă de dr. T. Spircu), 1989.
Matematică aplicată și mecanică de Caius Iacob, 1989.
Ecuații diferențiale. Aplicații de G. Moroșanu, 1989.
Principiile fundamentale ale matematicii moderne. (Lecții de analiză matematică) de Silviu Sburlan, 1991.

ISBN 973-27-0100-5

Lei 100